JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 126-163.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__126_0>

MÉMOIRE

Sur l'équilibre des Températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux ;

Par G. LAMÉ.

(Note lue à l'Académie des Sciences.)

Le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter au jugement de l'Académie, a pour objet la recherche des lois qui régissent l'équilibre de la chaleur dans un corps, solide et homogène, terminé par une surface de forme ellipsoïdale. Je ne considère dans ce travail que dans le cas le plus simple, celui où la paroi extérieure du corps serait directement entretenue à des températures fixes, mais variables d'un point à l'autre de cette surface.

Le problème correspondant dans le cas de la sphère, se trouve compris dans la solution générale relative à cette forme de corps, que Laplace a donnée le premier, et dont M. Poisson a développé depuis de nombreuses applications. Cette solution m'a servi de guide pour découvrir celle qui concerne l'ellipsoïde à trois axes inégaux, et pour mettre à l'abri de tout doute la généralité des formules auxquelles j'ai été conduit.

Dans la sphère, la température est exprimée, d'après Laplace, par une série, dont chaque terme se compose d'une puissance du rayon, multipliée par une fonction entière et rationnelle des sinus et cosinus de la latitude et de la longitude. D'où il suit que ces deux dernières coordonnées ne sont pas séparées, c'est-à-dire qu'elles n'entrent pas chacune exclusivement, comme le rayon, dans un des facteurs du terme général de la série.

Or, on peut faire disparaître ce défaut de symétrie, en rapportant la sphère à un autre système de coordonnées : il faut prendre pour surfaces orthogonales, conjuguées à la sphère, des cônes obliques, ou à bases elliptiques, asymptotes à des hyperboloïdes à une et à deux nappes ayant mêmes foyers. Par cette transformation, chaque terme de la série qui représente la température dans la sphère, est le produit de trois facteurs variables, contenant respectivement une seule des trois coordonnées. Chacun des deux derniers est une fonction entière et rationnelle des trois axes de l'hyperboloïde correspondant; les coefficients des différents termes de cette fonction contiennent une racine incommensurable, mais essentiellement réelle; ils sont identiquement les mêmes pour les deux facteurs, entre lesquels il y a symétrie complète.

Cette représentation nouvelle de la solution du système sphérique ne pourrait être préférée, lors des calculs numériques, à celle dont les géomètres font usage, à cause de la complication résultant de l'incommensurabilité des racines qui particularisent chaque terme, et de la nécessité où l'on serait de la faire disparaître, en sommant, par la méthode des fonctions symétriques, les termes correspondants aux racines d'une même équation. Mais cette solution transformée, qui conduit à une expression analytique des températures dans la sphère, ni plus ni moins générale que celle donnée par Laplace, a sur cette dernière le grand avantage d'indiquer de suite comment doit se composer la solution qui concerne l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

En effet, le système sphérique, rapporté aux cônes obliques, est évidemment la limite du système ellipsoïdal, rapporté à trois surfaces orthogonales du second ordre, ayant mêmes foyers; d'où il suit que pour passer du premier au second, il n'y a rien à changer aux deux derniers facteurs du terme général de la série qui représente la température, puisque les coordonnées qu'ils contiennent sont identiquement les mêmes dans les deux cas; toutes les modifications doivent se concentrer sur le premier facteur, qui de fonction du rayon de la sphère, doit devenir une fonction des axes de l'ellipsoïde isotherme, conjugué aux deux autres surfaces coordonnées.

Ou autrement : si l'on connaissait la loi des températures dans l'ellipsoïde rapporté à ses coordonnées naturelles, elle comprendrait nécessairement la loi des températures dans la sphère, laquelle appartient à tout système ellipsoïdal; il suffirait en effet, pour déduire la seconde de la première, d'exprimer que les axes de la paroi sont infiniment plus grands que les distances de ses foyers géométriques; or cette transformation pourrait toujours s'effectuer de manière à ne rien changer aux fonctions des axes des deux autres surfaces coordonnées. On devrait donc retomber sur la solution du système sphérique rapporté à des cônes obliques.

D'après cela, on doit pouvoir trouver l'expression de la température dans l'ellipsoïde, en complétant, par une méthode analogue à celle de la variation des constantes arbitraires, le facteur de chaque terme de la série relative à la sphère, qui ne contient que le rayon. Or, pour le cas uniquement traité dans ce Mémoire, ce facteur est une puissance, dont l'exposant est entier et positif; d'où il suit que la méthode des variations dont il s'agit, ne pourra que le transformer en une fonction entière et rationnelle des axes de l'ellipsoïde, et que la série, ainsi complétée dans chacun de ses termes, sera tout aussi générale pour l'ellipsoïde que la solution de Laplace pour la sphère.

Telles sont les considérations qui m'ont conduit à la loi des températures dans l'ellipsoïde à trois axes inégaux, quand sa surface est directement entretenue à des températures fixes, mais variables d'un point à l'autre de cette surface.

Cette loi est exprimée par une série de termes, vérifiant tous séparément l'équation aux différences partielles qui exprime l'équilibre de la chaleur dans un corps solide homogène. Chaque terme est le produit de trois facteurs, lesquels sont trois fonctions rationnelles et entières, ayant même forme et mêmes coefficients, la première des axes de l'ellipsoïde, la seconde des axes de l'hyperboloïde à une nappe, et la troisième des axes de l'hyperboloïde à deux nappes. Les constantes de ces trois fonctions ou de ces trois polynomes, contiennent implicitement la racine incommensurable d'une équation, laquelle est la même pour tous les termes où ces polynomes ont le même degré, et qui change d'un degré à l'autre.

La méthode simple et féconde, par laquelle M. Poisson a démontré la réalité de toutes les racines des équations transcendantes, qui se sont présentées dans la théorie analytique de la chaleur, peut aussi servir à établir la réalité des racines provenant des équations, en nombre indéfini, mais de degrés limités, qui particularisent les divers groupes de termes dans la série dont il s'agit. Le coefficient général de chaque terme est déterminé, à l'aide de la fonction donnée des températures entretenues sur la surface de l'ellipsoïde, par le quotient de deux intégrales définies, en employant une méthode d'élimination analogue à celle si souvent retrouvée dans toutes les autres recherches de physique mathématique. Enfin la forme même que cette méthode donne aux coefficients des différents termes, démontre que la série qu'ils composent est convergente.

Quand il s'agira d'évaluer en nombre la température d'un point déterminé, cette expression générale de la loi des températures dans l'ellipsoïde, exigera sans doute de plus longs calculs que celle qui correspond au système sphérique; mais elle a sur cette dernière, l'incontestable avantage d'une symétrie parfaite dans la distribution des coordonnées.

Dans cette solution, la fonction des températures sur la paroi, se trouve développée en une série de termes contenant, en facteurs polynomes, les axes des surfaces conjuguées à l'ellipsoïde, et qui le coupent suivant ses lignes de courbure. Or, on peut prendre pour nouveaux paramètres de ces surfaces, les transcendantes elliptiques de première espèce, et de variétés différentes, qui exprimeraient la température dans chacun de ces systèmes coordonnés, pris isolément comme système de surfaces isothermes; et l'on est conduit par cette transformation au développement d'une fonction de deux variables, en une série nouvelle des fonctions étudiées par Abel, et dont il a démontré la double périodicité. Ce genre de développement paraît être le seul avec lequel il soit possible d'aborder le système ellipsoïdal à axes inégaux, dans les cas généraux des diverses questions de physique mathématique.

Les intégrales définies qui composent les coefficients des différents termes de la série exprimant la température dans l'ellipsoïde, sont donc réductibles en transcendantes elliptiques. On pourrait croire d'après cela qu'il fallût toujours avoir recours à des tables, encore fort incomplètes, pour réduire en nombre une valeur particulière de la fonction totale. Mais j'ai fait voir que cette complication n'est qu'apparente, et que les intégrales définies renfermant des fonctions elliptiques, dans le cas dont il s'agit ici, ne contiennent en dernier résultat d'autre nombre transcendant, que le rapport du diamètre à la circonférence du cercle, lequel doit même disparaître comme facteur commun aux deux termes de la fraction qui exprime le coefficient général.

Ainsi la solution à laquelle j'ai été conduit n'est pas seulement une représentation symbolique : elle ne nécessite par elle-même l'emploi d'aucune table, pas même de celle des sinus. Car si les fonctions elliptiques jouent un rôle dans sa composition, tous les résultats numériques que l'on en déduira seront complétement dégagés de tout nombre transcendant, à moins qu'ils ne soient introduits par la loi donnée des températures de la surface. de révolution

Il importait de considérer séparément le cas d'un ellipsoïde* soit aplati, soit allongé. La solution générale que je viens de décrire, indique par des transformations faciles, la forme de la série qui doit exprimer la température dans ce nouveau corps, et il serait possible de l'en déduire complétement, en faisant un usage convenable de la méthode qui sert à trouver les vraies valeurs des fractions, se présentant sous une expression indéterminée. Mais après avoir ainsi reconnu la forme, essentielle et suffisante, de la nouvelle solution, j'ai cru préférable de la compléter par des recherches directes.

La loi des températures dans l'ellipsoïde de révolution, est définitivement exprimée par une série de termes, desquels chacun est le produit de trois facteurs; l'un est le cosinus ou le sinus d'un multiple de l'angle azimutal, qui particularise les plans méridiens; les deux autres facteurs sont respectivement des fonctions entières et rationnelles du diamètre équatorial, et de l'axe polaire des autres surfaces coordonnées, lesquelles sont des ellipsoïdes et des hyperboloïdes de révolution autour du même axe, isothermes et orthogonaux. Les constantes de ces deux fonctions, ou plutôt de ces deux polynomes sont totalement dégagées de tout nombre incommensurable. Enfin les coefficients des différents termes sont déterminés, à l'aide des températures données de la surface, par des intégrales définies qu'il est facile de calculer.

Cette solution prend une autre forme, quand on choisit pour paramètres des surfaces conjuguées, les transcendantes qui exprimentraient la température dans chaque système coordonné, pris isolément comme système de surfaces isothermes. Les axes des hyperboloïdes de révolution se transforment alors en exponentielles toujours réelles. Quant à ceux des ellipsoïdes, ils deviennent pareillement des exponentielles réelles, si le sphéroïde est allongé; mais ils prennent la forme de la tangente et de la sécante d'un arc de cercle, si l'ellipsoïde est aplati, c'est-à-dire si l'axe polaire est moindre que le diamètre de son équateur. Dans les deux cas, la fonction introduite se présente développée en une série de sinus ou de cosinus pour l'une des variables, et d'exponentielles réelles pour l'autre.

Lorsque les températures de la surface sont distribuées de la même manière sur tous les méridiens, la série qui donne les températures intérieures est indépendante de la longitude; et la fonction donnée, qui n'est plus qu'à une seule variable, est introduite par son développement en une série d'exponentielles réelles.

