JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACOBI

Sur la Réduction de l'intégration des Équations différentielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 60-96.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__60_0>

Sur la Réduction de l'intégration des Équations différentielles partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires ;

Par M. JACOBI (*).

I.

M. Hamilton a trouvé (*Transactions Philosophiques*, 1834, p. II, et 1835 p. I), ce résultat remarquable, que dans les cas de la mécanique où la loi des forces vives a lieu, les équations intégrales du mouvement, de même que les équations différentielles sous la forme que Lagrange leur a donnée, se laissent toutes exprimer par les coefficients différentiels partiels d'une seule fonction.

Voici à peu près la marche qu'il a suivie : soient

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i} + \lambda \frac{dF}{dx_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dx_i} + \ldots$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i} + \lambda \frac{dF}{dy_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dy_i} + \ldots$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i} + \lambda \frac{dF}{dz_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dz} + \ldots.$$

les équations différentielles du mouvement d'un système de n points matériels qui satisfont aux conditions $F = 0$, $F_1 = 0, \ldots.$

Dans ces équations l'indice i prend successivement les valeurs $1, 2, \ldots n$; et m_i signifie la masse d'un point dont les coordonnées rectangulaires sont x_i, y_i, z_i. C'est la forme que Lagrange a donnée aux équations différentielles, et qui peut toujours leur être donnée dans les cas où la loi des forces vives a lieu, c'est-à-dire quand

$$\frac{1}{2} \Sigma m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right] = U + h,$$

(*). Ce Mémoire est tiré, comme le précédent, du Journal de M. Crelle. (J. Liouville.)

h étant une constante. Les quantités λ, $\lambda_{,}$,... sont des facteurs introduits pour la symétrie, et qui doivent être éliminés à l'aide des équations de condition. J'appelle la fonction U, dont la différentiation partielle donne les forces employées, la *fonction des forces*.

Quand on aura complétement intégré les équations différentielles données, on connaîtra les $3n$ coordonnées en fonctions du temps et des constantes arbitraires. Substituons ces valeurs dans la fonction des forces U, et dans sa différentielle partielle prise par rapport à une des constantes que j'appellerai α : nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{dU}{d\alpha} &= \Sigma\left(\frac{dU}{dx_i}\cdot\frac{dx_i}{d\alpha}+\frac{dU}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{d\alpha}+\frac{dU}{dz_i}\cdot\frac{dz_i}{d\alpha}\right),\\ &= \Sigma m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\frac{dx_i}{d\alpha}+\frac{d^2y_i}{dt^2}\,\frac{dy_i}{d\alpha}+\frac{d^2z_i}{dt^2}\,\frac{dz_i}{d\alpha}\right),\end{aligned}$$

car les facteurs de λ, $\lambda_{,}$,... s'évanouissent à cause des équations de conditions.

On peut donner à la dernière équation la forme :

$$\begin{aligned}\frac{dU}{d\alpha} = {}&\frac{d\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\,\frac{dx_i}{d\alpha}+\frac{dy_i}{dt}\,\frac{dy_i}{d\alpha}+\frac{dz_i}{dt}\,\frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{dt}\\ &-\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{d^2x_i}{d\alpha dt}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{d^2y_i}{d\alpha dt}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{d^2z_i}{d\alpha dt}\right).\end{aligned}$$

La dernière partie du second membre peut aussi se mettre sous la forme d'une différentielle partielle prise par rapport à α, savoir

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d\Sigma m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]}{d\alpha},$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\begin{aligned}&\frac{d\left\{U+\frac{1}{2}\Sigma m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]\right\}}{d\alpha},\\ &=\frac{d\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dx_i}{d\alpha}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{dy_i}{d\alpha}+\frac{dz_i}{dt}\,\frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{dt}.\end{aligned}$$

Cette équation remarquable n'a pas échappé aux analystes qui se sont occupés de la variation des constantes dans les problèmes de mécanique. Il s'ensuit facilement un des théorèmes les plus importants de cette théorie. En effet, si l'on pose

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

de manière que l'équation précédente devienne

$$\frac{d\left[\mathrm{U} + \frac{1}{2}\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\right]}{d\alpha} = \frac{\mathrm{d}\Sigma m_i \left(x_i' \frac{dx_i}{d\alpha} + y_i' \frac{dy_i}{d\alpha} + z_i' \frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{\mathrm{d}t},$$

et si l'on désigne par β une autre constante arbitraire quelconque, on voit que les deux expressions

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma m_i \left(x_i' \frac{dx_i}{d\alpha} + y_i' \frac{dy_i}{d\alpha} + z_i' \frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{\mathrm{d}t},$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma m_i \left(x_i' \frac{dx_i}{d\beta} + y_i' \frac{dy_i}{d\beta} + z_i' \frac{dz_i}{d\beta}\right)}{\mathrm{d}t},$$

sont les coefficients différentiels partiels de la même expression, savoir

$$\mathrm{U} + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

pris respectivement par rapport à α et par rapport à β. Donc la différentielle par rapport à β du premier coefficient différentiel, est égale à la différentielle par rapport à α du second; ce qui donne après les simplifications nécessaires,

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma m_i \left(\frac{dx_i'}{d\beta} \cdot \frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dy_i'}{d\beta} \cdot \frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dz_i'}{d\beta} \cdot \frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{\mathrm{d}t}$$
$$- \frac{\mathrm{d}\Sigma m_i \left(\frac{dx_i'}{d\alpha} \cdot \frac{dx_i}{d\beta} + \frac{dy_i'}{d\alpha} \cdot \frac{dy_i}{d\beta} + \frac{dz_i'}{d\alpha} \cdot \frac{dz_i}{d\beta}\right)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Cette équation fait voir que la quantité

$$\Sigma m \left(\frac{dx'_i}{d\beta} \cdot \frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dy'_i}{d\beta} \cdot \frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dz'_i}{d\beta} \cdot \frac{dz_i}{d\alpha}\right)$$
$$- \Sigma m_i \left(\frac{dx'_i}{d\alpha} \cdot \frac{dx_i}{d\beta} + \frac{dy'_i}{d\alpha} \cdot \frac{dy_i}{d\beta} + \frac{dz'_i}{d\alpha} \cdot \frac{dz_i}{d\beta}\right),$$

est indépendante de t, c'est-à-dire qu'elle est une constante, ce qui est le célèbre théorème dû à Lagrange. On démontre aussi facilement qu'en appelant cette expression (α, β), et désignant par γ une troisième constante arbitraire, on aura les équations

$$(\alpha, \alpha) = 0, \ (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) = 0, \ \frac{d(\beta, \gamma)}{d\alpha} + \frac{d(\gamma, \alpha)}{d\beta} + \frac{d(\beta, \alpha)}{d\gamma} = 0.$$

Mais M. Hamilton tire de l'équation que nous avons trouvée, savoir,

$$\frac{d[\mathrm{U} + \frac{1}{2}\Sigma m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)]}{d\alpha} = \frac{\mathrm{d}\Sigma m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{d\alpha} + y'_i \frac{dy_i}{d\alpha} + z'_i \frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{\mathrm{d}t},$$

de nouveaux avantages par le procédé suivant, qui est très remarquable en lui-même et par les résultats auxquels il conduit.

En effet, si l'on pose

$$\mathrm{S} = \int_0^t [\mathrm{U} + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)]\mathrm{d}t,$$

on aura

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha} = \int_0^t \frac{d[\mathrm{U} + \frac{1}{2}\Sigma m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)]}{d\alpha} \mathrm{d}t,$$

ou, par suite de l'équation précédente,

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\Sigma m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{d\alpha} + y'_i \frac{dy_i}{d\alpha} + z'_i \frac{dz_i}{d\alpha}\right)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t.$$

Si a, b, c, représentent les valeurs initiales de x, y, z, et a', b', c', celles de x', y', z', cette équation donnera

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha} = \Sigma m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{d\alpha} + y'_i \frac{dy_i}{d\alpha} + z'_i \frac{dz_i}{d\alpha}\right) - \Sigma m_i \left(a'_i \frac{da_i}{d\alpha} + b'_i \frac{db_i}{d\alpha} + c'_i \frac{dc_i}{d\alpha}\right).$$

S est fonction de t et des constantes arbitraires. Elle est définie par cela même que sa différentielle prise par rapport à t est égale à la fonction des forces plus la moitié de la force vive. La dernière équation donne le moyen de trouver aussi la différentielle de S en ne faisant varier que les constantes arbitraires. En effet, si l'on désigne par d' la différentielle que l'on obtient en faisant varier simultanément toutes les constantes arbitraires, mais en laissant t invariable, l'équation précédente après avoir été multipliée par $d\alpha$ et après qu'on aura pris la somme de toutes les équations analogues, deviendra

$$d'S = \Sigma m_i(x_i' d'x_i + y_i' d'y_i + z' d'z_i) - \Sigma m_i(a_i' d'a_i + b_i' d'b_i + c_i' d'c_i);$$

c'est la différentielle complète de S en laissant t constant, et considérant S comme fonction des constantes arbitraires.

