JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POISSON

Note sur l'intégration des Équations linéaires aux Différences partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 3 (1838), p. 615-623.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__615_0>

Note sur l'intégration des Équations linéaires aux Différences partielles ;

Par M. POISSON.

Soit φ une fonction d'un nombre quelconque de variables t, x, y, z, etc., déterminée par une équation (A) linéaire et aux différences partielles. Tous les termes dépendants de φ et de ses différences étant passés dans le premier membre, soit P le second membre qui sera une fonction donnée de t, x, y, z, etc. Si l'on parvient à découvrir une valeur particulière p de φ, qui satisfasse à cette équation (A), on fera disparaître son second membre en prenant

$$\varphi = p + \varphi';$$

ce qui la changera en une autre équation (A'), dont le premier membre se déduira de celui de (A) par le changement de φ en φ', et dont le second membre sera zéro. Ainsi, la réduction d'une équation linéaire (A) avec un second membre, à une équation (A') semblable, mais sans second membre, ne dépend que de la détermination d'une valeur particulière de l'inconnue ; mais il n'y a pas de règles générales et directes pour cette détermination, si ce n'est quand il s'agit d'une équation à coefficients constants, c'est-à-dire lorsque les coefficients de φ et de ses différences dans le premier membre de (A), sont indépendants de t, x, y, z, etc.

Quelle que soit d'ailleurs la quantité P, si on la considère par rapport à l'une de ces variables isolément, à t, par exemple, on peut la représenter par une somme d'exponentielles réelles ou imaginaires, que nous désignerons généralement par

$$\mathrm{P} = \Sigma\psi(x, y, z, \text{etc.})\, e^{mt};$$

e étant la base des logarithmes népériens, m une constante indéterminée, ψ une fonction donnée des autres variables x, y, z, etc., de m, et s'il en est besoin, d'une ou plusieurs autres quantités indéterminées; et la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs réelles ou imaginaires qu'il sera nécessaire de donner à ces quantités et à m. Cette expression générale renferme la formule connue

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}' \cos\theta(t-t')\, d\theta dt',$$

dans laquelle la somme Σ est changée en une intégrale double, et ses termes en des éléments infiniment petits du second ordre : π désigne à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre, et P' ce que devient P quand on y met t' au lieu de t. D'après la forme linéaire de l'équation (A), il suffira de considérer un seul terme de cette somme, et de faire

$$\mathrm{P} = \psi(x, y, z)\, e^{mt},$$

en supposant, pour fixer les idées, que les variables autres que t, soient au nombre de trois seulement : lorsqu'on aura déterminé la valeur correspondante de p, on l'appliquera à tous les termes de P ; et en faisant la somme de toutes ces valeurs partielles de p, on aura sa valeur complète, qui se changera en même temps que la somme Σ, en une double intégrale définie.

Cela posé, je prends, pour la valeur de p qu'il s'agira d'obtenir,

$$p = \frac{1}{8\pi^3} e^{mt} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int (\mathrm{A}\cos u + \mathrm{B}\sin u)\,\psi(x', y', z')\, d\alpha d\mathcal{C} d\gamma dx' dy' dz'),$$

où je fais, pour abréger,

$$\alpha(x-x') + \mathcal{C}(y-y') + \gamma(z-z') = u,$$

je désigne par A et B deux fonctions inconnues de α, $\mathcal{C}$, γ, et je suppose que chacune des six intégrales ait $\pm\infty$ pour limites. D'après la formule déjà citée, étendue à trois variables, on aura, en même temps,

$$\mathrm{P} = \frac{1}{8\pi^3} e^{mt} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \psi(x', y', z') \cos u\, d\alpha d\mathcal{C} d\gamma dx' dy' dz';$$

et si l'on substitue cette valeur de P dans (A), et qu'on y mette celle de p à la place de φ, il est facile de voir qu'en supprimant l'exponentielle, facteur commun aux deux membres de cette équation, elle prendra la forme :

$$\begin{aligned}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int [(\mathrm{AA}'+\mathrm{BB}')\cos u+(\mathrm{AA}_{,}+\mathrm{BB}_{,})\sin u]\psi(x',y',z')d\alpha d\mathcal{C}d\gamma dx'dy'dz' \\ =\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \psi(x',y',z')\cos u\, d\alpha d\mathcal{C}d\gamma dx'dy'dz';\end{aligned}$$