Telle est la solution complète d'un des problèmes généraux de la théorie de la chaleur, pour les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale; les autres questions exigeront des recherches analytiques d'un ordre plus élevé. Toutefois, l'état variable des températures dans l'ellipsoïde, lorsqu'il s'échauffe ou se refroidit par son contact avec des sources de chaleur ou de froid, doit pouvoir se déduire de la loi connue du mouvement de la chaleur dans la sphère, par des considérations semblables à celles qui m'ont conduit au cas plus simple de l'équilibre; mais cette nouvelle solution exige l'emploi de fonctions plus compliquées, qu'il est nécessaire d'étudier, avant de les introduire dans les applications.

Les deux cas dans lesquels l'ellipsoïde conserverait ou perdrait sa chaleur par le rayonnement de sa surface, sont totalement distincts de ceux qui précèdent; ils présentent une difficulté d'un ordre nouveau, qui tient à ce que l'équation différentielle dite de la surface, se trouve renfermer essentiellement les trois coordonnées à la fois; tandis que dans la sphère, le cylindre droit, et quelques polyèdres, seuls corps complétement traités jusqu'ici, cette équation de la surface ne contient, pour chaque terme simple de la température, qu'une seule coordonnée.

Au reste, la difficulté dont il s'agit est absolument la même que celle qui naîtrait de l'introduction d'un pouvoir rayonnant variable, sur la surface de la sphère; question importante dont la solution est encore inconnue. La seule tentative que l'on ait faite avec succès, dans cette direction nouvelle, est due à M. Liouville, qui a traité, pour le prisme rectangulaire, le cas d'un pouvoir rayonnant variable; mais la méthode trouvée par ce géomètre, ne peut être appliquée lorsque le pouvoir rayonnant est une fonction irrationnelle, et c'est précisément ce qui a lieu pour l'ellipsoïde.

Les recherches dont je viens d'exposer les résultats, malgré les restrictions apportées à la question de physique mathématique que je m'étais proposé de résoudre, composent un travail fort étendu: car, outre les divers mémoires que j'ai présentés dans ces dernières années, et dont l'objet principal était de lever les difficultés préliminaires de la question dont il s'agit, je suis obligé de diviser le travail actuel en trois mémoires différents. Celui que je présente aujourd'hui contient l'exposé de la solution générale pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux; le second, dont la réduction n'est pas encore terminée, contiendra la solution relative à l'ellipsoïde de révolution, traitée directement; enfin le troisième aura pour objet spécial de simplifier les applications de ces deux solutions.

Cette grande étendue, dans un travail destiné à résoudre une question de physique mathématique dont l'énoncé est si simple, peut paraître surprenante. Mais tout étonnement cesse, si l'on considère qu'il s'agissait de traiter un corps pour lequel les procédés d'analyse, employés jusqu'ici, étaient totalement impuissants: car, ni les coordonnées du prisme rectangle, ni celles de la sphère, les seules dont les géomètres aient encore fait usage en physique mathématique, ne pouvaient aborder l'ellipsoïde. Il fallait donc découvrir un système coordonné, autre que les plans, les rayons vecteurs et les angles, qui permît de traiter le nouveau corps avec tout autant de facilité que la sphère ou le cylindre droit. Ce nouvel instrument découvert, il était nécessaire d'étudier ses propriétés, avant de penser à l'appliquer. Et même quand cette étude préliminaire m'avait en quelque sorte familiarisé avec les nouvelles coordonnées, je rencontrais à chaque pas des formes imprévues dont l'interprétation n'était pas sans difficulté.

J'ose espérer que les géomètres ne verront pas sans intérêt les développements en séries nouvelles, qui caractérisent principalement la solution que j'ai trouvée, et qui donnent un premier exemple de l'utilité des fonctions périodiques, si bien étudiées par Abel et par M. Jacobi.

§ I.

La théorie de la chaleur, limitée à la recherche des lois qui régissent les températures dans les corps solides homogènes, se réduit à un petit nombre de questions générales, qui se traduisent en autant de problèmes d'analyse, quand on considère un corps de forme particulière. Je me propose de résoudre une de ces questions dans le cas de l'ellipsoïde à axes inégaux. La surface de ce corps est en contact avec des sources de chaleur ou de froid, qui diffèrent d'un point à l'autre, et il s'agit de chercher la loi des températures dans l'intérieur de l'ellipsoïde, lorsque leur équilibre est établi.

Voici le problème d'analyse correspondant : la surface de l'ellipsoïde ayant pour équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\rho_0^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - c^2} = 1,$$

il s'agit de trouver une fonction V, qui vérifie l'équation aux différences partielles,

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

et qui, exprimant la température, prenne des valeurs données pour les points de la surface, ou pour les différents groupes de valeurs de x, y, z, satisfaisant à l'équation (1).

Cet énoncé devient plus explicite et plus clair, quand on choisit un système de coordonnées tel, que sur la surface de l'ellipsoïde, une des coordonnées soit constante. Il faut alors rapporter l'espace au système des surfaces du second degré représentées par les équations

$$(3)\quad \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,\quad \frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_1^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_1^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\rho_2^2}-\frac{y^2}{b^2-\rho_2^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_2^2}=1,$$

dans lesquelles la constante b est moindre que c, le paramètre ρ plus grand que b et c, ρ_1 compris entre b et c, enfin ρ_2 plus petit que b. La première des équations (3) représente des ellipsoïdes, la seconde des hyperboloïdes à une nappe, et la troisième des hyperboloïdes à deux nappes. Ces surfaces sont orthogonales, et leurs sections principales ont toutes les mêmes foyers géométriques.

Les paramètres ρ, ρ_1, ρ_2, pris pour nouvelles coordonnées, sont liés aux anciennes par les équations (3), qui donnent

$$(4)\quad bcx=\rho\rho_1\rho_2,\quad b\sqrt{c^2-b^2}\,.\,y=\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2},$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}\,.\,z=\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2},$$

et l'on a, comme il est aisé de le vérifier,

$$\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dy}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dz}=0,\ \frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dy}+\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dz}=0,\ \frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dz}=0.$$

Si l'on désigne par h, h_1, h_2, l'expression différentielle........ $\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$, lorsque F est successivement égal à ρ, ρ_1, ρ_2, le calcul donne

$$(5)\quad h=\frac{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{\sqrt{\rho^2-\rho_1^2}\sqrt{\rho^2-\rho_2^2}},\quad h_1=\frac{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}}{\sqrt{\rho_1^2-\rho_2^2}\sqrt{\rho^2-\rho_1^2}},\quad h_2=\frac{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}{\sqrt{\rho^2-\rho_2^2}\sqrt{\rho_1^2-\rho_2^2}}.$$

Enfin, si l'on désigne généralement par $\Delta_2 F$ l'expression différentielle $\left(\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{dz^2}\right)$, on trouve

$$(6)\quad \Delta_2\rho=\frac{d.\log\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{d\rho}h^2,\quad \Delta_2\rho_1=\frac{d.\log\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}}{d\rho_1}h_1^2,$$
$$\Delta_2\rho_2=\frac{d.\log\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}{d\rho_2}h_2^2.$$

§ II.

Pour simplifier les équations différentielles, transformées en ρ, ρ_1, ρ_2, à l'aide des formules (5) et (6), il convient d'introduire leurs fonctions transcendantes

$$\varepsilon=\int_c^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}},\quad \varepsilon_1=\int_b^{\rho_1}\frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}},\quad \varepsilon_2=\int_0^{\rho_2}\frac{d\rho_2}{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}},$$

qui sont telles que $\Delta_2\varepsilon=0$, $\Delta_2\varepsilon_1=0$, $\Delta_2\varepsilon_2=0$, et qu'en outre

$$\frac{d\varepsilon_1}{dx}\frac{d\varepsilon_2}{dx}+\frac{d\varepsilon_1}{dy}\frac{d\varepsilon_2}{dy}+\frac{d\varepsilon_1}{dz}\frac{d\varepsilon_2}{dz}=0,\ \frac{d\varepsilon_2}{dx}\frac{d\varepsilon}{dx}+\frac{d\varepsilon_2}{dy}\frac{d\varepsilon}{dy}+\frac{d\varepsilon_2}{dz}\frac{d\varepsilon}{dz}=0,\ \frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\varepsilon_1}{dx}+\frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\varepsilon_1}{dy}+\frac{d\varepsilon}{dz}\frac{d\varepsilon_1}{dz}=0.$$

L'équation (2) devient alors, par un calcul facile à retrouver,

$$(8)\qquad (\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}+(\rho^2-\rho_2^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon_1^2}+(\rho^2-\rho_1^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon_2^2}=0.$$

La température V est une fonction de ε, ε_1, ε_2, et ρ, ρ_1, ρ_2 représentent les fonctions de ces variables qu'on déduirait des équations (7). Ou bien V est fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, et ε, ε_1, ε_2, sont les transcendantes (7). La loi des températures de la surface de l'ellipsoïde, dont le paramètre est $\rho=\rho_0$, est alors donnée par une équation de la forme $V_0=\varphi(\rho_1, \rho_2)$, puisque ρ_1 et ρ_2 sont les seules coordonnées qui varient sur cette surface.

Le problème d'analyse, qu'il s'agit de résoudre, consiste donc à trouver une fonction V de ρ, ρ_1, ρ_2, qui, vérifiant l'équation (8), se réduise à $\varphi(\rho_1, \rho_2)$ quand $\rho=\rho_0$.

On parvient à la solution cherchée, en prenant pour V une série de termes différents qui vérifient chacun séparément l'équation (8). Lorsque $\rho=\rho_0$, cette série n'est plus qu'à deux variables, et l'on détermine ces coefficients, dont le nombre est infini, de telle sorte qu'elle devienne un des développements possibles de la fonction φ. La première recherche à faire, pour procéder à cette solution générale, consiste à découvrir la forme essentielle et suffisante, que doit avoir le terme général de la série V. Il importe pour cela de considérer d'abord le cas où l'ellipsoïde se réduirait à une sphère.

§ III.

La solution de la question qui nous occupe, dans le cas du système sphérique, est connue depuis long-temps, et l'on ne saurait émettre aucun doute sur sa généralité. Les variables r, θ et ψ, désignant le rayon vecteur, la latitude et la longitude d'un point intérieur de la sphère, on a $x = r\cos\psi\cos\theta$, $y = r\sin\psi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$; et l'équation (2), transformée en coordonnées polaires, est

$$(9)\qquad \frac{d r^2 \frac{dV}{dr}}{dr}\cos^2\theta + \frac{d\frac{dV}{d\theta}\cos\theta}{d\theta}\cos\theta + \frac{d^2V}{d\psi^2} = 0.$$

La fonction V, qui, vérifiant l'équation (9), doit se réduire à $\varphi(\psi, \theta)$ pour $r = r_0$, est donnée par une série de la forme

$$(10)\qquad V = \Sigma U_n r^n;$$

n étant un nombre entier et positif, et U_n une fonction entière et rationnelle de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sin\psi$, $\cos\psi$, qui satisfait à l'équation

$$(11)\qquad n(n+1)U_n\cos^2\theta + \frac{d\frac{dU_n}{d\theta}\cos\theta}{d\theta}\cos\theta + \frac{d^2U_n}{d\psi^2} = 0,$$

et qui renferme des constantes arbitraires, dont le nombre est, dans le cas le plus général, $2n+1$.