Quand le système est tout-à-fait libre, on a un nombre $6n$ de constantes arbitraires, dont S et les $6n$ quantités x, y, z, a, b, c, sont regardées comme fonctions. On pourra donc, en se servant des équations intégrales, exprimer les $3n$ quantités a, b, c par ces $6n$ constantes, et les $3n$ quantités x, y, z par ces constantes et le temps t. On peut donc regarder les $6n$ constantes arbitraires comme fonctions du temps et des $6n$ quantités x, y, z, a, b, c, ce qui rendra S fonction du temps t, et des $6n$ quantités x, y, z, a, b, c. Si l'on prend dans ce sens les coefficients différentiels partiels de S, la dernière équation donnera immédiatement les différentielles partielles de S prises par rapport aux quantités x, y, z, a, b, c; savoir :

$$\frac{dS}{dx_i} = m_i x_i', \qquad \frac{dS}{da_i} = -m_i a_i',$$
$$\frac{dS}{dy_i} = m_i y_i', \qquad \frac{dS}{db_i} = -m_i b_i',$$
$$\frac{dS}{dz_i} = m_i z_i', \qquad \frac{dS}{dc_i} = -m_i c_i'.$$

Ces $6n$ équations peuvent être regardées comme les équations intégrales complètes du problème proposé. Les $3n$ équations à gauche sont les $3n$ intégrales du premier ordre (que M. Hamilton appelle intégrales intermédiaires), et les équations à droite sont les $3n$ intégrales finies elles-mêmes.

Si le système n'est pas libre, et que l'on ait les k conditions

$$F = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad \ldots F_{k-1} = 0,$$

auxquelles tous ses points doivent satisfaire, on pourra réduire les $3n$ fonctions cherchées x, y, z, à un nombre $3n-k$, et les $3n$ équations différentielles du second ordre se réduiront aussi à $3n-k$. On n'a donc que $6n-2k$ constantes arbitraires, au lieu desquelles on pourra introduire dans l'expression de S les $3n-k$ quantités auxquelles on a réduit les $3n$ quantités x, y, z; et leurs valeurs initiales auxquelles les $3n$ quantités a, b, c se laissent ramener par les mêmes équations de condition. L'équation par laquelle, en supposant t constant, nous avons exprimé la différentielle complète de S, prise dans le sens précédemment indiqué, peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} 0 = & \Sigma\left(\frac{dS}{dx_i} - m_i x_i'\right)dx_i + \Sigma\left(\frac{dS}{da_i} + m_i a_i'\right)da_i \\ & + \Sigma\left(\frac{dS}{dy_i} - m_i y_i'\right)dy_i + \Sigma\left(\frac{dS}{db_i} + m_i b_i'\right)db_i \\ & + \Sigma\left(\frac{dS}{dz_i} - m_i z_i'\right)dz_i + \Sigma\left(\frac{dS}{dc_i} + m_i c_i'\right)dc_i. \end{aligned}$$

Éliminons-en, au moyen des équations de condition, un nombre k des $3n$ différentielles, dx, dy, dz; et un même nombre des $3n$ différentielles, da, db, dc : cette opération étant effectuée, le facteur de chacune des autres différentielles indépendantes doit être égal à 0. Soit $F^{(0)}$ ce que devient la valeur de F, en y substituant au lieu de x, y, z, les valeurs initiales a, b, c : on opérera l'élimination dont il s'agit, en multipliant par un facteur indéterminé et ajoutant à l'équation précédente chacune des k équations

$$\Sigma\left(\frac{dF}{dx_i}dx_i + \frac{dF}{dy_i}dy_i + \frac{dF}{dz_i}dz_i\right) = dF = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et chacune des k équations

$$\Sigma\left(\frac{dF^{(0)}}{da_i}da_i + \frac{dF^{(0)}}{db_i}db_i + \frac{dF^{(0)}}{dc_i}dc_i\right) = dF^{(0)} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

puis déterminant les facteurs de manière que les coefficients des k différentielles dx, da, etc., que l'on désire éliminer s'évanouissent. Et puisque les facteurs des autres différentielles indépendantes doivent s'évanouir ensuite, on aura, en désignant les facteurs introduits par $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots -\lambda^{(0)}, -\lambda_1^{(0)}, \ldots$ le système des $6n$ équations

$$\begin{aligned}
m_i x_i' &= \frac{dS}{dx_i} + \lambda \frac{dF}{dx_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dx_i} + \ldots \\
m_i y_i' &= \frac{dS}{dy_i} + \lambda \frac{dF}{dy_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dy_i} + \ldots \\
m_i z_i' &= \frac{dS}{dz_i} + \lambda \frac{dF}{dz_i} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dz_i} + \ldots \\
m_i a_i' &= -\frac{dS}{da_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF}{da_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF_1}{da_i} + \ldots \\
m_i b_i' &= -\frac{dS}{db_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF}{db_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF_1}{db_i} + \ldots \\
m_i c_i' &= -\frac{dS}{dc_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF}{dc_i} + \lambda^{(0)} \frac{dF_1}{dc_i} + \ldots,
\end{aligned}$$

que nous devons regarder comme les équations intégrales complètes après y avoir ajouté les équations de condition

$$F = 0,\ F_1 = 0,\ \ldots\ldots\ F^{(0)} = 0,\ F_1^{(0)} = 0,\ \ldots$$

Les facteurs $\lambda, \lambda_1, \ldots -\lambda^{(0)} - \lambda_1^{(0)}, \ldots$ se trouvent par la résolution d'un nombre égal d'équations linéaires que l'on obtient en substituant les valeurs précédentes de x'_i, a'_i, etc.; dans les équations produites par la différentiation des équations de condition, savoir

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \Sigma\left(\frac{dF}{dx}\, x_i' + \frac{dF}{dy_i}\, y_i' + \frac{dF}{dz_i}\, z_i'\right) = 0, \\
\frac{dF_1}{dt} &= \Sigma\left(\frac{dF_1}{dx_i}\, x_i' + \frac{dF_1}{dy_i}\, y_i' + \frac{dF_1}{dz_i}\, z_i'\right) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et dans les équations que l'on déduit de celles-ci en y faisant $t = 0$, savoir

$$\Sigma\left(\frac{dF^{(0)}}{da_i}a_i' + \frac{dF^{(0)}}{db_i}b_i' + \frac{dF^{(0)}}{dc_i}c_i'\right) = 0,$$
$$\Sigma\left(\frac{dF_1^{(0)}}{da_i}a_i' + \frac{dF_1^{(0)}}{db_i}b_i' + \frac{dF_1^{(0)}}{dc_i}c_i'\right) = 0.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nous voyons donc comment, dans le cas d'un système qui n'est pas libre, les équations intégrales prennent une forme tout-à-fait analogue à celle à laquelle Lagrange a ramené les équations différentielles de la mécanique.

Quand la loi des forces vives a lieu, on peut exprimer la fonction S de cette manière :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t \left[U + \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\right] dt \\ &= \int_0^t \Sigma\, m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\, dt - ht \\ &= 2\int_0^t U dt + ht, \end{aligned}$$

où h est une constante arbitraire. Je ne me suis pas servi dans ce qui précède de la loi des forces vives, parce que ces résultats peuvent être étendus à un cas où cette loi n'a pas lieu, ce que M. Hamilton n'a pas remarqué ; savoir au cas où la fonction des forces contient non-seulement les coordonnées mais le temps explicitement, comme, par exemple, quand un point sans masse est attiré par des centres mobiles dont le mouvement est connu et donné. Je donnerai toujours cette extension des formules là où elle sera possible, puisque le cas signalé de la mécanique a réellement des applications.

II.

La définition que nous avons donnée de la fonction S suppose l'intégration complète des équations différentielles du problème de mécanique déjà accomplie. Le seul résultat des calculs précédents serait alors de ramener à une forme remarquable le système des équations intégrales. Mais on peut définir la fonction S d'une manière différente et beaucoup plus générale. Je limiterai mes recherches au cas d'un système parfaitement libre; quant au cas où des connexions et des conditions quelconques existent entre les points m_1, m_2, etc., j'y reviendrai plus tard dans un mémoire dont j'ai déjà indiqué ailleurs les principaux résultats.

Nous considérons encore S comme fonction du temps, des coordonnées des points et de leurs valeurs initiales. Si nous prenons la différentielle complète de S (savoir dS) par rapport au temps, en regardant les coordonnées comme fonctions du temps, nous aurons, d'après la définition de S,

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}t} = \frac{dS}{dt} + \Sigma\left(\frac{dS}{dx_i}x_i' + \frac{dS}{dy_i}y_i' + \frac{dS}{dz_i}z_i'\right) = U + \frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Comme on a

$$x_i' = \frac{1}{m_i}\frac{dS}{dx_i},\ y_i' = \frac{1}{m_i}\frac{dS}{dy_i},\ z_i' = \frac{1}{m_i}\frac{dS}{dz_i},$$

il suit de l'équation précédente que l'expression de la différentielle partielle de S prise par rapport à t est

$$\frac{dS}{dt} = U - \frac{1}{2}\Sigma m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

laquelle expression, quand U ne contient pas t explicitement, et par conséquent quand la loi des forces vives a lieu, se réduit à l'expression plus simple

$$\frac{dS}{dt} = -h$$

où h est une constante arbitraire.

On déduit aussi de l'expression de $\frac{dS}{dt}$ l'équation suivante

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right) + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right] = U:$$

c'est une équation différentielle partielle du premier ordre à laquelle la fonction S doit satisfaire. La fonction S, comme elle a été définie plus haut, en fournit une solution complète : en effet outre la constante que l'on peut évidemment y ajouter (puisque la fonction même ne paraît pas dans l'équation, mais seulement ses coefficients différentiels) elle contient $3n$ autres constantes arbitraires, savoir les valeurs initiales des coordonnées; et d'un autre côté le nombre des variables indépendantes est aussi $3n + 1$.