A′, B′, $\mathrm{A}_{,}$, $\mathrm{B}_{,}$, désignant des polynomes ordonnés suivant les puissances et les produits de α, $\mathcal{C}$, γ, dont le premier et le dernier résulteront des différences partielles de p, d'un ordre pair ou zéro par rapport à x, y, z, et les deux autres, des différences d'un ordre impair. Or, pour que cette dernière équation soit identique, il est nécessaire et il suffit qu'on ait

$$\mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' = 1, \qquad \mathrm{AA}_{,} + \mathrm{BB}_{,} = 0;$$

ce qui déterminera les deux quantités A et B, et par conséquent, la valeur de p. Son expression dépendra, comme on voit, d'une intégrale sextuple, qui pourra se changer en une intégrale octuple, quand on l'étendra à la valeur générale de P, et que celle-ci aura été elle-même représentée par une intégrale double. La valeur générale de p, dans le cas d'un nombre quelconque n de variables t, x, y, z, etc., serait donnée par une intégrale définie de l'ordre de multiplicité $2n$. Elle est donc très compliquée; mais on pourra souvent la réduire à une forme plus simple, comme on en verra tout-à-l'heure un exemple.

Après que (A) aura été réduite à l'équation (A′), linéaire, de l'ordre quelconque n, à coefficients constants et sans second membre, on satisfera à celle-ci en prenant pour φ' un nombre n de sommes différentes d'exponentielles réelles ou imaginaires; et d'après ce que j'ai montré autrefois, on pourra regarder cette expression de φ', comme un développement d'une forme particulière, de l'intégrale complète de (A′). Sans restreindre ni étendre la généralité de chacune de ces n sommes, on pourra, si l'on veut, la remplacer par une intégrale définie de l'ordre de multiplicité n; mais quoique la valeur de φ' augmentée de p, soit certainement l'intégrale générale de l'équation donnée (A), cependant la forme sous laquelle cette intégrale se présente de cette manière, la rend peu propre à déterminer diverses circonstances du phénomène qui dépendent de cette équation, par exemple, la propagation ondulatoire du mouvement dans les milieux élastiques. Au contraire, les intégrales de plusieurs équations aux différences partielles que j'ai obtenues sous une autre forme, mettent immédiatement en évidence ce genre de mouvement, et font voir que l'ébranlement renfermé d'abord dans une étendue limitée autour d'un point donné, se propage uniformément autour de ce point, en ondes à une ou plusieurs nappes, d'une largeur également limitée, ce qui est le point essentiel de ce genre de questions. C'est ce qui a lieu, en effet, à l'égard de l'équation générale de la théorie du son, intégrée sous la forme dont il s'agit, dans un Mémoire lu à l'Académie en 1819, et relativement aux trois équations du mouvement des corps élastiques homogènes, intégrées sous une semblable forme, dans deux mémoires lus en 1828 et 1830 (*). Dans celui de 1830, j'ai développé en détail toutes les circonstances de la propagation du mouvement dans l'intérieur des corps non cristallisés; et l'on a vu qu'elle a lieu en deux systèmes d'ondes circulaires, dont chacun a sa vitesse et ses propriétés particulières. Relativement à la propagation du mouvement dans un corps cristallisé, je me suis borné à indiquer, dans le n° 17 de ce Mémoire, ce qu'il y aurait à faire pour en déterminer les lois en suivant la marche dont je donnais l'exemple. Je vois avec plaisir que M. le professeur Blanchet a traité ce sujet avec beaucoup de talent et de succès, dans un Mémoire présenté récemment à l'Académie.

Pour donner un exemple de ces différentes considérations, je choisis l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \left(A\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B\frac{d^2\varphi}{dy^2} + C\frac{d^2\varphi}{dz^2} + D\frac{d^2\varphi}{dxdy} + E\frac{d^2\varphi}{dxdz} + F\frac{d^2\varphi}{dydz}\right) = e^{mt}\psi(x, y, z),$$

dans laquelle A, B, C, D, E, F, sont, ainsi que m, des constantes données. En considérant x, y, z, comme les coordonnées rectangu-

(*) Tomes III^e, VIII^e, X^e, *des Mémoires de l'Académie des Sciences*.

laires d'un même point, on pourra, par les formules connues, les transformer en trois autres, dont les directions soient telles que les différences partielles relatives à deux coordonnées différentes, disparaissent de la nouvelle équation ; ce qui s'exécutera par un calcul tout-à-fait le même que pour faire disparaître les rectangles des coordonnées, dans l'équation générale des surfaces du second ordre. Sans nuire à la généralité de l'équation précédente, on peut donc y supprimer les trois derniers termes de son premier membre. En y mettant aussi à la place des trois nouvelles coordonnées, d'autres variables x, y, z, multipliées par $\frac{1}{a}\sqrt{A}$, $\frac{1}{a}\sqrt{B}$, $\frac{1}{a}\sqrt{C}$, elle deviendra