Si l'on désigne par θ' et ψ', deux valeurs particulières de θ et ψ, et que l'on pose

$$(12)\qquad \mu = \sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos(\psi - \psi'),$$

μ sera le cosinus de l'angle formé par le rayon vecteur r avec l'axe particulier que déterminent les angles θ' et ψ'. Soit ensuite représenté par u_n, la fonction entière et rationnelle de μ qui multiplie ζ^n, dans le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-2\mu\zeta+\zeta^2}}$ suivant les puissances ascendantes de ζ; on sait que ce polynome u_n, sera du degré n en μ; qu'il ne contiendra que des puissances paires de μ, si n est pair, et seulement des puissances impaires de la même variable, si n est impair. On pourra égaler U_n à une somme de termes de la forme $\mathrm{SA}u_n$, les coefficients θ', ψ', A, variant d'un terme à l'autre. On composera ainsi la valeur la plus générale de U_n dans la série V(10), adoptée par les géomètres comme devant exprimer la loi des températures pour le système sphérique, dans la question physique que nous considérons exclusivement.

§ IV.

Or, il est à remarquer que la loi de formation de la fonction U_n, qui vient d'être exposée, n'impose pas la condition de se servir des coordonnées θ et ψ. D'après cette loi, U_n est la somme d'un certain nombre de polynomes, de même forme et de même degré; la variable μ, particulière à chacun d'eux, représente le cosinus de l'angle que le rayon vecteur r fait avec un axe fixe arbitraire, mené par le centre du système sphérique; et cet axe est seul différent pour chaque polynome. Il suit de-là que la valeur de U_n ne sera nullement changée, si l'on adopte tout autre système de coordonnées, que celui des latitudes et des longitudes, pour exprimer les cosinus μ, qui particularisent les polynomes u_n.

Conservant le rayon vecteur r, on peut prendre pour les deux autres coordonnées, les paramètres ρ_1 et ρ_2 des surfaces représentées par les équations

$$(13)\quad \frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_1^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_1^2}=0,\quad \frac{x^2}{\rho_2^2}-\frac{y^2}{b^2-\rho_2^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_2^2}=0,$$

dans lesquelles b est moindre que c, le paramètre ρ_1 compris entre b et c, et ρ_2 plus petit que b. Ces surfaces sont des cônes obliques, ou à bases elliptiques, asymptotes à des hyperboloïdes à une et à deux nappes, ayant mêmes foyers. Les nouvelles coordonnées r,

ρ_1, ρ_2, sont liées à celles x, y, z, par les équations (13), et par celle-ci $(x^2+y^2+z^2=r^2)$; d'où l'on déduit facilement,

$$(14)\qquad bcx = r\rho_1\rho_2,\quad b\sqrt{c^2-b^2}\cdot y = r\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2},$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}\cdot z = r\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}.$$

Si l'on désigne alors par ρ_1' et ρ_2' les paramètres des deux cônes (13), qui se coupent suivant l'axe que déterminaient précédemment les angles θ' et ψ', on aura évidemment

$$(15)\qquad \mu = \frac{\rho_1'\rho_2'}{bc}\cdot\frac{\rho_1\rho_2}{bc} + \frac{\sqrt{\rho_1'^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2'^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\cdot\frac{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}$$
$$+\frac{\sqrt{c^2-\rho_1'^2}\sqrt{c^2-\rho_2'^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\cdot\frac{\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}},$$

pour exprimer le cosinus μ (12), en fonction des nouvelles coordonnées; le poylnome partiel u_n qui ne contient que des puissances entières et positives de μ, sera alors transformé en une fonction entière et rationnelle de ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, laquelle sera nécessairement symétrique par rapport à ces variables; c'est-à-dire que chaque terme de cette fonction contiendra comme facteurs les mêmes puissances de ρ_1 et ρ_2, ou de $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$ et $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, ou de $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$ et $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$. Et la fonction U_n transformée, sera pareillement entière, rationnelle par rapport aux mêmes variables, et jouira de la même symétrie.

§ V.

Dans le nouveau système de coordonnées, il convient d'introduire, pour simplifier, les fonctions transcendantes

$$(16)\qquad \varepsilon_1 = \int_b^{\rho_1}\frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}},\qquad \varepsilon_2 = \int_0^{\rho_2}\frac{d\rho_2}{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}.$$

L'équation générale (2) devient alors

$$(17)\qquad (\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{d\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)}{dr} + \frac{d^2V}{d\varepsilon_1^2} + \frac{d^2V}{d\varepsilon_2^2} = 0.$$

Si la série (10) contient la solution de la question posée pour la sphère, lorsque U_n est exprimé en θ et ψ, elle conservera évidemment cette propriété, quand U_n, déduit du même mode de formation, sera exprimé en ρ_1 et ρ_2; cette fonction U_n satisfera d'ailleurs à l'équation

$$(18) \qquad n(n+1)U_n(\rho_1^2-\rho_2^2)+\frac{d^2U_n}{d\varepsilon_1^2}+\frac{d^2U_n}{d\varepsilon_2^2}=0,$$

laquelle n'est autre que celle (11) transformée, comme l'équation (17) est la transformation de celle (9).

Ainsi la loi des températures dans une sphère solide et homogène, dont la surface est en contact avec des sources constantes de chaleur et de froid, est nécessairement donnée par une série de la forme (10); U_n étant une fonction entière et rationnelle de ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et de ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, symétrique en ρ_1 et ρ_2, en $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$ et $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, en $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$ et $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, qui contient au plus $2n+1$ constantes arbitraires, et qui vérifie l'équation différentielle (18).

Nous allons démontrer qu'il est possible de trouver une fonction, jouissant de la symétrie indiquée, et qui soit de la forme

$$(19) \qquad U_n = SAE_1E_2;$$

E_1 et E_2 étant respectivement fonction de ρ_1 seul, et de ρ_2 seul; le produit E_1E_2 vérifiant séparément l'équation différentielle (18), et le nombre des produits différents qui jouissent de cette propriété étant $2n+1$. D'où il suivra que les coefficients A, dans la somme précédente, pouvant être au nombre de $2n+1$, et totalement indépendants les uns des autres, cette somme (19) pourra être prise pour la valeur la plus générale de U_n, ou pour l'intégrale complète de l'équation (18), dans les conditions que la question actuelle lui impose.

§ VI.

Soit posé $U_n = E_1E_2$ dans l'équation (18), on devra avoir

$$n(n+1)E_1E_2(\rho_1^2-\rho_2^2)+E_2\frac{d^2E_1}{dt_1^2}+E_1\frac{d^2E_2}{dt_2^2}=0,$$

ce qui exigera que l'on ait séparément

$$(20)\qquad \frac{d^2E_1}{dt_1^2}=[B-n(n+1)\rho_1^2]E_1,\quad \frac{d^2E_2}{dt_2^2}=[n(n+1)\rho_2^2-B]E_2,$$

B étant une constante. S'il est possible que U_n soit composable de termes de la forme E_1E_2, comme cette fonction doit être entière, rationnelle et symétrique en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, le produit E_1E_2 devra jouir de la même propriété. C'est-à-dire que E_1 sera un polynome entier et rationnel en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et E_2 le même polynome, dans lequel les trois variables précédentes seront remplacées par ρ_2, $\sqrt{b-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$.

On remarquera d'abord que les transcendantes (16) donnent

$$\frac{dE_1}{dt_1}=\frac{dE_1}{d\rho_1}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2},$$
$$\frac{d^2E_1}{dt_1^2}=\frac{d^2E_1}{d\rho_1^2}[-\rho_1^4+(b^2+c^2)\rho_1^2-b^2c^2]+\frac{dE_1}{d\rho_1}[(b^2+c^2)\rho_1-2\rho_1^3],$$
$$\frac{dE_2}{dt_2}=\frac{dE_2}{d\rho_2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2},$$
$$\frac{d^2E_2}{dt_2^2}=\frac{d^2E_2}{d\rho_2^2}[\rho_2^4-(b^2+c^2)\rho_2^2+b^2c^2]+\frac{dE_2}{d\rho_2}[2\rho_2^3-(b^2+c^2)\rho_2].$$

Si donc on pose pour simplifier,

$$(21)\qquad b^2+c^2=q,\quad b^2c^2=p,$$

les équations (20), en changeant les signes de la première, prennent la forme

$$(22)\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2E_1}{d\varrho_1^2}(\rho_1^4-q\rho_1^2+p)+\frac{dE_1}{d\varrho_1}(2\rho_1^3-q\rho_1)=[n(n+1)\rho_1^2-B]E_1,\\ \frac{d^2E_2}{d\varrho_2^2}(\rho_2^4-q\rho_2^2+p)+\frac{dE_2}{d\varrho_2}(2\rho_2^3-q\rho_2)=[n(n+1)\rho_2^2-B]E_2.\end{array}\right.$$

D'après la composition et la symétrie exigée pour les fonctions E_1 et E_2, et puisque les puissances paires des radicaux $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, sont des fonctions entières de ρ_1 et ρ_2, il est évident que E_1 ne pourra être que de l'une des quatre formes P_1, $Q_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $R_1\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, ou $S_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$; les fonctions P_1, Q_1, R_1, S_1, étant entières et rationnelles en ρ_1. E_2 aura pour forme correspondante P_2, $Q_2\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $R_2\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, $S_2\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}$; P_2, Q_2, R_2, S_2 ne différant de P_1, Q_1, R_1, S_1 qu'en ce que ρ_2 sera substitué à ρ_1.

Il faut se rappeler que u_n, exprimé en μ, est du degré n; qu'il ne contient que des puissances paires ou impaires de μ, suivant que n est pair ou impair; enfin que U_n est une somme de polynomes u_n de même degré et de même forme. On conclura facilement de ces propriétés, et de la valeur (15), que u_n, U_n, exprimés en ρ_1 et ρ_2, ainsi que le produit E_1E_2, sont du degré $2n$ par rapport aux six variables à la fois $(\rho_1, \rho_2, \sqrt{\rho_1^2-b^2}, \sqrt{b^2-\rho_2^2}, \sqrt{c^2-\rho_1^2}, \sqrt{c^2-\rho_2^2})$; que conséquemment E_1 est du degré n par rapport à ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et que dans chaque terme la somme des exposants de ces trois variables est toujours paire ou toujours impaire, suivant que n est de l'une ou de l'autre des formes $2i$, $2i+1$.