Je m'arrêterai ici un instant pour expliquer la nature des solutions différentes d'une équation différentielle partielle du premier ordre.

Nous appelons, d'après Lagrange, solution *complète* d'une équation différentielle partielle non linéaire du premier ordre, une solution qui contient un nombre de constantes arbitraires égal à celui des variables indépendantes, parce que, en se servant des coefficients différentiels partiels de la fonction cherchée, pris par rapport à ces variables, on peut éliminer un nombre égal de constantes arbitraires, et, en général, on n'en peut pas éliminer davantage. Si l'on connaît *une* solution complète, on pourra en déduire *toutes les autres* solutions dont l'équation différentielle partielle est susceptible, et qui ont un caractère très différent. Pour y parvenir on suppose un certain nombre de relations arbitraires entre les constantes arbitraires, ou, ce qui revient au même, on regarde quelques-unes de ces constantes arbitraires comme fonctions arbitraires des autres; on différentie la solution complète par rapport à ces autres constantes arbitraires considérées comme indépendantes, et l'on égale à zéro chacun des coefficients différentiels partiels formés de cette manière. Si alors, en se servant de ces équations, on élimine les constantes arbitraires de la solution complète, on aura la nouvelle solution que l'on peut nommer, d'après Lagrange, une solution *générale*, parce qu'elle contient des fonctions arbitraires. Mais ces solutions générales ont un caractère tout-à-fait différent, suivant le nombre de relations arbitraires que l'on suppose exister entre les constantes arbitraires. Si m est le nombre des variables indépendantes par conséquent le nombre des constantes arbitraires, on aura $m - 1$ classes de solutions générales suivant que l'on prend $1, 2, \ldots$ ou $m - 1$ relations entre les m constantes. La solution la plus générale est celle où il n'y a qu'une relation entre les constantes, c'est-à-dire où l'une d'elles seulement est regardée comme fonction des autres. Le degré de généralité diminue avec le nombre des constantes arbitraires que l'on remplace par des fonctions arbitraires des autres.

Ainsi en supposant une seule constante arbitraire fonction arbitraire des $m-1$ autres, comme dans la solution la plus générale, on laisse aux formules une étendue, une indétermination plus grande que si l'on supposait deux constantes arbitraires fonctions arbitraires des $m-2$ autres, comme dans la seconde classe de solutions générales. En effet, si l'on se représente une fonction arbitraire de $m-1$ quantités, ordonnée suivant les puissances d'une d'entre elles, les coefficients seront des fonctions arbitraires de $m-2$ quantités; de sorte qu'une fonction arbitraire de $m-1$ quantités contient un nombre infini de fonctions de $m-2$ quantités. On a comme limite de ces classes de solutions générales le cas où l'on suppose m relations entre nos m quantités, c'est-à-dire où on les regarde comme des constantes : c'est le cas de la solution *complète*.

Les différentes espèces de solutions, que j'ai appelées solutions générales, contenant des fonctions arbitraires, on peut les particulariser de manière qu'elles contiennent un nombre donné quelconque de constantes arbitraires; car on peut introduire dans chaque fonction arbitraire autant de constantes arbitraires que l'on veut. Si l'on donne aux fonctions arbitraires m constantes arbitraires en tout, m étant le nombre des variables indépendantes dans l'équation différentielle partielle, chaque solution générale ainsi particularisée avec m constantes arbitraires, deviendra une solution complète; et de cette dernière, comme de la solution complète dont on est parti, on pourra déduire toutes les solutions dont l'équation différentielle partielle donnée est susceptible.

On peut de même particulariser chaque solution générale, de manière qu'il en résulte une solution appartenant à une classe moins générale. Si l'on a par exemple une solution dans laquelle k quantités se trouvent fonctions arbitraires des $m-k$ autres, et si l est un nombre compris entre k et m, on peut particulariser ces k fonctions arbitraires des $m-k$ quantités, de manière qu'autant de fonctions arbitraires que l'on veut de $m-l$ quantités y soient contenues, et si l'on prend pour ces k fonctions arbitraires des formes particulières qui contiennent l fonctions arbitraires de $m-l$ quantités, on peut regarder cette solution comme une solution qui appartient à une classe moins générale et que l'on peut déduire de la solution complète, en y considérant l constantes arbitraires comme fonctions arbitraires des autres, et en mettant pour celles-ci de telles fonctions que les coefficients différentiels partiels de la solution complète, pris par rapport à elles, s'évanouissent.

III.

Après avoir rappelé ces considérations connues, je reviens à l'équation différentielle partielle qui nous occupe ici, savoir :

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right] = U.$$

La fonction S, comme elle a été définie plus haut, quand on y ajoute une constante arbitraire, en est une solution complète. Mais puisqu'il y a un nombre infini de solutions complètes, des formes les plus différentes, de la même équation différentielle partielle, il est clair que la fonction S n'est pas encore déterminée par l'équation différentielle partielle à laquelle elle satisfait. Cependant le système des $3n$ équations différentielles ordinaires du mouvement est complétement remplacé par cette seule équation différentielle partielle; car on peut facilement démontrer qu'une quelconque de ses solutions complètes, suffit pour en déduire toutes les équations intégrales du mouvement.

En effet, soit S une solution complète quelconque de l'équation différentielle partielle

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right] = U.$$

Puisque le nombre des variables indépendantes est ici $3n+1$, ces variables étant le temps t et les $3n$ coordonnées, la solution complète doit contenir $3n+1$ constantes arbitraires ; et l'on peut toujours supposer une de ces constantes combinée avec S par simple addition. Soient α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$, les $3n$ autres, et β_1, $\beta_2, \ldots \beta_{3n}$, d'autres constantes arbitraires. Je vais démontrer que les $3n$ équations finies suivantes, entre les $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i, et le temps t, savoir

$$\frac{dS}{d\alpha_1} = \beta_1,\ \frac{dS}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \frac{dS}{d\alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

satisfont toujours au système donné d'équations différentielles ordinaires, savoir

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i},\ m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i},\ m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i}.$$

En effet, si l'on différentie les équations finies données, les constantes arbitraires β_1, β_2, ... β_{3n}, disparaîtront immédiatement, et l'on aura les $3n$ équations

$$\begin{aligned}
o &= \frac{d \cdot \frac{dS}{d\alpha_1}}{dt} = \frac{d^2S}{d\alpha_1 dt} + \Sigma\left(\frac{d^2S}{d\alpha_1 dx_i} x_i' + \frac{d^2S}{d\alpha_1 dy_i} y_i' + \frac{d^2S}{d\alpha_1 dz_i} z_i'\right),\\
o &= \frac{d \cdot \frac{dS}{d\alpha_2}}{dt} = \frac{d^2S}{d\alpha_2 dt} + \Sigma\left(\frac{d^2S}{d\alpha_2 dx_i} x_i' + \frac{d^2S}{d\alpha_2 dy_i} y_i' + \frac{d^2S}{d\alpha_2 dz_i} z_i'\right),\\
o &= \frac{d \cdot \frac{dS}{d\alpha_{3n}}}{dt} = \frac{d S}{d\alpha_{3n} dt} + \Sigma\left(\frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dx_i} x_i' + \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dy_i} y_i' + \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dz_i} z_i'\right),
\end{aligned}$$

au moyen desquelles on déterminera les valeurs de x_i', y_i', z_i'. Mais si l'on compare ces $3n$ équations avec les $3n$ équations identiques suivantes, qui se déduisent de l'équation donnée

$$U = \frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right],$$

par la différentiation partielle par rapport à α_1, α_2, ... α_{3n}, savoir

$$\begin{aligned}
o &= \frac{d^2S}{d\alpha_1 dt} + \Sigma \frac{1}{m}\left(\frac{d^2S}{d\alpha_1 dx_i} \cdot \frac{dS}{dx_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_1 dy_i} \cdot \frac{dS}{dy_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_1 dz_i} \cdot \frac{dS}{dz_i}\right),\\
o &= \frac{d^2S}{d\alpha_2 dt} + \Sigma \frac{1}{m}\left(\frac{d^2S}{d\alpha_2 dx_i} \cdot \frac{dS}{dx_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_2 dy_i} \cdot \frac{dS}{dy_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_2 dz_i} \cdot \frac{dS}{dz_i}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
o &= \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dt} + \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dx_i} \cdot \frac{dS}{dx_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dy_i} \cdot \frac{dS}{dy_i} + \frac{d^2S}{d\alpha_{3n} dz_i} \cdot \frac{dS}{dz_i}\right),
\end{aligned}$$

on voit immédiatement que les valeurs cherchées de x'_i, y'_i, z'_i, qui doivent satisfaire aux équations précédentes, sont

$$x'_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_i}\frac{dS}{dx_i},\quad y'_i = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_i}\frac{dS}{dy_i},\quad z'_i = \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_i}\frac{dS}{dz_i}.$$