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) = e^{mt}\,\psi(x, y, z);$$

a^2 étant une constante donnée, et ψ une fonction aussi donnée de ces dernières variables. D'après ce qu'on a vu plus haut, on aura

$$p = \frac{1}{8\pi^3} e^{mt} \iiiint\!\!\iint \psi(x', y', z') \frac{\cos u\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, dx'\, dy'\, dz'}{m^2 + a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)},$$

pour la valeur de p, au moyen de laquelle on réduira cette même équation à celle-ci :

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2} + \frac{d^2\varphi'}{dz^2}\right),$$

dont l'intégrale complète est

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F'(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega,$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f'(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega;$$

f' et F' désignant les deux fonctions arbitraires qui représentent les valeurs de φ' et $\frac{d\varphi'}{dt}$, relatives à $t = 0$.

Pour les déterminer, je suppose que, pour cette valeur de t, on ait

$$\varphi = f(x, y, z), \quad \frac{d\varphi}{dt} = F(x, y, z);$$

f et F étant deux fonctions données. A cause de $\varphi = p + \varphi'$, il en résultera

$$f'(x, y, z) = f(x, y, z) - \frac{1}{8\pi^3} \iiint \psi(x', y', z')\, q dx'dy'dz',$$
$$F'(x, y, z) = F(x, y, z) - \frac{m}{8\pi^3}\, 3\iiint \psi(x', y', z')\, q dx'dy'dz',$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$q = \iiint \frac{\cos u d\alpha d\beta d\gamma}{m^2 + a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}.$$

On aura, en même temps,

$$p = \frac{1}{8\pi^3} e^{mt} \iiint \psi(x', y', z')\, q dx'dy'dz'.$$

On simplifiera ces expressions de f' et F', et par suite la valeur de φ', par des transformations semblables à celles dont j'ai fait usage dans les n^{os} 4 et 5 du Mémoire de 1830. Ainsi, en faisant

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r'^2,$$

on trouvera d'abord

$$q = \frac{4\pi}{r'} \int_0^\infty \frac{\sin \rho r' . \rho d\rho}{m^2 + a^2\rho^2};$$

et par une formule connue, on en conclura

$$q = \frac{2\pi^2}{a^2 r'} e^{-\frac{mr'}{a}};$$

ce qui exige que l'exposant $-\frac{mr'}{a}$ soit négatif, et sera effectivement toujours possible, en regardant la variable r' comme une quantité positive, et la constante a, dont le carré seul est donné et le signe ambigu, comme étant de même signe que m. De cette manière, l'intégrale sextuple que renferment les formules précédentes, se trouvera réduite à une intégrale triple. Mais en substituant les expressions de f' et F' sous les signes $\int$, dans celle de φ', il en résultera des intégrales quintuples, relatives à x', y', z', θ, ω, qu'il s'agira encore de simplifier.

Pour cela, mettons $x+at\cos\theta$, $y+at\sin\theta\sin\omega$, $z+at\sin\theta\cos\omega$, à la place x, y, z, dans les valeurs précédentes de $f'(x, y, z)$ et $F'(x, y, z)$; désignons par $r_{,}$ et $q_{,}$, ce que deviennent alors r' et q'; et faisons ensuite

$$x' = x + r'\cos\theta', \quad y' = y + r'\sin\theta'\sin\omega', \quad z' = z + r'\sin\theta'\cos\omega;$$

ce qui satisfait à la valeur de r'^2. Nous aurons

$$r_{,}^2 = r'^2 - 2atr'\,[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + a^2t^2,$$

$$q_{,} = \frac{2\pi^2}{a^2 r_{,}}\, e^{-\frac{mr_{,}}{a}}.$$

Si l'on change θ et ω dans les deux angles μ et λ du n° 5 que l'on vient de citer, on aura

$$r_{,}^2 = r'^2 - 2atr'\cos\mu + a^2t^2,$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} q_{,}\sin\theta d\theta d\omega = \frac{2\pi^2}{a^2}\int^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r_{,}}\, e^{-\frac{mr_{,}}{a}}\sin\mu d\mu d\lambda.$$