Dans le premier cas, ou pour $n=2i$, les quatre formes trouvées pour E_1, seront donc telles que P_1 et S_1 se composeront de puissances paires de ρ_1, P_1 étant du degré $2i$, et S_1 du degré $(2i-2)$; tandis que Q_1 et R_1 ne contiendront que des puissances impaires et seront du degré $(2i-1)$. Dans le second cas, ou pour $n=2i+1$, P_1 et S_1, formés de puissances impaires seulement, auront respectivement les degrés $(2i+1)$ et $(2i-1)$; tandis que Q_1 et R_1, ne contenant que des puissances paires de ρ_1, seront du degré $2i$. Il est nécessaire de considérer successivement ces deux cas généraux.

§ VII.

Soit $n=2i$, et soit pris d'abord $E_1=\alpha_0\rho_1^{2i}+\alpha_1\rho_1^{2i-2}+\ldots+\alpha_{i-1}\rho_1^2+\alpha_i$; les $(i+1)$ coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i$ devant être déterminés, ainsi que la constante B, par la condition que cette valeur de E_1 vérifie la première des équations (22).

Pour simplifier, convenons de représenter généralement par les symboles A_k et A'_k, les produits $2k(2k+1)$ et $2k(2k-1)$, qui diffèrent l'un de l'autre, en ce que le nombre pair $2k$ est multiplié par l'impair qui le suit pour A_k, et par celui qui le précède pour A'_k. Cette convention établie, il est facile de voir que la substitution du polynome proposé, dans la première des équations (22), conduira à identifier les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
&A_i\alpha_0\rho_1^{2i+2}+[A_{i-1}\alpha_1-(2i)^2q\alpha_0]\rho_1^{2i}+[A_{i-2}\alpha_2-(2i-2)^2q\alpha_1+A'_ip\alpha_0]\rho_1^{2i-2}\\
&\quad+[A_{i-3}\alpha_3-(2i-4)^2q\alpha_2+A'_{i-1}p\alpha_1]\rho_1^{2i-4}+\ldots+(A_2\alpha_{i-2}-36q\alpha_{i-3}+A'_4p\alpha_{i-4})\rho_1^6\\
&\quad+(A_1\alpha_{i-1}-16q\alpha_{i-2}+A'_3p\alpha_{i-3})\rho_1^4+(-4q\alpha_{i-1}+A'_2p\alpha_{i-2})\rho_1^2+A'_1p\alpha_{i-1}\\
&\quad=A_i\alpha_0\rho_1^{2i+2}+(A_i\alpha_1-B\alpha_0)\rho_1^{2i}+(A_i\alpha_2-B\alpha_1)\rho_1^{2i-2}+(A_i\alpha_3-B\alpha_2)\rho_1^{2i-4}+\ldots\\
&\quad+(A_i\alpha_{i-2}-B\alpha_{i-3})\rho_1^6+(A_i\alpha_{i-1}-B\alpha_{i-2})\rho_1^4+(A_i\alpha_i-B\alpha_{i-1})\rho_1^2-B\alpha_i.
\end{aligned}$$

Ces deux polynomes ont le même degré $(2i+2)$, le même nombre de termes $(i+2)$, le même premier terme; et leur identification complète conduit aux $(i+2)$ relations suivantes :

$$(23)\quad\left\{\begin{array}{ll}
(A_i-A_{i-1})\alpha_1=[B-(2i)^2q]\alpha_0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(A_i-A_{i-2})\alpha_2=[B-(2i-2)^2q]\alpha_1+A'_ip\alpha_0 & (A_i-A_1)\alpha_{i-1}=(B-16q)\alpha_{i-2}+A'_3p\alpha_{i-3},\\
(A_i-A_{i-3})\alpha_3=[B-(2i-4)^2q]\alpha_2+A'_{i-1}p\alpha_1 & A_i\alpha_i=(B-4q)\alpha_{i-1}+A'_2p\alpha_{i-2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0=B\alpha_i+A'_1p\alpha_{i-1}.
\end{array}\right.$$

Si l'on élimine α_i entre les deux dernières, il vient

$$0=[B(B-4q)+A'_1A_1p]\alpha_{i-1}+A'_2Bp\alpha_{i-2}.$$

Si l'on élimine α_{i-1} entre celle-ci et la troisième en remontant dans le groupe (23), il vient

$$\begin{aligned}
0=&\{[B(B-4q)+A'_1A_1p](B-16q)+A'_2B(A_i-A_1)p\}\alpha_{i-2}\\
&+A'_3[B(B-4q)+A'_1A_1p]\,p\alpha_{i-3};
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Or, en continuant ainsi à supprimer successivement, à partir d'en bas, une des équations du groupe (23), ce qui augmente à chaque fois d'une unité le plus haut exposant de B dans la dernière conservée, on arrive nécessairement à une seule équation de la forme $o = M\alpha_0$, M étant un polynome en B du degré $(i+1)$; et comme α_0 ne peut être nul, il faut que $M=o$. Cette équation finale, du degré $i+1$ en B, a toutes ses racines réelles, comme il sera démontré plus bas. A chacune de ces racines correspondra un seul système de valeurs des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i$, puisque les équations (23) sont du premier degré par rapport à ces coefficients; α_0 restera seul indéterminé, et entrera comme facteur dans la valeur de chacun des autres; on pourra le supposer égal à l'unité.

Il existe donc $(i+1)$ polynomes de la forme

$$E_1 = \rho_1^{2i} + \alpha_1\rho_1^{2i-2} + \alpha_2\rho_1^{2i-4} + \ldots + \alpha_{i-1}\rho_1^2 + \alpha_i,$$

correspondant à $(i+1)$ valeurs de la constante B, qui vérifient la première des équations (22) pour $n=2i$. A cause de l'identité de forme de ces deux équations (22) le polynome

$$E_2 = \rho_2^{2i} + \alpha_1\rho_2^{2i-2} + \alpha_2\rho_2^{2i-4} + \ldots + \alpha_{i-1}\rho_2^2 + \alpha_i,$$

ayant mêmes coefficients que E_1, vérifiera la seconde pour les mêmes valeurs de B. Ainsi, lorsque $n=2i$, l'équation (18) est vérifiable par $i+1$ produits différents de la forme $U=E_1E_2$, E_1 et E_2 étant des polynomes à puissances paires de ρ_1 et ρ_2, du degré $2i$, et ayant mêmes coefficients.

§ VIII.

Soit, toujours dans le cas de $n=2i$, $E_1 = Q_1\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $E_2 = Q_2\sqrt{b^2-\rho_2^2}$; on a, par deux différentiations successives,

$$\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = \left\{\frac{d^2Q_1}{d\rho_1^2}(-\rho_1^4+q\rho_1^2-p) + \frac{dQ_1}{d\rho_1}[(q+2c^2)\rho_1 - 4\rho_1^3] + Q_1(c^2-2\rho_1^2)\right\}\sqrt{\rho_1^2-b^2},$$

$$\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = \left\{\frac{d^2Q_2}{d\rho_2^2}(\rho_2^4-q\rho_2^2+p) + \frac{dQ_2}{d\rho_2}[4\rho_2^3 - (2c^2+q)\rho_2] + Q_2(2\rho_2^2-c^2)\right\}\sqrt{b^2-\rho_2^2}.$$

et les équations (20) deviennent, en supprimant les facteurs communs $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{b^2 - \rho_2^2}$, et par un simple changement de signe :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 Q_1}{d\varepsilon_1^2}(\rho_1^4 - q\rho_1^2 + p) + \frac{dQ_1}{d\varepsilon_1}[4\rho_1^3 - (q + 2c^2)\rho_1] \\ &\qquad\qquad = \{[n(n+1) - 2]\rho_1^2 - (B - c^2)\}\,Q_1, \\ &\frac{d^2 Q_2}{d\varepsilon_2^2}(\rho_2^4 - q\rho_2^2 + p) + \frac{dQ_2}{d\varepsilon_2}[4\rho_2^3 - (q + 2c^2)\rho_2] \\ &\qquad\qquad = \{[n(n+1) - 2]\rho_2^2 - (B - c^2)\}\,Q_2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose maintenant $Q_1 = \alpha_0\rho_1^{2i-1} + \alpha_1\rho_1^{2i-3} + \ldots + \alpha_{i-2}\rho_1^3 + \alpha_{i-1}\rho_1$, dans la première de ces équations, on est conduit à identifier deux polynomes, ne contenant que des puissances impaires de ρ_1, ayant même degré $2i+1$, même nombre de termes $i+1$, et même premier terme $(A_i - 2)\alpha_0\rho_1^{2i+1}$. Cette identification donne i relations du premier degré par rapport aux i coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}$; et l'on parvient à une équation finale en B du degré i; à chacune des racines de cette équation correspond un système unique de valeurs des $(i-1)$ coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}$, lesquelles contiennent toutes α_0 comme facteur, et l'on peut poser $\alpha_0 = 1$. A cause de l'identité de forme des équations (24), les deux polynomes Q_1 et Q_2 correspondant à la même valeur de B, ont les mêmes coefficients.

Ainsi l'équation (18), quand $n = 2i$, peut être vérifiée par i produits de la forme $U = Q_1 Q_2 \sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}$, Q_1 et Q_2 étant des polynomes à puissances impaires de ρ_1, ρ_2, du degré $(2i-1)$, et ayant mêmes coefficients.

On démontre de la même manière, que l'équation (18) est vérifiable par i produits distincts de la forme $U = R_1 R_2 \sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$, R_1 et R_2 étant des polynomes à puissances impaires de ρ_1 et ρ_2, du degré $(2i-1)$, et ayant mêmes coefficients.