En différentiant encore une fois ces expressions, on aura

$$\begin{aligned}
m_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\left(\frac{d^2S}{dx_idx_k}x'_k + \frac{d^2S}{dx_idy_k}y'_k + \frac{d^2S}{dx_idz_k}z'_k\right) + \frac{d^2S}{dx_idt},\\
m_i\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\left(\frac{d^2S}{dy_idx_k}x'_k + \frac{d^2S}{dy_idy_k}y'_k + \frac{d^2S}{dy_idz_k}z'_k\right) + \frac{d^2S}{dy_idt},\\
m_i\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\left(\frac{d^2S}{dz_idx_k}x'_k + \frac{d^2S}{dz_idy_k}y'_k + \frac{d^2S}{dz_idz_k}z'_k\right) + \frac{d^2S}{dz_idt},
\end{aligned}$$

où l'on doit substituer pour k les valeurs $1, 2, \ldots n$, dans les sommes des seconds membres, tandis que i demeure invariable. Si l'on met dans ces équations pour x'_k, y'_k, z'_k, les valeurs trouvées ci-dessus, elles se changent dans les suivantes :

$$\begin{aligned}
m_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{dt^2} &= \Sigma\frac{1}{m_k}\left(\frac{d^2S}{dx_idx_k}\frac{dS}{dx_k} + \frac{d^2S}{dx_idy_k}\frac{dS}{dy_k} + \frac{d^2S}{dx_idz_k}\cdot\frac{dS}{dz_k}\right) + \frac{d^2S}{dx_idt},\\
m_i\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\frac{1}{m_k}\left(\frac{d^2S}{dy_idx_k}\frac{dS}{dx_k} + \frac{d^2S}{dy_idy_k}\frac{dS}{dy_k} + \frac{d^2S}{dy_idz_k}\cdot\frac{dS}{dz_k}\right) + \frac{d^2S}{dy_idt},\\
m_i\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma\frac{1}{m_k}\left(\frac{d^2S}{dz_idx_k}\frac{dS}{dx_k} + \frac{d^2S}{dz_idy_k}\frac{dS}{dy_k} + \frac{d^2S}{dz_idz_k}\cdot\frac{dS}{dz_k}\right) + \frac{d^2S}{dz_idt}.
\end{aligned}$$

Mais les seconds membres sont les coefficients différentiels partiels de l'expression

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\left(\frac{dS}{dx_k}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_k}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_k}\right)^2\right] + \frac{dS}{dt},$$

pris par rapport à x_i, y_i, z_i. Par suite il vient

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{dU}{dx_i},\quad m_i\frac{\mathrm{d}^2y_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{dU}{dy_i},\quad m_i\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{dU}{dz_i},$$

ce qui est précisément le système donné des équations différentielles ordinaires. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME.

Soient les $3n$ équations différentielles du second ordre

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i},$$

les équations différentielles du mouvement d'un système libre de n points matériels; où U est une fonction donnée des $3n$ coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n$ et du temps t, et où i doit prendre successivement toutes les valeurs $1, 2, \ldots n$. Soit S une intégrale complète quelconque de l'équation différentielle partielle,

$$U = \frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right],$$

laquelle intégrale contiendra d'abord une constante arbitraire combinée avec S par la seule addition, et puis encore $3n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$: alors les intégrales complètes et finies des $3n$ équations différentielles ordinaires du second ordre, avec $6n$ constantes arbitraires, sont

$$\frac{dS}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dS}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \frac{dS}{d\alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

où les quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n}$, sont $3n$ nouvelles constantes arbitraires : et les composantes des vitesses suivant les axes des coordonnées sont

$$x'_i = \frac{1}{m_i}\frac{dS}{dx_i}, \quad y'_i = \frac{1}{m_i}\frac{dS}{dy_i}, \quad z'_i = \frac{1}{m_i}\frac{dS}{dz_i}.$$

IV.

La fonction S telle qu'elle a été définie au commencement, est une des solutions complètes de l'équation différentielle partielle considérée dans ce qui précède; et de plus c'est une fonction où les $3n$ constantes arbitraires que contient S sont précisément les valeurs initiales des $3n$ quantités x_i, y_i, z_i, que nous avons désignées par a_i, b_i, c_i.

M. Hamilton donne, pour le cas le plus fréquent, qui est le seul qu'il ait considéré, savoir celui où la fonction des forces ne contient pas le temps explicitement, une autre équation différentielle partielle du premier ordre à laquelle cette fonction S doit satisfaire. La loi des forces vives a lieu dans ce cas; on peut la représenter par l'équation

$$U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2),$$

où a_i', b_i', c_i', sont les valeurs initiales de x_i', y_i', z_i', et où U_0 désigne la valeur de U en y mettant au lieu de x_i, y_i, z_i, leurs valeurs initiales a_i, b_i, c_i. Mais

$$\frac{dS}{dt} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Il viendra donc, si la loi des forces vives a lieu,

$$\frac{dS}{dt} = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2).$$

Or on a, pour la forme que M. Hamilton a supposée à la fonction S, les équations

$$m_i a_i' = -\frac{dS}{da_i}, \quad m_i b_i' = -\frac{dS}{db_i}, \quad m_i c_i' = -\frac{dS}{dc_i},$$

en vertu desquelles l'équation précédente se change en celle-ci

$$\frac{dS}{dt} = U_0 - \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{da_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{db_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dc_i}\right)^2\right].$$

C'est la seconde équation différentielle partielle à laquelle la fonction S de M. Hamilton satisfait, et par laquelle elle se distingue de toutes les autres solutions complètes de la première. Mais nous avons vu que chaque solution complète de cette première est tout-à-fait suffisante pour trouver toutes les intégrales complètes des équations différentielles données du mouvement.

Je ne conçois donc pas pourquoi M. Hamilton, pour pouvoir donner les intégrales complètes des équations différentielles proposées, croit nécessaire de pouvoir trouver une fonction S de $6n + 1$

variables, savoir des quantités x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, et du temps t, qui satisfasse en même temps aux deux équations différentielles partielles du premier ordre,

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right] = U,$$
$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{da_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{db_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dc_i}\right)^2\right] = U_\circ,$$

tandis qu'il suffit, comme nous l'avons vu, de connaître une fonction quelconque des $3n+1$ quantités t, x_i, y_i, z_i, qui satisfasse à la seule équation

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2\right] = U,$$

et contienne une constante arbitraire combinée avec elle par addition, et $3n$ autres constantes arbitraires. M. Hamilton me paraît par cela même avoir présenté sa belle découverte sous un faux jour, ce qui la complique et la limite inutilement. Sa théorie, telle qu'il l'a énoncée, a aussi l'inconvénient d'être obscure quand on n'en a pas la démonstration sous les yeux; car on ne peut définir une fonction par deux équations différentielles partielles, sans d'abord démontrer qu'une telle fonction est réellement possible. Par le choix qu'il a fait de la fonction particulière S, les constantes arbitraires deviennent les valeurs initiales des coordonnées et des composantes des vitesses, suivant les axes des coordonnées; mais cela n'est pas un avantage, puisque l'introduction de ces constantes rend ordinairement les équations intégrales plus compliquées, et puisqu'on peut ramener à cette forme les équations intégrales de toute autre forme. C'est peut-être pour avoir toujours considéré à la fois deux équations différentielles partielles, que M. Hamilton n'a pas appliqué à son théorème les règles générales que Lagrange donne dans ses leçons sur le calcul des fonctions pour l'intégration d'une équation différentielle partielle non linéaire du premier ordre entre trois variables; et par cette raison, comme je le montrerai dans un autre mémoire, des résultats du plus grand intérêt pour la mécanique lui ont échappé.

Enfin la condition que la fonction S, après avoir satisfait à la première équation différentielle partielle, satisfasse encore à la seconde, amène une restriction en ce qu'elle exclut le cas où la fonction des forces U contient aussi le temps explicitement: pour ce cas, en effet, la seconde équation différentielle partielle n'a plus lieu.

V.

On peut donner des formes différentes à l'équation différentielle partielle du premier ordre par laquelle on a remplacé les équations différentielles du mouvement, en prenant d'une part une autre fonction, au lieu de celle que l'on doit chercher, et d'autre part en changeant les variables. M. Hamilton en a donné plusieurs exemples: je n'en développerai qu'un seul, les autres paraissant ne pas présenter un intérêt aussi grand.