En observant que $r_{,}$ ne dépend pas de λ, que dans ces intégrations r' est une constante, et que l'on a, en conséquence,

$$atr'\sin\mu\, d\mu = r_{,}dr_{,},$$

elles s'effectueront immédiatement. Comme les quantités r' et $r_{,}$ doivent toujours être positives, si l'on suppose, pour fixer les idées, que at le soit également, on devra, à la limite $\mu = 0$, prendre $r_{,} = \pm(r' - at)$, selon que la différence $r' - at$ sera positive ou négative, et à l'autre limite $\mu = \pi$, on prendra toujours $r_{,} = r' + at$. Cela étant, on aura

$$\int^{\pi}\int_0^{2\pi} q_{,}\sin\theta d\theta d\omega = \frac{4\pi^3}{ma\,tr'}\,[e^{\mp\frac{m}{a}(r'-at)} - e^{-\frac{m}{a}(r'+at)}];$$

et il ne restera plus que les intégrations relatives à x', y', z', qui ne soient pas effectuées. Elles ne peuvent l'être, tant que $\psi(x', y', z')$

sera une fonction quelconque; mais on peut en changer la forme, de la manière suivante.

Remplaçons les variables x', y', z', par r', θ', ω'; les limites relatives aux premières étant $\pm\infty$, celles qui se rapportent aux secondes seront $r'=0$, $\theta'=0$, $\omega'=0$, et $r'=\infty$, $\theta'=\pi$, $\omega'=2\pi$, quelles que soient les quantités x, y, z, qui ne varient pas dans ces intégrations; et de plus, sous les signes $\int$, on devra prendre $r'^2\sin\theta' dr'd\theta'd\omega'$ au lieu de $dx'dy'dz'$. De cette manière, on aura

$$\begin{aligned}
&f'(x+at\cos\theta,\ y+at\sin\theta\sin\omega,\ z+at\sin\theta\cos\omega)\\
&= f(x+at\cos\theta,\ y+at\sin\theta\sin\omega,\ z+at\sin\theta\cos\omega)\\
&-\frac{1}{2ma^2t}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi(x+r'\cos\theta',\ y+r'\sin\theta'\sin\omega',\\
&z+r'\sin\theta'\sin\omega')\left[e^{\mp\frac{m}{a}(r'-at)}-e^{-\frac{m}{a}(r'+at)}\right]r'\sin\theta' dr'd\theta'd\omega',
\end{aligned}$$

et de même à l'égard de la fonction F'. D'après cette même transformation des variables x', y', z', la valeur que l'on a trouvée pour p, pourra s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
p=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}&\psi(x+r'\cos\theta',\ y+r'\sin\theta'\sin\omega',\\
&z+r'\sin\theta'\cos\omega')\,e^{-\frac{m}{a}(r'-at)}\,r'\sin\theta' dr'd\theta'd\omega'.
\end{aligned}$$

Au moyen de ces différents résultats, et en employant les lettres r, θ, ω, à la place de r', θ', ω', sous les signes $\int$, la partie de la valeur de φ, dépendante de la fonction ψ, deviendra

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta\sin\omega,\\
&z+r\sin\theta\cos\omega)\left[e^{-\frac{m}{a}(r-at)}\mp\frac{1}{2}e^{\mp\frac{m}{a}(r-at)}-\frac{1}{2}e^{\mp\frac{m}{a}(r-at)}\right]r\sin\theta drd\theta d\omega.
\end{aligned}$$

On pourra, si l'on veut, partager l'intégrale relative à r en deux parties : l'une qui s'étendra depuis $r=at$ jusqu'à $r=\infty$, et dans laquelle on prendra les signes supérieurs, ce qui rendra nulle la quantité comprise entre les crochets; l'autre dont les limites seront

$r=0$ et $r=at$, et dans laquelle on devra prendre les signes inférieurs, ce qui réduira cette même quantité à son premier terme. La valeur totale de φ, ou l'intégrale complète de l'équation donnée, sera alors, sous sa forme la plus simple,

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x+at\cos\theta,\ y+at\sin\theta\sin\omega,\ z+at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta d\theta d\omega$$
$$+\frac{1}{4}\frac{d.}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(x+at\cos\theta,\ y+at\sin\theta\sin\omega,\ z+at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta d\theta d\omega$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta\sin\omega,$$
$$z+r\sin\theta\cos\omega)\, e^{-\frac{m}{a}(r-at)}\, r\sin\theta dr d\theta.$$