Enfin, toujours pour $n = 2i$, soit $E_1 = S_1 \sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, $E_2 = S_2 \sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$; deux différentiations successives donnent

$$\frac{d^2 E_1}{d\varepsilon_1^2} = \left[\frac{d^2 S_1}{d\varepsilon_1^2}(-\rho_1^4 + q\varepsilon_1^2 - p) + 3\,\frac{dS_1}{d\varepsilon_1}(q\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1^3) + S_1(q - 6\varepsilon_1^2)\right]\sqrt{\varepsilon_1^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \varepsilon_1^2},$$

$$\frac{d^2 E_2}{d\varepsilon_2^2} = \left[\frac{d^2 S_2}{d\varepsilon_2^2}(\varepsilon_2^4 - q\varepsilon_2^2 + p) + 3\,\frac{dS_2}{d\varepsilon_2}(2\varepsilon_2^3 - q\varepsilon_2) + S_2(6\varepsilon_2^2 - q)\right]\sqrt{b^2 - \varepsilon_2^2}\,\sqrt{c^2 - \varepsilon_2^2};$$

et ces valeurs substituées dans les équations (20) les transforment ainsi

$$(25)\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2S_1}{d\rho_1^2}(\rho_1^4-q\rho_1^2+p)+3\frac{dS_1}{d\rho_1}(2\rho_1^3-q\rho_1)=\{[n(n+1)-6]\rho_1^2-(B-q)\}S_1,\\&\frac{d^2S_2}{d\rho_2^2}(\rho_2^4-q\rho_2^2+p)+3\frac{dS_2}{d\rho_2}(2\rho_2^3-q\rho_2)=\{[n(n+1)-6]\rho_2^2-(B-q)\}S_2.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose maintenant $S_1=\alpha_0\rho_1^{2i-2}+\alpha_1\rho_1^{2i-4}+\ldots+\alpha_{i-2}\rho_1^2+\alpha_{i-1}$, dans la première de ces équations, les polynomes qu'il faut identifier ne contiennent que des puissances paires de ρ_1, ont le même degré $2i$, le même nombre de termes $(i+1)$, et le même premier terme $(A_i-6)\alpha_0\rho_1^{2i}$. On a alors i relations du premier degré par rapport aux i coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}$; et l'équation finale en B est encore du degré i. Les deux équations (25) ayant la même forme, les polynomes S_1 et S_2 correspondant à la même valeur de B ont les mêmes coefficients.

Ainsi l'équation (18), pour $n=2i$, est encore satisfaite par i produits distincts, de forme $U=S_1S_2\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}$ S_1 et S_2 étant des polynomes à puissances paires de ρ_1 et ρ_2, du degré $(2i-2)$, et ayant mêmes coefficients.

§ IX.

En résumé, dans le cas de $n=2i$, les équations (20) sont vérifiables par $(4i+1)$ ou $(2n+1)$ groupes de fonctions E_1 et E_2, entières, rationnelles et symétriques en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$; chaque groupe est caractérisé par une valeur particulière de la constante B; les $(4i+1)$ valeurs de B sont les racines de quatre équations, l'une de degré $i+1$, et les trois autres de degré i. L'équation (18) est alors vérifiable séparément par le produit des deux fonctions de chaque groupe, et U_n peut être égalé à la somme de ces $(2n+1)$ produits distincts, respectivement multipliés par autant de coefficients arbitraires.

On arrive à des conclusions semblables dans le cas de n impair, ou égal à $2i+1$. En effet, on s'assure facilement qu'en substituant à E_1, dans la première des équations (22), un polynome P_1 à puissances impaires de ρ_1, et du degré $2i+1$, l'équation finale en B qu'exige la vérification est du degré $i+1$. Si, n étant toujours égal à $2i+1$, on pose à la place de Q_1 dans la première des équations (24), un polynome à puissances paires de ρ_1 du degré $2i$, l'identification des deux membres conduit encore à une équation finale en B du degré $(i+1)$. Enfin si dans la première des équations (25) on pose $n=2i+1$, et que l'on prenne pour S_1 un polynome à puissances impaires du degré $2i-1$, l'équation finale en B exigée par la vérification est du degré i.

En résumé : dans le cas de $n=2i+1$, les équations (20) sont vérifiables par $(4i+3)$ ou $(2n+1)$ groupes de fonctions E_1 et E_2, entières, rationnelles et symétriques en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$; chaque groupe est particularisé par une valeur de la constante B ; les $(4i+3)$ valeurs de B sont les racines de quatre équations, trois de degré $(i+1)$, et la quatrième de degré i. D'où il suit que l'équation (18) est encore vérifiable par $2n+1$ produits distincts. Les conséquences déduites de l'équation (19) se trouvent ainsi justifiées dans tous les cas.

§ X.

Il importe de remarquer que tous les polynomes E_1, dont on vient d'analyser la forme et le nombre, sont tels que l'une des deux fonctions E_1 et $\frac{dE_1}{d\iota_1}$, s'évanouit à chacune des deux limites de la variable ρ_1, lesquelles sont $\rho_1=b$, et $\rho_1=c$; et que pareillement tous les polynomes E_2 sont tels que l'une des deux fonctions E_2 et $\frac{dE_2}{d\iota_2}$ est nulle, à chacune des deux limites de la variable ρ_2, lesquelles sont $\rho_2=0$, et $\rho_2=b$.

En effet : 1°. Dans le cas où E_1 et E_2 sont rationnels en ρ_1 et ρ_2,

on a $\frac{dE_1}{d\iota_1}=\frac{dE_1}{d\rho_1}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $\frac{dE_2}{d\iota_2}=\frac{dE_2}{d\rho_2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}$,

et l'on voit de suite que $\frac{dE_1}{d\iota_1}$ s'évanouit aux deux limites de ρ_1, $\frac{dE_2}{d\iota_2}$ à celle b de ρ_2 ; et que E_2, ou $\frac{dE_2}{d\iota_2}$ sera nul pour $\rho_2=0$, suivant que E_2 contiendra des puissances impaires ou paires, de ρ_2.

2°. Lorsque E_1 et E_2 sont de la forme $Q_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $Q_2\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, on a

$$\frac{dE_1}{d\epsilon_1}=\left[\frac{dQ_1}{d\varrho_1}(\rho_1^2-b^2)+Q_1\rho_1\right]\sqrt{c^2-\rho_1^2},\ \frac{dE_2}{d\epsilon_2}=\left[\frac{dQ_2}{d\varrho_2}(b^2-\rho_2^2)-Q_2\rho_2\right]\sqrt{c^2-\rho_2^2};$$

alors $E_1=0$ pour $\rho_1=b$; $\frac{dE_1}{d\epsilon_1}=0$ pour $\rho_1=c$; $E_2=0$ pour $\rho_2=b$; pour $\rho_2=0$, c'est encore E_2 qui s'évanouit si le polynome Q_2 ne contient que des puissances impaires de ρ_2, et l'on a $\frac{dE_2}{d\epsilon_2}=0$ dans le cas contraire.

3°. Quand E_1 et E_2 sont de la forme $R_1\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $R_2\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, on a

$$\frac{dE_1}{d\epsilon_1}=\left[\frac{dR_1}{d\varrho_1}(c^2-\rho_1^2)-R_1\rho_1\right]\sqrt{\rho_1^2-b^2},\ \frac{dE_2}{d\epsilon_2}=\left[\frac{dR_2}{d\varrho_2}(c^2-\rho_2^2)-R_2\rho_2\right]\sqrt{b^2-\rho_2^2};$$

alors $\frac{dE_1}{d\epsilon_1}=0$ pour $\rho_1=b$; $E_1=0$ pour $\rho_1=c$; $\frac{dE_2}{d\epsilon_2}=0$ pour $\rho_2=b$; enfin pour $\rho_2=0$, E_2, ou $\frac{dE_2}{d\epsilon_2}$, s'évanouit suivant que le polynome R_2 est à puissances impaires ou paires de ρ_2.

4°. Enfin, lorsque E_1 et E_2 ont la forme $S_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $S_2\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, E_1 s'évanouit aux deux limites de ρ_1, E_2 à celle B de ρ_2; et pour $\rho_2=0$, on a $E_2=0$, ou $\frac{dE_2}{d\epsilon_2}=0$, suivant que le polynome S_2 est à puissances impaires ou paires.

Le théorème énoncé plus haut a donc lieu dans tous les cas. D'où il suit qu'en désignant par E_1 et E_1', ou par E_2 et E_2', deux fonctions différentes E_1, ou E_2, appartenant à la même forme et du même degré; c'est-à-dire deux fonctions correspondant à la même valeur de n, et de plus caractérisées par deux racines différentes de la même équation en B, l'expression $\left(E_1\frac{dE_1'}{d\epsilon_1}-E_1'\frac{dE_1}{d\epsilon_1}\right)$, ou $\left(E_2\frac{dE_2'}{d\epsilon_2}-E_2'\frac{dE_2}{d\epsilon_2}\right)$, s'évanouira nécessairement aux deux limites de ρ_1, ou de ρ_2.

§ XI.

Il est facile de prouver, à l'aide de cette dernière propriété, que toutes les racines des équations finales en B sont réelles. En effet, supposons qu'une quelconque de ces équations ait une racine égale à $B' + B''\sqrt{-1}$, B' et B'' étant réels; le polynome E_1 correspondant sera de la forme $E' + E''\sqrt{-1}$; E' et E'' étant deux nouveaux polynomes en ρ_1, dont les coefficients sont réels. Mais l'existence de la racine $B' + B''\sqrt{-1}$, exige que la même équation en ait une autre égale à $B' - B''\sqrt{-1}$, car les coefficients de toutes les équations en B sont essentiellement réels; à cette nouvelle racine correspondra un nouveau polynome E_1 égal à $E' - E''\sqrt{-1}$. Si l'on substitue les deux valeurs $(E' + E''\sqrt{-1})$, $(E' - E''\sqrt{-1})$, à E_1, E'_1, dans l'expression $\left(E_1 \frac{dE'_1}{d\rho_1} - E'_1 \frac{dE_1}{d\rho_1}\right)$ qui s'évanouit aux deux limites de ρ_1 (§ X), elle devient $\left(E'' \frac{dE'}{d\rho_1} - E' \frac{dE''}{d\rho_1}\right)\sqrt{-1}$; d'où il suit que l'expression $\left(E' \frac{dE''}{d\rho_1} - E'' \frac{dE'}{d\rho_1}\right)$ doit être nulle pour $\rho_1 = b$, $\rho_1 = c$.

Cela posé, la valeur $E_1 = E' + E''\sqrt{-1}$, qui correspond à $B = B' + B''\sqrt{-1}$, doit vérifier la première des équations (20); on a donc

$$\frac{d^2E'}{d\rho_1^2} + \frac{d^2E''}{d\rho_1^2}\sqrt{-1} = [B' + B''\sqrt{-1} - n(n+1)\rho_1^2](E' + E''\sqrt{-1}),$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$\frac{d^2E'}{d\rho_1^2} = [B' - n(n+1)\rho_1^2]E' - B''E'', \quad \frac{d^2E''}{d\rho_1^2} = [B' - n(n+1)\rho_1^2]E'' + B''E',$$

d'où l'on conclut par l'élimination du binome en ρ_1^2:

$$E' \frac{d^2E''}{d\rho_1^2} - E'' \frac{d^2E'}{d\rho_1^2} = B''(E'^2 + E''^2).$$

Or, si l'on multiplie les deux membres de cette équation par

$d\epsilon_1 = \frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}$, et qu'on intègre de $\rho_1 = b$ à $\rho_1 = c$, le premier membre, dont l'intégrale indéfinie est $\left(E' \frac{dE''}{d\epsilon_1} - E'' \frac{dE'}{d\epsilon_1}\right)$, s'évanouissant aux deux limites, il faudra que le second membre soit nul. C'est-à-dire que l'on devrait avoir

$$B'' \int_b^c \frac{(E'^2 + E''^2)\, d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} = 0,$$

condition impossible, si B'' n'est pas nul; car l'intégrale ne saurait s'évanouir, puisque la différentielle reste essentiellement positive entre les limites de la variable. Donc B'' est nul, et toutes les racines B sont réelles.