Soit

$$\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \mathrm{U} = \mathrm{H}.$$

Quand U ne contient pas t explicitement, c'est-à-dire quand la loi des forces vives a lieu, on a

$$\mathrm{H} = h,$$

où h est une constante. Supposons que la fonction S soit déterminée d'après la définition donnée par M. Hamilton, et qu'on ajoute $\frac{d\mathrm{S}}{dt}\,dt$, à la valeur précédemment trouvée de $d'\mathrm{S}$, afin de former la différentielle complète de S prise en donnant à toutes les $6n+1$ quantités qu'elle contient, des incréments infiniment petits et indépendants entre eux. Puisque nous avons trouvé

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = -\mathrm{H},$$

on aura pour la variation complète de S,

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{S} = -\mathrm{H}\delta t &+ \Sigma m_i(x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i)\\ &- \Sigma m_i(a_i'\delta a + b_i'\delta b + c_i'\delta c).\end{aligned}$$

En posant $V = S + Ht$, il viendra

$$\delta V = t\delta H + \Sigma m_i (x'_i \delta x_i + y'_i \delta y_i + z'_i \delta z_i) - \Sigma m_i (a'_i \delta a + b'_i \delta b + c'_i \delta c).$$

Si l'on élimine t de la quantité S au moyen de l'équation

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m} \left[\left(\frac{dS}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz_i}\right)^2 \right] - U = H,$$

S et par conséquent V deviendra une fonction de H, et des $6n$ quantités $x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i$; et l'équation précédente donnera la valeur de δV exprimée par les variations de ces $6n + 1$ quantités. Donc, si l'on considère V comme fonction de H, des coordonnées x_i, y_i, z_i, et de leurs valeurs initiales a_i, b_i, c_i, les coefficients différentiels partiels par rapport à ces quantités, seront

$$\frac{dV}{dH} = t,$$

$$\frac{dV}{dx_i} = m_i x'_i, \quad \frac{dV}{da_i} = - m_i a'_i,$$

$$\frac{dV}{dy_i} = m_i y'_i, \quad \frac{dV}{b} = - m_i b'_i,$$

$$\frac{dV}{dz_i} = m_i z'_i, \quad \frac{dV}{dc_i} = - m_i c'.$$

Ces valeurs donnent l'équation différentielle partielle

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2 \right] = U + H,$$

où l'on doit mettre dans la quantité U, au lieu de t, la différentielle partielle $\frac{dV}{dH}$, si U contient t explicitement. Mais quand U ne contient pas t explicitement, ce qui est le cas ordinaire, et qu'elle n'est qu'une fonction des coordonnées, l'équation différentielle partielle ne contient point la différentielle partielle de V par rapport à H; c'est pourquoi dans l'intégration H est regardée comme une constante.

Quand U ne contient pas t explicitement, et par conséquent quand H est une constante, on aura, en prenant pour S la même fonction que M. Hamilton a prise,

$$V = S + Ht = \int_0^t [H + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) + U]dt:$$

puisque $H = \frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - U$, cela fournit

$$V = \int_0^t \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\,dt = 2Ht + 2\int_0^t Udt.$$

Dans le même cas, où H est une constante, on a aussi pour $t = 0$,

$$\frac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2) = U_0 + H,$$

ou

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dV}{da_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{db_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dc_i}\right)^2\right] = U_0 + H;$$

c'est une seconde équation différentielle partielle, à laquelle la fonction U doit satisfaire.

M. Hamilton définit la fonction V par ces deux équations différentielles partielles; mais pour trouver les intégrales complètes des équations différentielles du mouvement, il est tout-à-fait suffisant de connaître une intégrale complète V de la première équation différentielle partielle.

En effet, si U contient la quantité t explicitement, considérons une solution complète quelconque de l'équation différentielle partielle

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2\right] = U + H.$$

où l'on doit mettre dans U, au lieu de t, sa valeur $\frac{dV}{dH}$.

Une telle solution contiendra une constante combinée avec V par addition, et $3n$ autres constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$, puisqu'il y a ici $3n + 1$ variables indépendantes. Les $3n$ intégrales complètes et finies du système des $3n$ équations différentielles ordinaires du second ordre

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i},$$

avec $6n$ constantes arbitraires, deviennent alors

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dV}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \quad \frac{dV}{d\alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n}$, sont les $3n$ nouvelles constantes arbitraires. Les $3n$ intégrales intermédiaires, avec $3n$ constantes arbitraires, deviendront

$$\frac{dV}{dx_i} = m_i x'_i, \quad \frac{dV}{dy_i} = m_i y'_i, \quad \frac{dV}{dz_i} = m_i z'_i.$$

On peut remplacer la quantité H dans ces équations par t, en vertu de l'équation

$$\frac{dV}{dH} = t.$$

La démonstration est la même que pour la fonction S.

Mais quand la fonction U ne contient pas t explicitement, l'équation différentielle partielle contient une variable indépendante de moins, parce que H devient dans ce cas une constante h. Les constantes arbitraires, dans une solution complète, se composent alors d'une constante combinée avec V par addition, et de $3n - 1$, autres que nous désignerons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}$. Les $3n$ équations intégrales complètes et finies du mouvement sont, dans ce cas,

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dV}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \quad \frac{dV}{d\alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1},$$

auxquelles on doit encore ajouter l'équation

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau :$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n-1}, \tau$, sont $3n$ nouvelles constantes arbitraires, de manière qu'on trouve encore ici $6n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n-1}, h, \tau$; enfin les $3n$ équations intermédiaires conservent la forme

$$\frac{dV}{dx_i} = m_i x'_i, \quad \frac{dV}{dy_i} = m_i y'_i, \quad \frac{dV}{dz_i} = m_i z'_i.$$

La démonstration, qui a dû être un peu modifiée ici, est la suivante.

La différentiation des équations

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dV}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \quad \frac{dV}{d\alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1},$$

donne les $3n - 1$ équations suivantes

$$\Sigma \left(\frac{d^2V}{d\alpha_1 dx_i} x_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_1 dy_i} y_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_1 dz_i} z_i'\right) = 0,$$

$$\Sigma \left(\frac{d^2V}{d\alpha_2 dx_i} x_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_2 dy_i} y_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_2 dz_i} z_i'\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma \left(\frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dx_i} x_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dy_i} y_i' + \frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dz_i} z_i'\right) = 0,$$

qui déterminent les rapports des $3n$ quantités x_i', y_i', z_i', puisqu'elles ne contiennent point de terme qui ne soit multiplié par une de ces quantités. Si l'on différentie l'équation différentielle partielle donnée, savoir

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2\right] = U + h,$$

par rapport à α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}$, on aura les $3n - 1$ équations

$$\Sigma \frac{1}{m} \left(\frac{d^2V}{d\alpha_1 dx_i} \cdot \frac{dV}{dx_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_1 dy_i} \cdot \frac{dV}{dy_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_1 dz_i} \cdot \frac{dV}{dz_i}\right) = 0,$$

$$\Sigma \frac{1}{m_i} \left(\frac{d^2V}{d\alpha_2 dx_i} \cdot \frac{dV}{dx_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_2 dy_i} \cdot \frac{dV}{dy_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_2 dz_i} \cdot \frac{dV}{dz_i}\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma \frac{1}{m_i} \left(\frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dx_i} \cdot \frac{dV}{dx_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dy_i} \cdot \frac{dV}{dy_i} + \frac{d^2V}{d\alpha_{3n-1} dz_i} \cdot \frac{dV}{dz_i}\right) = 0.$$

En comparant ces $3n - 1$ équations avec les $3n - 1$ équations précédentes, on voit d'abord que les $3n$ quantités x_i', y_i', z_i', sont entre elles comme $\frac{dV}{m_i dx_i}$, $\frac{dV}{m_i dy_i}$, $\frac{dV}{m_i dz_i}$. Si de plus on différentie l'équation

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau,$$

on aura

$$\Sigma \left(\frac{d^2V}{dhdx_i} x_i' + \frac{d^2V}{dhdy_i} y_i' + \frac{d^2V}{dhdz_i} z_i' \right) = 1 ;$$

et en différentiant par rapport à h seulement l'équation différentielle partielle donnée, on trouve

$$\Sigma \frac{1}{m_i} \left(\frac{d^2V}{dhdx_i} \frac{dV}{dx_i} + \frac{d^2V}{dhdy_i} \frac{dV}{dy_i} + \frac{d^2V}{dhdz_i} \frac{dV}{dz_i} \right) = 1.$$

Si l'on compare ces deux équations ensemble, et qu'on se rappelle que les quantités x_i', y_i', z_i', sont respectivement proportionnelles à $\frac{1}{m_i} \frac{dV}{dx_i}$, $\frac{1}{m_i} \frac{dV}{dy_i}$, $\frac{1}{m_i} \frac{dV}{dz_i}$, on voit qu'elles leur sont respectivement égales, ce qui donne les $3n$ équations

$$x_i' = \frac{1}{m_i} \frac{dV}{dx_i}, \quad y_i' = \frac{1}{m_i} \frac{dV}{dy_i}, \quad z_i' = \frac{1}{m_i} \frac{dV}{dz_i}.$$

En différentiant de nouveau, et substituant dans les différentielles pour x_i', y_i', z_i', ces valeurs, il vient

$$\begin{aligned}
m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} &= \Sigma \frac{1}{m_k} \left(\frac{d^2V}{dx_idx_k} \frac{dV}{dx_k} + \frac{d^2V}{dx_idy_k} \frac{dV}{dy_k} + \frac{d^2V}{dx_idz_k} \cdot \frac{dV}{dz_k} \right), \\
m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} &= \Sigma \frac{1}{m_k} \left(\frac{d^2V}{dy_idx_k} \frac{dV}{dx_k} + \frac{d^2V}{dy_idy_k} \frac{dV}{dy_k} + \frac{d^2V}{dy_idz_k} , \frac{dV}{dz_k} \right), \\
m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} &= \Sigma \frac{1}{m_k} \left(\frac{d^2V}{dz_idx_k} \frac{dV}{dx_k} + \frac{d^2V}{dz_idy_k} \frac{dV}{dy_k} + \frac{d^2V}{dz_idz_k} \cdot \frac{dV}{dz_k} \right),
\end{aligned}$$

où i reste invariable tandis que k prend les valeurs $1, 2, \ldots n$. Les seconds membres sont ici les coefficients différentiels partiels de l'expression

$$\Sigma \frac{1}{m_k} \left[\left(\frac{dV}{dx_k} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy_k} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz_k} \right)^2 \right] = U + h,$$

pris par rapport à x_i, y_i, z_i. On a donc

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i};$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Dans les applications, la fonction S paraît être principalement utile quand la fonction des forces U contient t explicitement. Au contraire la fonction V et l'introduction de la quantité H au lieu du temps t sont d'un grand avantage dans le cas plus fréquent où U est fonction des coordonnées seules : car puisque H est une constante dans ce dernier cas, en vertu de la loi des forces vives, l'équation différentielle partielle contient une variable et la solution complète que l'on cherche une constante arbitraire de moins. La fonction V dont M. Hamilton fait usage, pour trouver les équations intégrales complètes du mouvement, et qui doit satisfaire en même temps à deux équations différentielles partielles du premier ordre, a donc le grave inconvénient de contenir une quantité de plus qu'il n'est nécessaire : elle dépend en effet de h, des $3n$ coordonnées et de leurs $3n$ valeurs initiales, tandis qu'il suffit d'avoir une solution d'une seule équation différentielle partielle qui contienne h, les $3n$ coordonnées, et $3n - 1$ constantes arbitraires.