§ XII.

Il résulte de notre analyse, que la loi des températures stationnaires, dans une sphère maintenue au contact de sources constantes de chaleur et de froid, et qui est représentée par la série (10), peut pareillement être exprimée par la nouvelle série :

$$(26) \qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n S_n\, M E_1 E_2.$$

Le sigma s'étend à toutes les valeurs positives du nombre entier n; la somme S_n peut comprendre $2n + 1$ termes pour chaque valeur de n; E_1 et E_2 sont les fonctions polynomes, dont les §§ VI, VII, VIII, IX, définissent la forme et la composition.

Pour achever la solution de la sphère, à l'aide de la nouvelle série (26), il resterait à donner une méthode pour déterminer les coefficients M, par la condition que, pour $r = r_0$, la fonction V devînt une fonction donnée des deux coordonnées ρ_1 et ρ_2. Mais comme cette nouvelle solution complète, du système sphérique, n'a par elle-même aucun avantage pratique sur celle adoptée par les géomètres, nous ne la donnerons pas ici. On pourra d'ailleurs la déduire facilement de la solution du système ellipsoïdal, à laquelle il est temps de revenir.

§ XIII.

Les considérations, exposées dans la Note descriptive placée au commencement de ce Mémoire, et que nous ne répéterons pas ici, conduisent à prendre pour exprimer la loi des températures permanentes dans l'ellipsoïde à axes inégaux, lorsque sa surface est en contact avec des sources de chaleur et de froid, une série de la forme

$$(27)\qquad V=\sum_{n=0}^{n=\infty} S_n MEE_1E_2.$$

E_1 et E_2 sont les mêmes fonctions de ρ_1 et de ρ_2 que dans la série (26) relative à la sphère, ou celles qui vérifient les équations (20). E est une fonction encore inconnue du paramètre ρ, mais qui doit être déterminée par la condition que le produit EE_1E_2 vérifie l'équation générale (8).

Si l'on pose $V=EE_1E_2$ dans cette équation (8), on trouve, en remarquant que E est seulement fonction de ρ, ou de la transcendante ε (7),

$$(28)\quad (\rho_1^2-\rho_2^2)E_1E_2\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}+(\rho^2-\rho_2^2)E_2E\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2}+(\rho^2-\rho_1^2)EE_1\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2}=0.$$

Or, des équations (20), on déduit aisément

$$E_2\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2}+E_1\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2}=-n(n+1)(\rho_1^2-\rho_2^2)E_1E_2,\quad \rho_2^2E_2\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2}+\rho_1^2E_1\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2}=-B(\rho_1^2-\rho_2^2)E_1E_2,$$

et ces valeurs substituées dans l'équation (28) la transforment ainsi

$$(\rho_1^2-\rho_2^2)\,E_1E_2\left[\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}-n(n+1)\,\rho^2E+BE\right]=0;$$

ce qui exige que l'on ait

$$(29)\qquad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2}=[n(n+1)\rho^2-B]E,$$

ou bien, d'après la valeur (7) de la transcendante ε,

$$(30)\quad \frac{d^2E}{d\rho^2}(\rho^4-q\rho^2+p)+\frac{dE}{d\rho}(2\rho^3-q\rho)=[n(n+1)\rho^2-B]E.$$

Cette équation ayant une forme identique avec celle (22), E pourra être un polynome en ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$, composé de la même manière que E_1 l'est en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et que E_2 l'est en ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$. Une intégrale plus complète de l'équation (29) ou (30) n'est pas nécessaire, dans la question physique qui nous occupe; car si l'on prenait une valeur plus générale de E, la série (27) ne comprendrait plus celle (26), ce qui doit toujours être.

§ XIV.

En effet, les ellipsoïdes au paramètre ρ, représentés par la première des équations (3), vont en s'approchant de plus en plus de la forme sphérique, à mesure que ρ augmente, comparativement aux constantes b et c; ces ellipsoïdes deviennent donc des sphères, quand on donne au paramètre ρ des valeurs infiniment plus grandes que b et c, ou quand b et c deviennent infiniment petits. Or, comme la série, qui donnera la solution du système ellipsoïdal à axes inégaux, ne doit rien spécifier sur les grandeurs absolues et relatives des distances focales principales $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2-b^2}$, elle sera vraie pour toutes les valeurs de b et c, pour celles infiniment petites comme pour celles finies; cette série devra donc comprendre celle (26), que l'on devra pouvoir en déduire, en donnant aux constantes b et c des valeurs infiniment petites.

On remarquera maintenant que tous les polynomes E, E_1, E_2, de degré n, sont homogènes; que le coefficient de leur premier terme étant l'unité, les coefficients des autres termes doivent être des nombres, multipliés par des puissances de b et c, qui réunies à l'exposant de la variable, donnent à tous ces termes le même degré n. Lors donc que l'on supposera ρ infiniment plus grand que b et c, le polynome E se réduira à son premier terme ρ^n (soit r^n); et il en sera de même de tous les polynomes E correspondants à la même valeur de n, et aux différentes valeurs de la constante B.

Quant aux polynomes E_1 et E_2, leur forme ne sera pas changée, et ils conserveront tous leurs termes: car ρ_1 étant toujours compris entre b et c, et ρ_2 toujours moindre que b, il faudra remplacer dans ces polynomes les variables ρ_1 et ρ_2, et les constantes b et c, par $\alpha\rho'_1$, $\alpha\rho'_2$, $\alpha b'$, $\alpha c'$; la quantité α étant infiniment petite, et ρ'_1, ρ'_2, b', c' des variables et des constantes finies; ce qui transformera E_1 et E_2, en $\alpha^n E'_1$ et $\alpha^n E'_2$, d'après l'homogénéité établie; E'_1 et E'_2 ayant absolument la même forme et la même composition en ρ'_1, ρ'_2, b' et c', que E_1 et E_2 en ρ_1, ρ_2, b et c. Le facteur α^{2n} qui apparaîtra alors dans le terme général de la série, se confondra avec le coefficient M arbitraire, ou devra disparaître comme commun à son dénominateur transformé, si ce coefficient est déterminé.

Il faut remarquer, en outre, que cette réduction de la série (27) en celle (26), est accompagnée d'une transformation des équations (3) représentant les surfaces coordonnées du système ellipsoïdal, en celles (13) appartenant au système sphérique rapporté à des cônes obliques. En effet, d'une part, la première des équations (3), lorsque b et c sont infiniment plus petits que ρ, se réduit à.... $x^2+y^2+z^2=\rho^2=r^2$; et d'autre part, la substitution de $\alpha\rho'_1$, $\alpha\rho'_2$, $\alpha b'$, $\alpha c'$, à ρ_1, ρ_2, b, c, dans les deux dernières équations (3), puis l'annulation de α, et enfin la suppression des accents, conduisent aux équations (13).

Ainsi la série (27), dans laquelle E est une fonction rationnelle, entière et du degré n, de ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$, comprend, comme cela devait être, celle (26) relative à la sphère; ce qui n'aurait plus lieu, si l'on prenait pour E une intégrale plus générale de l'équation (30).

Cette liaison nécessaire entre les séries (27) et (26) étant vérifiée, on doit être convaincu que la série (27) est tout aussi générale qu'il le faut, pour représenter la loi des températures permanentes de l'ellipsoïde, dans la question qui nous occupe. Car si cela n'était pas, il s'ensuivrait nécessairement que la série (26), ou celle (10) dont elle n'est qu'une transformation, serait incapable de fournir la solution correspondante pour le système sphérique; conséquence démentie par les travaux de nos premiers géomètres.

Ayant ainsi démontré que la loi des températures, que nous cherchons, doit pouvoir être représentée par la série (27), dont la forme est essentielle et suffisante, il reste à trouver le moyen général de déterminer les coefficients M de ses différents termes, par la condition que sur la surface de l'ellipsoïde (1), ou pour $\rho = \rho_0$, V se réduise à une fonction donnée $\varphi(\rho_1, \rho_2)$ de ρ_1 et ρ_2. Mais pour faciliter cette recherche, il convient de distinguer différents cas, où la fonction φ satisfait à des conditions diverses.

§ XV.

La fonction V étant de la forme définie par l'équation (27), son développement peut être écrit ainsi :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} V = {} & P + Q\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2} + R\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2} \\ & + S\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}, \end{aligned}\right.$$

P, Q, R, S étant des séries de termes rationnelles en ρ, ρ_1, ρ_2, et ne contenant que des puissances positives de ces variables. Cette forme (31) est d'ailleurs une conséquence nécessaire du choix des coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, et des limites imposées à la question physique qu'il s'agit de représenter.

En effet, quelle que soit la fonction définitive V, si on l'imagine exprimée en coordonnées rectilignes x, y, z, elle devra pouvoir se développer suivant les puissances ascendantes de ces variables, sans que la série contienne des puissances négatives ; car la température ne saurait devenir infinie quand une des coordonnées est nulle, c'est-à-dire pour des points intérieurs de l'ellipsoïde situés sur les plans de ses sections principales. Or il sera toujours possible de grouper ce développement de V en x, y, z, de cette manière

$$V = P + P'x + P''y + P'''z + P_3 yz + P_2 zx + P_1 xy + P_0 xyz,$$

P, $P', \ldots P_1$, P_0, étant des fonctions de x^2, y^2, z^2; et si l'on substitue maintenant aux coordonnées x, y, z leurs valeurs en ρ, ρ_1, ρ_2, données par les formules (4), l'expression précédente de V sera ainsi transformée

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} V = {} & (Q + Q'\rho\rho_1\rho_2) + (Q_3 + Q_0\rho\rho_1\rho_2)\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2} \\ & + (Q'' + Q_1\rho\rho_1\rho_2)\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2} + (Q''' + Q_2\rho\rho_1\rho_2)\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}, \end{aligned}\right.$$

Q, Q', ... Q_1, Q_0, étant des fonctions rationnelles de ρ^2, ρ_1^2, ρ_2^2; et cette forme n'est autre que celle (31) déduite de la série (27).

Sur la surface de l'ellipsoïde, ou quand $\rho = \rho_0$, la fonction V(32), qui n'est plus qu'à deux variables, sera de la forme

$$(33) \left\{ \begin{aligned} V_0 = & (q + q'\rho_1\rho_2) + (q'' + q_1\rho_1\rho_2)\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2} \\ & + (q''' + q_2\rho_1\rho_2)\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2} + (q_3 + q_0\rho_1\rho_2)\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}, \end{aligned} \right.$$

q, q', ... q_1, q_0, étant des fonctions rationnelles de ρ_1^2 et ρ_2^2.