VI.

Si la fonction des forces ne contient pas explicitement le temps t, on peut facilement chasser la quantité t des équations différentielles du mouvement, en les remplaçant par un système de $6n - 1$ équations différentielles du premier ordre, entre les $6n$ variables $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$. En effet, si l'on désigne par $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$, les coordonnées des n points et par $q'_1, q'_2, \ldots q'_{3n}$, les produits respectifs de leurs masses par les projections de leurs vitesses sur les axes des coordonnées, on pourra représenter les équations différentielles du mouvement, savoir

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{dU}{dy_i}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{dU}{dz_i},$$

par la proportion

$$dq_1 : dq_2 \ldots dq_{3n} : dq'_1 : dq'_2 \ldots dq'_{3n} =$$
$$\frac{1}{\mu_1} q'_1 : \frac{1}{\mu_2} q'_2 \ldots \frac{1}{\mu_{3n}} q'_{3n} : \frac{dU}{dq_1} : \frac{dU}{dq_2} \ldots : \frac{dU}{dq_{3n}}.$$

Les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{3n}$, se divisent en n groupes de trois quantités chacun, et dans un groupe quelconque, chaque quantité μ est égale à la masse du point auquel le groupe répond. Cette proportion remplace $6n - 1$ équations; mais le nombre de ces équations, comme celui des variables, peut être diminué d'une unité en éliminant une des variables par l'équation des forces vives, qui a lieu dans le cas présent et qui peut être écrite ainsi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1}q_1'^2 + \frac{1}{\mu_2}q_2'^2 + \ldots + \frac{1}{\mu_{3n}}q_{3n}'^2\right) = \mathrm{U} + h.$$

Si l'on a complétement intégré ces équations, et qu'on ait de cette manière exprimé les $6n$ variables $q_1, q_2, \ldots q_{3n}, q_1', q_2', \ldots q_{3n}'$, en fonction d'une d'entre elles, de q_1 par exemple, on aura le temps par une quadrature au moyen de l'équation

$$dt = \mu_1 \frac{dq_1}{q'_1}, \quad t = \mu_1 \int \frac{dq_1}{q'_1}.$$

Pour trouver la fonction V donnée par M. Hamilton, il n'est pas nécessaire d'effectuer cette quadrature, mais on l'obtient immédiatement par une quadrature sans connaître t, si l'on a exprimé les $6n$ variables $q_1, q_2, q_{3n}, q'_1, q'_2, \ldots q'_{3n}$, en fonction d'une d'entre elles. En effet, on peut exprimer la fonction

$$\mathrm{V} = \int_0^t \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)dt = \int_0^t \left(\frac{1}{\mu_1}q_1'^2 + \frac{1}{\mu_2}q_2'^2 + \ldots + \frac{1}{\mu_{3n}}q_{3}'^2\right)dt,$$

par l'équation

$$\mathrm{V} = \int (q'_1 dq_1 + q'_2 dq_2 + \ldots + q'_{3n} dq_{3n}),$$

de laquelle t est entièrement sorti.

Si $q_1^{(0)}$ désigne la valeur de q_1 pour $t = 0$, de sorte que.... $t = \int_{q_1^{(0)}}^{q} \mu_1 \frac{dq_1}{q_1'}$, il faudra que l'intégrale V s'évanouisse pour... $q_1 = q_1^{(0)}$.

L'intégrale qui exprime la valeur de t est la différentielle partielle prise par rapport à h de l'intégrale qui exprime la valeur de V, comme on le voit par l'équation $\frac{d\mathrm{V}}{dh} = t$. On arrive ordinairement à une intégrale nouvelle en différentiant ainsi une intégrale par rapport à une constante. Mais il y a un cas très remarquable qui se présente dans l'astronomie physique, où les deux intégrales t et V peuvent être ramenées immédiatement l'une à l'autre.

C'est le cas où la fonction des forces est une fonction *homogène* des coordonnées.

Supposons que la fonction des forces U soit une fonction homogène du degré ε des $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i: alors on aura

$$\Sigma\left(x_i\frac{dU}{dx_i}+y_i\frac{dU}{dy_i}+z_i\frac{dU}{dz_i}\right)=\varepsilon U.$$

Donc, à cause des équations différentielles du mouvement,

$$\Sigma m_i\left(x_i\frac{d^2x_i}{dt^2}+y_i\frac{d^2y_i}{dt^2}+z_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)=\varepsilon U.$$

Le premier membre devient une différentielle exacte en y ajoutant la force vive

$$\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_i}{dt}+\frac{dy_i}{dt}\frac{dy_i}{dt}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{dz_i}{dt}\right)=2U+2h.$$

En intégrant ensuite par rapport à t et à partir de $t=0$, il vient

$$\Sigma m_i(x_ix_i'+y_iy_i'+z_iz_i')-\Sigma m_i(a_ia_i'+b_ib_i'+c_ic_i')=(2+\varepsilon)\int_0^t Udt+2ht.$$

Mais on a aussi

$$V=\int_0^t\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)\,dt=2\int_0^t Udt+2ht:$$

donc

$$\Sigma m_i(x_ix_i'+y_iy_i'+z_iz_i')-\Sigma m_i(a_ia_i'+b_ib_i'+c_ic_i')=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)V-\varepsilon ht.$$

C'est l'équation qui lie entre elles les fonctions V et t. Puisque le premier membre de cette équation est une différentielle exacte, on pourra trouver l'intégrale $\int Vdt$.

Si l'on pose

$$R = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \quad R' = \frac{dR}{dt},$$

et que l'on appelle R_0, R'_0, les valeurs initiales de R, R', on peut écrire l'équation précédente de cette manière

$$R' - R_0' = (2 + \varepsilon) V - 2\varepsilon ht:$$

et l'on en tire en intégrant

$$R - R_0 - R_0' t = (2 + \varepsilon) \int_0^t V dt - \varepsilon ht^2.$$

Dans le cas du système du monde, la fonction des forces U est du degré -1, et par conséquent $\varepsilon = -1$. On a donc alors

$$R' - R_0' = V + 2ht.$$

Quand la fonction des forces est du degré -2, c'est-à-dire quand $\varepsilon = -2$, on ne peut plus se servir des formules précédentes pour ramener la fonction V à la fonction t, parce que le terme multiplié par V s'évanouit. Mais dans ce cas on a deux nouvelles intégrales des équations différentielles du mouvement, savoir

$$R' - R_0' = 4ht, \quad R - R_0 - R_0' t = 2ht^2,$$

qui contiennent deux constantes arbitraires R_0, R_0'. C'est le cas d'un système de points matériels assujétis à des attractions mutuelles qui s'exercent en raison inverse du cube des distances.

Si l'on met pour t sa valeur

$$t = \frac{dV}{dh},$$

on aura d'après les formules précédentes

$$R' - R_0' = (2 + \varepsilon) V - 2\varepsilon h \frac{dV}{dh}:$$

De là on déduit, en intégrant par rapport à h,

$$\int h^{-\frac{2+3\varepsilon}{2\varepsilon}}(R'-R_0')\,dh = -2\varepsilon h^{-\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}}V + k,$$

équation où k est une quantité indépendante de h.

Si donc on connaît V pour une valeur particulière de h, par exemple pour $h=0$, on pourra trouver V en intégrant par rapport à h. Pour $\varepsilon=-1$, la formule précédente deviendra

$$\int (R'-R_0')\frac{h}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{h}.V + k;$$

$R'-R_0'$ doit être exprimée en fonction de h et des valeurs initiales et finales des coordonnées, mais en intégrant on doit regarder h comme seule variable.