L'expression (32) de la température dans l'ellipsoïde, et celle (33) des températures de la surface, se trouvent ainsi composées chacune de huit parties correspondantes, jouissant de propriétés distinctes, et appartenant à huit états particuliers qui se superposent dans le cas général. Afin de définir ces huit cas partiels, il importe de rappeler ici comment les coordonnées elliptiques changent de signes, pour représenter tous les points de l'espace.

§ XVI.

On peut prendre pour paramètres des surfaces conjuguées, les trois transcendantes elliptiques de première espèce, et de variétés différentes, données par les équations (7). Chacune de ces variables exprime, comme je l'ai démontré dans un autre Mémoire, la température qui existerait sur la surface coordonnée correspondante, en considérant son système, pris isolément, comme un système de surfaces isothermes. Les axes ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, sont alors des fonctions périodiques de la transcendante ε, que nous désignerons par $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$. Les axes ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, de l'hyperboloïde isotherme à une nappe, sont pareillement des fonctions périodiques $A_1(\varepsilon_1)$, $B_1(\varepsilon_1)$, $C_1(\varepsilon_1)$, de ε_1. Enfin les axes ρ_2, $\sqrt{b^2 - \rho_2^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$, de l'hyperboloïde isotherme à deux nappes sont des fonctions, toujours périodiques, $A_2(\varepsilon_2)$, $B_2(\varepsilon_2)$, $C_2(\varepsilon_2)$, de ε_2.

Or il résulte des propriétés élémentaires, et des relations réciproques des neuf fonctions (A, B, C), (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), que trois d'entre elles (A_2, B_1, C), changent de signe avec la variable, tout en conservant la même valeur absolue, tandis que les six autres (A, B), (C_1, A_1), (B_2, C_2) conservent le même signe avec la même valeur. Les trois fonctions (A_2, B_1, C) sont d'ailleurs les seules qui s'évanouissent lorsque leurs variables sont nulles, ou pour les limites inférieures des coordonnées.

Ainsi, des neuf quantités, ρ, ρ_1, ρ_2, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, introduites par le système de coordonnées que nous avons dû choisir, les seules pour lesquelles il soit nécessaire d'admettre des valeurs négatives, sont ρ_2, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$. Les formules (4) établissent une relation directe et très simple, entre les changements de signe de ces trois fonctions, et ceux des coordonnées rectilignes : x changeant de signe avec ρ_2, y avec $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, z avec $\sqrt{\rho^2-c^2}$. C'est-à-dire qu'en passant de la droite à la gauche du plan de la plus petite section faite dans l'ellipsoïde donné, ou de l'avant à l'arrière de la section moyenne, ou enfin du dessus au dessous du plan de la plus grande section, il faut changer le signe de ρ_2, ou de $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, ou de $\sqrt{\rho^2-c^2}$.

§ XVII.

Il sera facile de définir maintenant les huit états partiels, correspondant aux huit termes généraux du développement V(32). Car si V se réduit à un seul de ces termes, et que ce terme unique ne change pas de signe avec ρ_2, ou $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, ou $\sqrt{\rho^2-c^2}$, on en conclura que, dans l'état partiel considéré, les températures de la surface, et par suite celles de l'intérieur, sont distribuées symétriquement de part et d'autre de la section minimum, ou moyenne, ou maximum; tandis que s'il y a changement de signe, la symétrie n'existera que pour les valeurs absolues, ou sera en quelque sorte inverse, les températures étant positives d'un côté, négatives de l'autre côté du plan dont il s'agit, et nulles sur ce plan lui-même.

Quelle que soit la fonction donnée $\varphi(\rho_1, \rho_2)$, elle pourra toujours être décomposée en huit fonctions partielles, dont elle sera la somme, et qui satisferont respectivement aux conditions de symétrie, directe ou inverse, qui caractérisent les huit termes généraux de la série V(32), ou plutôt V_o(33). A chacune des fonctions partielles devra correspondre un groupe de termes de la série (27), qui jouissent des mêmes conditions de symétrie; et les coefficients de ces termes pourront être déterminés, à l'aide de cette fonction partielle, par la méthode générale que nous allons exposer. Cette opération étant faite pour les huit parties de la fonction φ, et les groupes correspondants ayant leurs coefficients déterminés, la somme composera la valeur générale de V. Nous ne considérerons en détail que les opérations relatives à un seul de ces groupes, on reconnaîtra facilement par la suite qu'elles seraient absolument les mêmes pour chacun des autres.

§ XVIII.

L'état partiel défini par le seul terme général Q, du développement (32), est celui que nous allons traiter particulièrement. Dans cet état, les sources constantes de chaleur et de froid à la surface de l'ellipsoïde, et par suite les températures permanentes de l'intérieur sont à la fois distribuées symétriquement par rapport aux plans des trois sections principales. C'est-à-dire que V doit conserver la même valeur et le même signe, quand on change ρ_2 en $-\rho_2$, ou $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$ en $-\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, ou $\sqrt{\rho^2-c^2}$ en $-\sqrt{\rho^2-c^2}$.

Les seuls termes de la série (27) qu'il faille conserver dans ces circonstances, ou qui composent le groupe partiel que nous avons en vue, seront ceux où E, E_1, E_2, toujours formés de la même manière, seront complétement rationnels en ρ, ρ_1, ρ_2, et ne contiendront que des puissances paires de ces variables. Ainsi les termes où E_1 a l'une des formes $Q_1 \sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $R_1 \sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $S_1 \sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, définies au § VI, sont exclus; et l'on ne doit prendre aucun des termes correspondant à des valeurs impaires du nombre n.

Il suit de là que pour tous les termes conservés, on aura $\frac{dE_1}{d\iota_1}=0$, aux deux limites de ρ_1, et $\frac{dE_2}{d\iota_2}=0$, à celles de ρ_2. D'où l'on déduit comme conséquence, que E_1 et E_1', ou E_2 et E_2, représentant deux valeurs quelconques de la fonction E_1, ou E_2, prises dans deux termes différents du groupe actuel, ou qui correspondent à des valeurs différentes de n ou de B, l'expression $\left(E_1 \frac{dE'_1}{d\varepsilon_1} - E'_1 \frac{dE_1}{d\varepsilon_1}\right)$, ou...... $\left(E_2 \frac{dE'_2}{d\varepsilon_2} - E'_2 \frac{dE_2}{d\varepsilon_2}\right)$ s'évanouit nécessairement aux deux limites de ρ_1, ou de ρ_2.

Ce théorème conduit très simplement à la détermination des coefficients M de la série (27) dans le cas actuel. Pour la surface de l'ellipsoïde, cette série (27) donne

$$V_0 = \sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i} . ME(\rho_0)E_1E_2,$$

$E(\rho_0)$ représentant la constante à laquelle se réduit E pour $\rho = \rho_0$. V_0 étant donné en ρ_1 et ρ_2, par une fonction partielle $\psi(\rho_1, \rho_2)$ jouissant des conditions de symétrie supposées, on doit avoir

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i} . NE_1E_2 = \psi(\rho_1, \rho_2), \tag{34}$$

N représentant le produit ME (ρ_0). Pour déterminer le coefficient général de la série (34), qui la rende identique à la fonction donnée ψ, on peut encore employer ici la méthode générale d'élimination, que l'on retrouve dans toutes les questions de la théorie analytique de la chaleur : c'est-à-dire, multiplier l'équation (34) par $\sigma d\rho_1 d\rho_2$, et intégrer les deux membres entre les limites de ρ_1 et ρ_2; le facteur σ étant tellement choisi que dans cette intégration tous les termes de la série disparaissent à l'exception d'un seul. Et c'est la nature de ce facteur σ qui est indiquée par le théorème précédent.

§ XIX.

Soient E_1E_2, $E'_1E'_2$, deux termes différents de la série (34), $2i$ et $2i'$ les valeurs de n, B et B' celles de la constante B qui leur correspondent; et désignons par A et A' les deux produits $2i(2i+1)$, $2i'(2i'+1)$. Les polynomes E_1, E_2, E'_1, E'_2, vérifieront les quatre équations différentielles suivantes

$$\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = (B - A\rho_1^2)E_1, \quad \frac{d^2E'_1}{d\varepsilon_1^2} = (B' - A'\rho_1^2)E'_1,$$
$$\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = (A\rho_2^2 - B)E_2, \quad \frac{d^2E'_2}{d\varepsilon_2^2} = (A'\rho_2^2 - B')E'_2;$$

d'où l'on conclut facilement

$$E_1\frac{d^2E'_1}{d\varepsilon_1^2} - E'_1\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = (A - A')\rho_1^2E_1E'_1 - (B - B')E_1E'_1,$$
$$E_2\frac{d^2E'_2}{d\varepsilon_2^2} - E'_2\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = (B - B')E_2E'_2 - (A - A')\rho_2^2E_2E'_2.$$

Or, si l'on multiplie respectivement ces deux équations par $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, et qu'on intègre leurs deux membres entre les limites b et c de ρ_1, zéro et b de ρ_2, ou bien zéro et ϖ_1 (44) de ε_1, zéro et ϖ_2 de ε_2, les premiers membres dont les intégrales indéfinies sont $\left(E_1\frac{dE'_1}{d\varepsilon_1} - E'_1\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}\right)$, $\left(E_2\frac{dE'_2}{d\varepsilon_2} - E'_2\frac{dE_2}{d\varepsilon_2}\right)$ s'évanouissent aux deux limites de l'intégration, et l'on aura définitivement

$$(35)\quad \begin{cases} (A - A')\int_0^{\varpi_1}\rho_1^2E_1E'_1d\varepsilon_1 = (B - B')\int_0^{\varpi_1}E_1E'_1d\varepsilon_1, \\ (B - B')\int_0^{\varpi_2}E_2E'_2d\varepsilon_2 = (A - A')\int_0^{\varpi_2}\rho_2^2E_2E'_2d\varepsilon_2. \end{cases}$$

Si aucun des facteurs $(A - A')$, $(B - B')$ n'est nul, on aura, en multipliant l'une par l'autre les deux équations (35), faisant passer ensuite dans le premier membre l'intégrale double du second, et divisant par $(A - A')(B - B')$ qui n'est pas nulle par hypothèse,

$$(36)\quad \int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1}(\rho_1^2 - \rho_2^2)E_1E_2E'_1E'_2d\varepsilon_1d\varepsilon_2 = 0,$$

ou ce qui est la même chose,

$$(37)\quad \int_0^b\int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)E_1E_2E'_1E'_2d\rho_1d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}} = 0.$$

Si $A = A'$, sans que $(B - B')$ soit nul, les équations (35) donneront

$$(38) \qquad \int_0^{\varpi_1} E_1 E_1' d\varepsilon_1 = 0, \quad \int_0^{\varpi_2} E_2 E_2' d\varepsilon_2 = 0,$$

d'où l'on conclut

$$(39) \int_0^{\varpi_2} E_2 E_2' d\varepsilon_2 \int_0^{\varpi_1} \rho_1^2 E_1 E_1' d\varepsilon_1 - \int_0^{\varpi_1} E_1 E_1' d\varepsilon_1 \int_0^{\varpi_2} \rho_2^2 E_2 E_2' d\varepsilon_2 = 0,$$

ou encore la relation (36).