Je ferai encore à cette occasion les remarques suivantes. On déduit des formules précédentes la différentielle du second ordre de R par rapport au temps, exprimée par la fonction des forces, au moyen de l'équation

$$\frac{1}{2}\frac{d^2R}{dt^2} = (2+\varepsilon)U + 2h.$$

Pour $\varepsilon = -1$, cette équation se réduit à

$$\frac{1}{2}\frac{d^2R}{dt^2} = U + 2h.$$

Maintenant si M désigne la somme des masses, et X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité, c'est-à-dire si

$$MX = \Sigma m_i x_i,\quad MY = \Sigma m_i y_i,\quad MZ = \Sigma m_i z_i,$$

on pourra, d'après une transformation algébrique connue, et souvent employée par Lagrange, exprimer la quantité MR de la manière suivante :

$$\begin{aligned}MR &= \Sigma m_i \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\\ &= \Sigma m_i m_k[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2] + M^2(X^2 + Y^2 + Z^2),\end{aligned}$$

c'est-à-dire (en nommant $r_{i,k}$ la distance des masses m_i, m_k)

$$MR = \Sigma m_i m_k r_{i,k}^2 + M^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

où l'on doit étendre la somme Σ à tous les groupes de deux points dans le système. Le centre de gravité d'un système de corps assujétis seulement à leurs attractions mutuelles se meut en ligne droite d'une manière uniforme, en sorte que l'on a

$$X = \alpha t + \beta, \quad Y = \alpha' t + \beta', \quad Z = \alpha'' t + \beta''.$$

Au moyen de la transformation donnée de mR et en faisant

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2,$$

on trouve donc pour le cas de $\varepsilon = -1$,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Sigma\, m_i m_k r_{i,k}^2}{dt^2} = \text{MU} + 2 \quad - \text{M}^2\gamma^2,$$

où γ est la vitesse du centre de gravité. Si l'on substitue l'expression de la fonction des forces U qui a lieu dans la loi d'attraction de Newton, il viendra

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{\text{M}dt^2} = \Sigma \frac{m_i m_k}{r_{i,k}} + 2h - \text{M}\gamma^2.$$

Mais, par la loi des forces vives,

$$\Sigma m_i \,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - 2\Sigma \frac{m_i m_k}{r_{i,k}} = 2h :$$

on a donc l'équation

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{\text{M}dt^2} = \Sigma\, m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \text{M}\gamma^2 - \Sigma \frac{m_i m_k}{r_{i,k}}.$$

L'expression

$$\frac{1}{\text{M}} \Sigma m_i m_k r_{i,k}^2 = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \text{M}(\text{X}^2 + \text{Y}^2 + \text{Z}^2)$$

est égale à la somme des masses du système multipliées respectivement par les carrés de leurs distances au centre de gravité. On le prouve par l'équation même que nous venons d'écrire, en y prenant le centre de gravité pour origine des coordonnées, ce qui fait $\text{X} = \text{Y} = \text{Z} = 0$. On prouve semblablement que

$$\Sigma m_i \,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \text{M}\gamma^2$$

est la force vive relative au centre de gravité, c'est-à-dire la somme des masses du système multipliées respectivement par les carrés de leurs vitesses autour de son centre de gravité. Si le système est stable, l'expression

$$\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2$$

ne doit devenir ni l'infini ni o, lorsque t croît indéfiniment. D'où il suit facilement que sa différentielle du second ordre ne doit jamais conserver constamment le même signe à partir d'un temps quelconque. Les deux équations

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{\mathrm{M}dt^2} = \Sigma\,\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} + 2h - \mathrm{M}\gamma^2,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{\mathrm{M}dt^2} = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \mathrm{M}\gamma^2 - \Sigma\,\frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

montrent donc que, pour que le mouvement autour du centre de gravité du système soit stable: 1° la constante $2h - \mathrm{M}\gamma^2$ doit être négative; à cause de l'équation

$$2h - \mathrm{M}\gamma^2 = \Sigma m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \mathrm{M}\gamma^2 - 2\,\Sigma\,\frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

cela revient à dire que la force vive relative au centre de gravité doit toujours rester plus petite que le double de la fonction des forces; 2° la force vive relative au centre de gravité doit être alternativement plus grande et plus petite que la fonction des forces; 3° la fonction des forces, de même que la force vive relative, doit être alternativement plus grande et plus petite que la constante $\mathrm{M}\gamma^2 - 2h$.

Développons la force vive et la fonction des forces en séries de cosinus et sinus d'angles proportionnels au temps: si le système est stable, la quantité $\mathrm{M}\gamma^2 - 2h$ doit être la vraie valeur du terme constant dans chaque série, car une valeur différente du terme constant donnerait dans l'expression de

$$\Sigma\; m_i m_k\; r_{i,k}^2$$

des termes multipliés par le carré du temps, et qui, par conséquent, croîtraient indéfiniment avec le temps.

VII.

Pour expliquer ce qui précède par un exemple, je donnerai la fonction V pour un cas très simple, le mouvement elliptique d'une planète. Puisqu'on connaît par le théorème de Lambert l'expression du temps écoulé t en fonction des valeurs initiales et finales des coordonnées, on pourra, par ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, trouver immédiatement la valeur de V sans une nouvelle intégration. Soit r le rayon vecteur, $r' = \frac{dr}{dt}$, E l'anomalie excentrique, r_0, r_0', E_0 les valeurs initiales de r, r', E; soit de plus k^2 la force attractive pour l'unité d'espace, e l'excentricité, a le demi grand axe. Si l'on prend comme M. Gauss (*Theoria motus*, page 120),

$$\frac{E - E_0}{2} = g, \quad \frac{E + E_0}{2} = G,$$

et qu'on introduise un angle auxiliaire h au moyen de l'équation

$$e \cos G = \cos h,$$

puis que l'on fasse

$$h + g = \varepsilon, \quad h - g = \varepsilon',$$

on aura pour l'expression du temps écoulé

$$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} t = \varepsilon - \sin \varepsilon - (\varepsilon' - \sin \varepsilon').$$

La loi des forces vives donne

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = k^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right),$$

de sorte que la constante h est ici $-\frac{k^2}{2a}$, et la fonction des forces U est ici $\frac{k^2}{r}$. Donc si l'on met dans la formule du paragraphe précédent

$$R' - R'_0 = V + 2ht$$

pour R et h leurs valeurs, savoir,

$$R = r^2, \quad h = -\frac{k^2}{2a},$$

on aura

$$V = 2(rr' - r_0 r_0') + \frac{k^2}{a} t.$$

J'ai négligé ici dans les expressions de V, R, h, la masse de la planète attirée, parce qu'elle est facteur de ces trois quantités, et par conséquent disparaît du calcul.

Les formules connues du mouvement elliptique donnent

$$rz' = k\sqrt{a}.\ e \sin E,$$

donc

$$rr' - r_0 r_0' = k\sqrt{a}.\ e(\sin E - \sin E_0)$$

$$= Rk\sqrt{a}.e \sin g \cos G = 2k\sqrt{a} \sin g \cos h = k\sqrt{a}(\sin \varepsilon - \sin \varepsilon').$$

En se servant de cette expression et de l'expression du temps t donnée par Lambert, on aura pour V une expression semblable à celle de t, savoir

$$V = k\sqrt{a}\,[\varepsilon + \sin \varepsilon - (\varepsilon' + \sin \varepsilon')],$$

qui ne diffère de $\frac{k^2}{a} t$ que par le signe des sinus. Si l'on désigne par ρ la corde de l'arc qui unit les points initial et final, on aura, d'après les formules données par M. Gauss à l'endroit cité,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r + r_0 + \rho}{4a}, \quad \sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r + r_0 - \rho}{4a},$$

ou

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$
$$\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Au moyen de ces formules, V aussi bien que t est exprimé par les coordonnées des points initial et final, et par le grand axe. L'expression donnée ici pour V coïncide avec celle trouvée par M. Hamilton par un autre procédé.

Si l'on fait varier dans l'expression donnée de V toutes les quantités à l'exception de k et a, on aura

$$\delta V = 2k\sqrt{a} \cos^2 \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon - \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon'\delta\varepsilon'\right)$$

Mais l'on a

$$\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon = \frac{\delta r + \delta r_0 + \delta\rho}{4a}, \quad \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon'.\cos \tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon' = \frac{\delta r + \delta r_0 - \delta\rho}{4a}.$$

Donc en considérant les équations

$$\cotang\frac{1}{2}\varepsilon - \cotang\frac{1}{2}\varepsilon' = -\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'} = -\frac{\sin g}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'},$$

$$\cotang\frac{1}{2}\varepsilon + \cotang\frac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'} = \frac{\sin h}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'},$$

on aura

$$\delta V = \frac{k\,[\sin h\delta\rho - \sin g\,(\delta r + \delta r_0)]}{2\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}.$$

On peut, en vertu des formules précédentes, mettre le dénominateur sous la forme

$$2\sqrt{a}.\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\sqrt{[(r+r_0)^2-\rho^2]}}{2\sqrt{a}}.$$

Si l'on introduit dans cette formule l'angle formé par les rayons vecteurs r et r_0, que nous appellerons avec M. Gauss $2f$, on aura

$$r^2 + r_0^2 - \rho^2 = 2rr_0\cos 2f,$$

d'où
$$2\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\cos f}{\sqrt{a}}\sqrt{rr_0};$$

Donc on a, pour la variation de V, l'équation

$$\delta.V = \frac{k\sqrt{a}\,[\sin h\delta\rho - \sin g(\delta\rho + \delta\rho_0)]}{\cos f\sqrt{rr_0}},$$

dans laquelle on peut remplacer un des angles g, h, par l'autre au moyen de l'équation

$$\rho = 2a\sin g\sin h,$$

qui se déduit facilement des formules précédentes. L'expression de la variation de V donne immédiatement les projections sur les axes des coordonnées des vitesses des points initial et final. En effet, si l'on exprime ρ, r, r_0, par les coordonnées, on trouve :

$$x' = \frac{dV}{dx} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{x-x_0}{\rho}\sin h - \frac{x}{r}\sin g\right),$$
$$y' = \frac{dV}{dy} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{y-y_0}{\rho}\sin h - \frac{y}{r}\sin g\right),$$

$$z' = \frac{dV}{dz} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{z - z_0}{\rho}\sin h - \frac{z}{r}\sin g\right),$$
$$x_0' = -\frac{dV}{dx_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{x - x_0}{\rho}\sin h + \frac{x_0}{r_0}\sin g\right),$$
$$y_0' = -\frac{dV}{dy_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{y - y_0}{\rho}\sin h + \frac{y_0}{r_0}\sin g\right),$$
$$z_0' = -\frac{dV}{dz_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left(\frac{z - z_0}{\rho}\sin h + \frac{z_0}{r_0}\sin g\right).$$

Si l'on appelle b le demi-petit axe, en se rappelant l'équation donnée par M. Gauss,

$$b \sin g = \sin f \sqrt{rr_0},$$

et que l'on fasse le demi-paramètre $\frac{b^2}{a} = p$, on déduira facilement de ces formules les suivantes :

$$x' - x_0' = -\frac{k \tan f}{\sqrt{p}}\left(\frac{x}{r} + \frac{x_0}{r_0}\right),$$
$$y' - y_0' = -\frac{k \tan f}{\sqrt{p}}\left(\frac{y}{r} + \frac{y_0}{r_0}\right),$$
$$z' - z_0' = -\frac{k \tan f}{\sqrt{p}}\left(\frac{z}{r} + \frac{z_0}{r_0}\right);$$

d'où après quelques réductions,

$$\sqrt{\left[(x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 (z' - z_0')^2\right]} = \frac{2k \sin f}{\sqrt{p}}.$$

J'ai ajouté ces formules à cause de leur simplicité. J'observe encore que les quantités $\frac{x}{r} + \frac{x_0}{r_0}$, $\frac{y}{r} + \frac{y_0}{r_0}$, $\frac{z}{r} + \frac{z_0}{r_0}$ sont égales à la quantité $2 \cos f$ multipliée par les cosinus des angles que la ligne qui divise en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs fait avec les axes des coordonnées.

On peut vérifier l'expression trouvée de V au moyen de l'équation

$$t = \frac{dV}{dh} = -\frac{dV}{d \cdot \frac{k^2}{2a}} = \frac{2a^2}{k^2} \cdot \frac{dV}{da}.$$

Si l'on prend la différentielle partielle, par rapport à a de l'expression

$$V = k\sqrt{a}\,[2 + \sin \varepsilon - (\varepsilon' + \sin \varepsilon')].$$

on aura l'équation

$$\frac{dV}{da} = 2k\sqrt{a}\left(\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{da} - \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon'\,\frac{d\varepsilon'}{da}\right) + \frac{1}{2a}\,V.$$

Mais on tire des équations

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r + r_0 + \varrho}{4a},\quad \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r + r_0 + \varrho}{4a},$$

celles-ci :

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{da} = -\frac{\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon}{a},\quad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon' d\varepsilon' = -\frac{\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon'}{a}.$$

L'équation précédente devient donc

$$\frac{dV}{da} = -\frac{k}{\sqrt{a}}(\sin\varepsilon - \sin\varepsilon') + \frac{V}{2a} = \frac{k}{2\sqrt{a}}\left[\varepsilon - \varepsilon' - (\sin\varepsilon - \sin\varepsilon')\right] = \frac{k^2}{2a}\,t,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

L'équation différentielle partielle, à l'intégration complète de laquelle on peut ramener le mouvement d'un système de points qui s'attirent mutuellement, et qui sont attirés vers des centres fixes, était

$$\frac{1}{2}\Sigma\,\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2\right] = U + h.$$

Il s'ensuit que pour notre exemple, l'équation différentielle partielle sur l'intégration de laquelle on ramène le mouvement d'une planète autour du soleil est

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] = k^2\left[\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} - \frac{1}{2a}\right] = k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right).$$

Je vais maintenant démontrer que l'expression donnée de V satisfait réellement à cette équation différentielle partielle. Car si l'on se rappelle les valeurs trouvées précédemment pour $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, et que l'on tienne compte des équations

$$x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0) = r_0 - rr_0\cos 2f,\quad \sin g \sin h = \frac{\varrho}{2a},$$

on aura

$$\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] = \frac{k^2u}{\cos^2 f \,.\, rr_0}\left(\sin^2 h + \sin^2 g - \frac{r - r_0\cos 2f}{a}\right).$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\sin^2 h + \sin^2 g &= 2\left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\varepsilon'}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &= 2\left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\right) - 4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin^2\frac{\varepsilon'}{2},\end{aligned}$$

ou d'après les formules précédemment données,

$$\sin^2 h + \sin^2 g = \frac{r + r_0}{a} - \frac{\cos^2 f \,.\, rr_0}{a^2}.$$

Donc

$$a(\sin^2 h + \sin^2 g) - (r - r_0 \cos 2f) = r_0 \cos^2 f \left(2 - \frac{r}{a}\right),$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] = k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right),$$

ce qui est l'équation cherchée. Nous voyons en même temps de cette manière que les valeurs données de x', y', z' satisfont à l'équation de la force vive.

Dans le mouvement parabolique, la constante, qui dans la loi de la conservation de la force vive, est ajoutée à la fonction des forces, disparaît, ou a devient ∞. Les angles ε, ε', h, g, deviennent des infiniment petits de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{a}}$. On déduit donc pour ce cas, des formules précédentes celles-ci

$$\sqrt{a} \,.\, \varepsilon = \sqrt{(r + r_0 + \rho)}, \quad \sqrt{a} \,.\, \varepsilon' = \sqrt{(r + r_0 - \rho)}:$$

puis

$$\sqrt{a^3} \,.\, (\varepsilon - \sin \varepsilon) = \frac{1}{5}\sqrt{a^3} \,.\, \varepsilon^3 = \frac{1}{6}(r + r_0 + \rho)^{\frac{3}{2}},$$

$$\sqrt{a^3} \,.\, (\varepsilon' - \sin \varepsilon') = \frac{1}{6}\sqrt{a^3} \,.\, \varepsilon'^3 = \frac{1}{6}(r + r_0 - \rho)^{\frac{3}{2}},$$

au moyen desquelles les expressions données de V et t prennent la forme

$$V = 2k\left[\sqrt{(r + r_0 + \rho)} - \sqrt{(r + r_0 - \rho)}\right],$$
$$t = \frac{1}{6k}\left[(r + r_0 + \rho)^{\frac{3}{2}} - (r + r_0 - \rho)^{\frac{3}{2}}\right],$$

dont la dernière est l'expression connue du temps, dans le mouvement parabolique d'une comète. Si l'on pose pour abréger,

$$\frac{1}{\sqrt{(r + r_0 - \rho)}} + \frac{1}{\sqrt{(r + r_0 + \rho)}} = A, \quad \frac{1}{\sqrt{(r + r_0 - \rho)}} - \frac{1}{\sqrt{(r + r_0 + \rho)}} = B,$$

on en tirera

$$x' = \frac{dV}{dx} = k\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\,A - \frac{x}{r}\,B\right),\quad x_0' = -\frac{dV}{dx_0} = k\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\,A + \frac{x_0}{r_0}\,B\right),$$
$$y' = \frac{dV}{dy} = k\left(\frac{y - y_0}{\varrho}\,A - \frac{y}{r}\,B\right),\quad y_0' = -\frac{dV}{dy_0} = k\left(\frac{y - y_0}{\varrho}\,A + \frac{y_0}{r_0}\,B\right),$$
$$z' = \frac{dV}{dz} = k\left(\frac{z - z_0}{\varrho}\,A - \frac{z}{r}\,B\right),\quad z_0' = -\frac{dV}{dz_0} = k\left(\frac{z - z_0}{\varrho}\,A + \frac{z_0}{r_0}\,B\right).$$

M. Hamilton donne aux expressions de t et V une forme particulière que je vais indiquer.

En effet, puisqu'on déduit ε' de ε en écrivant $-\rho$ au lieu de ρ, on peut écrire la valeur de V de cette manière

$$V = k\sqrt{a}\int_{-\rho}^{+\rho}(1 + \cos\varepsilon)\,\frac{d\varepsilon}{d\varrho}\,d\rho.$$

en considérant a, r, r_0 comme constantes, et ρ comme seule variable pendant l'intégration.

Mais puisque

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r + r_0 + \rho}{4a},$$

on a

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{d\varrho} = \frac{1}{4a},$$

donc

$$(1 + \cos\varepsilon)\,\frac{d\varepsilon}{d\varrho} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{d\varrho} = \frac{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{2a\sin\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{1}{2a}\sqrt{\left(\frac{4a}{r + r_0 + \varrho} - 1\right)},$$

et par conséquent

$$V = k\int_{-\rho}^{+\rho}\left(\frac{1}{r + r_0 + \varrho} - \frac{1}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}d\rho.$$
$$t = \frac{2a^2}{k^2}\,\frac{dV}{da} - \frac{1}{4}k\int_{-\rho}^{+\rho}\left(\frac{1}{r + r_0 + \varrho} - \frac{1}{4a}\right)^{-\frac{1}{2}}d\rho:$$

ce sont les expressions données par M. Hamilton. Si l'on y fait $a = \infty$, ou a négative, on a les formules pour le mouvement parabolique et hyperbolique.

(La suite à un autre cahier.)