Enfin, s'il peut arriver que $B = B'$, sans que $(A - A')$ soit nul, les équations (35) donnent

$$\int_0^{\varpi_1} \rho_1^2 E_1 E_1' d\varepsilon_1 = 0, \quad \int_0^{\varpi_2} \rho_2^2 E_2 E_2' d\varepsilon_2 = 0,$$

d'où l'on conclut encore l'équation (39), ou celle (36).

Ainsi, excepté dans le cas où $(A - A')$ et $(B - B')$ sont nuls à la fois, on a toujours l'équation (36) ou (37). D'où il suit que le facteur σ, jouissant de la propriété définie plus haut (§ XVIII), est

$$(40) \qquad \sigma = \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) E_1 E_2}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}.$$

§ XX.

L'emploi du facteur σ (40), fait de la manière indiquée au § XVIII, pour chaque terme de la série (34), donne pour valeur de son coefficient :

$$(41) \qquad N = \frac{\displaystyle\int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)\psi(\rho_1, \rho_2) E_1 E_2 d\rho_1 d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}}{\displaystyle\int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) E_1^2 E_2^2 d\rho_1 d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}};$$

la fonction ψ est alors introduite par son développement

$$(42) \quad \psi(\rho_1, \rho_2) = \sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i} \frac{\displaystyle\int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)\psi(\rho_1, \rho_2) E_1 E_2 d\rho_1 d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}}{\displaystyle\int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) E_1^2 E_2^2 d\rho_1 d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}} E_1 E_2;$$

et la série V(27) qui exprime la loi des températures stationnaires, dans l'ellipsoïde à axes inégaux, lorsque les températures données de la surface sont à la fois distribuées symétriquement par rapport aux plans des trois sections principales, est définitivement

$$(43)\quad V=\sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i}\frac{\displaystyle\int_0^b\int_b^c\frac{(\rho_1^2-\rho_2^2)\psi(\rho_1,\ \rho_2)E_1E_2d\rho_1d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}}{\displaystyle\int_0^b\int_b^c\frac{(\rho_1^2-\rho_2^2)E_1^2E_2^2d\rho_1d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}}\frac{E}{E(\rho_0)}E_1E_2.$$

Si l'on adopte, pour paramètres des surfaces conjuguées, les transcendantes ε, ε_1, ε_2, et si l'on désigne par ϖ_1 et ϖ_2 les intégrales complètes

$$(44)\quad \varpi_1=\int_b^c\frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}},\quad \varpi_2=\int_0^b\frac{d\rho_2}{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}},$$

le développement de la fonction ψ, que l'on peut considérer comme une fonction de ε_1 et ε_2, peut s'écrire ainsi

$$(45)\quad \psi(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)=\sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i}\frac{\displaystyle\int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1}(\rho_1^2-\rho_2^2)\psi(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)E_1E_2d\varepsilon_1d\varepsilon_2}{\displaystyle\int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1}(\rho_1^2-\rho_2^2)E_1^2E_2^2d\varepsilon_1d\varepsilon_2}E_1E_2,$$

et la température V est donnée par la série

$$(46)\quad V=\sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i}\frac{\displaystyle\int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1}(\rho_1^2-\rho_2^2)\psi(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)E_1E_2d\varepsilon_1d\varepsilon_2}{\displaystyle\int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1}(\rho_1^2-\rho_2^2)E_1^2E_2^2d\varepsilon_1d\varepsilon_2}\frac{E}{E(\rho_0)}E_1E_2;$$

ρ, ρ_1, ρ_2, sont alors les fonctions périodiques désignées par $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$, au § XVI, et E, E_1, E_2, sont des polynomes du degré $2i$, ne contenant que des puissances paires de ces fonctions.

Il est facile de voir, d'après la propriété fondamentale des fonctions E_1 et E_2, définie au § X, que le théorème du § XVIII aura lieu séparément pour tout autre groupe de termes de la série (27) que celui qui vient d'être traité; ou lorsqu'il s'agira d'une autre des huit fonctions partielles dans lesquelles la valeur la plus générale de $\varphi(\rho_1, \rho_2)$ peut toujours être décomposée. Ce théorème ayant lieu, la solution correspondante au nouveau groupe s'achèvera comme celle du premier; le développement de la nouvelle fonction partielle, et la série V correspondante, auront encore les formes (42) et (43), ou (45) et (46), en changeant convenablement les indices. Enfin la solution générale, ou la valeur totale de V, s'obtiendra en faisant la somme des huit valeurs partielles ainsi obtenues.

§ XXI.

Les intégrales définies qu'il sera nécessaire d'évaluer, pour que les températures puissent être calculées en nombre, à l'aide de la série (43) ou (46), ne seront pas nécessairement compliquées de transcendantes elliptiques, exigeant l'emploi de tables nouvelles, comme les formes (45) et (46) semblent l'indiquer.

Si l'on désigne pour simplifier $\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$ et $\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, ou bien $\sqrt{-\rho_1^4+q\rho_1^2-p}$ et $\sqrt{\rho_2^4-q\rho_2^2+p}$, par n_1 et n_2, les intégrales définies à évaluer auront toutes les formes $\int_b^c \frac{P_1 d\rho_1}{n_1}$, $\int_0^b \frac{P_2 d\rho_2}{n_2}$, dans lesquelles P_1 et P_2 seront des fonctions entières et rationnelles de ρ_1^2 et ρ_2^2; elles seront donc respectivement les sommes d'un nombre fini d'intégrales de la forme $\int_b^c \frac{\rho_1^{2k} d\rho_1}{n_1}$, $\int_0^b \frac{\rho_2^{2k} d\rho_2}{n_2}$. Or, on démontre facilement, à l'aide de l'intégration par partie, les deux formules

$$
(47)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int_b^c \frac{\rho_1^{2k} d\rho_1}{n_1} &= \frac{2k-2}{2k-1}\, q \int_b^c \frac{\rho_1^{2k-2} d\rho_1}{n_1} - \frac{2k-3}{2k-1}\, p \int_b^c \frac{\rho_1^{2k-4} d\rho_1}{n_1},\\
\int_0^b \frac{\rho_2^{2k} d\rho_2}{n_2} &= \frac{2k-2}{2k-1}\, q \int_0^b \frac{\rho_2^{2k-2} d\rho_2}{n_2} - \frac{2k-3}{2k-1}\, p \int_0^b \frac{\rho_2^{2k-4} d\rho_2}{n_2},
\end{aligned}
\right.
$$

et si, outre les intégrales complètes (44), on désigne par ω_1 et ω_2 celles-ci

$$
(48)\quad \omega_1 = \int_b^c \frac{\rho_1^2 d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}}, \qquad \omega_2 = \int_0^b \frac{\rho_2^2 d\rho_2}{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}},
$$

les formules (47) donneront aisément, par des réductions successives,

$$
\int_b^c \frac{\rho_1^{2k} d\rho_1}{n_1} = m\omega_1 - n\varpi_1, \qquad \int_0^b \frac{\rho_2^{2k} d\rho_2}{n_2} = m\omega_2 - n\varpi_2,
$$

m et n étant des fonctions rationnelles et entières de p et q (21) ou de b^2 et c^2; lesquelles seront les mêmes pour l'intégrale en ρ_1, et pour celle en ρ_2, à cause de l'identité des coefficients dans les formules (47).

Il suit de là, que si P_1 et P_2 sont composés de la même manière et avec les mêmes coefficients, l'un en ρ_1^2, l'autre en ρ_2^2, on aura

$$\int \frac{P_1 d\rho_1}{\eta_1} = M\omega_1 - N\varpi_1, \quad \int \frac{P_2 d\rho_2}{\eta_2} = M\omega_2 - N\varpi_2,$$

M et N étant pour les deux intégrales les mêmes fonctions de b^2 et c^2; et pareillement

$$\int \frac{\rho_1^2 P_1 d\rho_1}{\eta_1} = P\omega_1 - Q\varpi_1, \quad \int \frac{\rho_2^2 P_2 d\rho_2}{\eta_2} = P\omega_2 - Q\varpi_2,$$

P et Q étant encore les mêmes pour les deux intégrales.

Une combinaison facile des quatre dernières équations donne

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) P_1 P_2 d\rho_1 d\rho_2}{\eta_1 \eta_2} = (QM - PN)(\omega_1\varpi_2 - \omega_2\varpi_1),$$

et comme on a, ainsi que je l'ai démontré dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes,

$$(\omega_1\varpi_2 - \omega_2\varpi_1) = \int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) d\rho_1 d\rho_2}{\eta_1 \eta_2} = \frac{\pi}{2},$$

il s'ensuit que

$$(49) \quad \int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) P_1 P_2 d\rho_1 d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}} = \frac{\pi}{2}(QM - PN).$$

C'est-à-dire que P_1 et P_2 étant des fonctions rationnelles et entières, composées de la même manière et avec les mêmes coefficients, l'une en ρ_1^2, l'autre en ρ_2^2, l'intégrale définie double (49) est égale au rapport du diamètre à la circonférence du cercle, multiplié par une fonction rationnelle et entière de b^2 et c^2.

§ XXII.

Le théorème précédent démontre directement que dans les coefficients des différents termes de la série (43) ou (46), les dénominateurs ne contiendront d'autre nombre transcendant que π. D'un autre côté, si la fonction $\psi(\rho_1, \rho_2)$ est composée d'un certain nombre de termes de la forme P_1P_2, symétriques en ρ_1 et ρ_2, ce qui devra avoir lieu dans le plus grand nombre de cas, les intégrales définies des numérateurs, dans les coefficients dont il s'agit, seront encore soumises à la loi exprimée par la formule (49), et le facteur $\frac{\pi}{2}$ disparaîtra comme facteur commun.

Ainsi la complication, qui résulte de ce que les intégrales définies des séries (45) et (46) sont réductibles en transcendantes elliptiques, n'est qu'apparente, et l'emploi de ces séries ne nécessitera aucune table nouvelle, lors des évaluations numériques, à moins que la loi des températures à la surface n'introduise elle-même des nombres transcendants.

Il reste à étudier en détail les propriétés des fonctions E, E_1, E_2, celles des équations donnant les valeurs de B; il faut aussi évaluer généralement le dénominateur constant du terme général des séries (43) ou (46), afin que la solution trouvée dans ce Mémoire devienne d'un usage commode, et pour qu'on puisse en déduire d'une manière simple les conséquences relatives à la question physique. Mais cette recherche exige de trop longs développements, et nous limiterons ici ce premier Mémoire déjà fort étendu.