

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ABRIA

Sur la diffraction de la lumière

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 4 (1839), p. 248-260.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4_248_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur la diffraction de la Lumière ;*PAR M. ABRIA.

Dans son beau Mémoire sur la diffraction (*), Fresnel a vérifié les formules d'intensité auxquelles l'a conduit la théorie qu'il en a donnée dans l'hypothèse des ondulations, en calculant la position des points de plus grande ou de moindre intensité et la comparant avec celle déterminée directement dans un grand nombre d'expériences faites avec une lumière rouge homogène sur les franges produites soit par le bord d'un écran, soit par une ouverture étroite ou un corps étroit.

J'ai pensé qu'à défaut de moyens photométriques directement applicables à ce genre de phénomènes, il ne serait pas inutile de vérifier les formules de Fresnel par un autre procédé fondé, il est vrai, sur une règle empirique, mais dont l'emploi peut être regardé comme légitime, puisqu'il a réussi dans d'autres circonstances. En voici le principe : lorsque la lumière employée est blanche, au lieu d'être homogène, les franges ne sont plus alternativement obscures et brillantes mais diversement colorées, et la teinte en chaque point dépend des intensités relatives en ce même point des rayons de diverses couleurs qui composent la lumière blanche. Cela posé, si l'on mesure par des moyens micrométriques la position d'une frange de teinte connue, et si l'on calcule pour le lieu de cette frange, à l'aide des formules de Fresnel, l'intensité de la lumière pour chacune des sept couleurs du spectre, et par la règle de Newton, la nature et l'intensité de la teinte résultant du mélange de ces divers rayons colorés, on devra retrouver celle donnée par l'observation, si les formules représentent les intensités

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, tome XI et tome V des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*.

absolues, ou du moins relatives, des différents rayons. J'ai fait dans ce but un petit nombre d'expériences que je rapporterai après avoir rappelé, en peu de mots la théorie de la diffraction telle que Fresnel l'a donnée, mais en présentant d'une manière différente sa solution du problème des interférences.

L'impression d'une lumière sur l'organe pour être sensible doit durer un temps très court, il est vrai, mais pendant lequel néanmoins les molécules éthérées exécutent un grand nombre d'oscillations. Or, on doit prendre pour mesure de l'intensité de la lumière la force vive possédée par les molécules du fluide pendant le temps nécessaire pour l'impression sensible : mais si, comme cela a toujours lieu, on veut seulement connaître le rapport de ces intensités en deux points différents, il suffit de calculer celui qui existe entre les sommes des carrés des vitesses que prennent en ces deux points les molécules éthérées pendant la durée d'une vibration : car, à cause du très grand nombre de vibrations qui ont lieu avant la sensation, on peut supposer ce nombre entier et le même pour les deux points.

Cela posé, je conçois, pour plus de simplicité, une couche d'éther terminée par deux plans parallèles, indéfiniment prolongés et situés à une distance très petite l'un de l'autre ; je suppose pour corps lumineux une ligne lumineuse perpendiculaire aux deux plans. Les mouvements se propageront circulairement autour de cette ligne, et les points ébranlés au même instant se trouveront sur une même surface cylindrique droite à base circulaire ayant pour axe la ligne lumineuse : cette surface est l'onde lumineuse. S'il se trouve quelque part un écran dans le fluide, les molécules éthérées en contact avec le plan auront une vitesse dont la composante normale au plan sera constamment nulle, et celle des molécules situées au-delà ne sera pas la même que si l'obstacle n'existait pas. Il s'agit de calculer cette vitesse et par suite l'intensité de la lumière en un point quelconque de l'espace situé au-delà du corps par rapport au point lumineux, mais seulement près de la limite de l'ombre géométrique.

Soient (pl. II, *fig.* 1) L la projection de la ligne lumineuse, AB la trace de l'écran, LAC la limite de l'ombre géométrique, ADMM'X la portion non interrompue de l'onde lumineuse, P le point pour lequel on veut calculer l'intensité de la lumière.

Je décompose l'arc AX en parties de grandeur insensible, et je regarde, d'après le principe de la superposition des petits mouvements, la vitesse de P comme égale à la résultante statique des vitesses qu'il prendrait en vertu de l'action de chacun des éléments de l'onde. Il suffira, pour calculer cette résultante, de faire la somme de ces vitesses élémentaires, parce qu'en décomposant l'arc AX en parties dont les différences de distances à P soient successivement d'une demi-longueur d'ondulation, on peut regarder comme se neutralisant mutuellement les vitesses envoyées par les éléments tels que MM' dont les directions sont inclinées sensiblement sur PM.

En prenant pour unité de vitesse la vitesse maximum des molécules éthérées, pour unité de temps la durée d'une oscillation, on a pour l'expression de la vitesse u d'une molécule quelconque M de l'onde à l'époque t , en la supposant nulle à l'origine,

$$u = \sin 2\pi t,$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre.

La vitesse que P recevra, à l'époque t , de l'élément $MM' = dz$, sera exprimée, en appelant λ la longueur d'une ondulation, par

$$(1) \quad \sin 2\pi \left(t - \frac{PM}{\lambda} \right) dz.$$

Si l'on pose $LA = a$, $Ac = b$, $MD = z$, on a

$$PM = PD + MN = PD + mn = b + \frac{z^2}{2a} + \frac{z^2}{2b} = b + \frac{(a+b)z^2}{2ab};$$

l'expression (1) devient

$$\sin 2\pi \left(t - \frac{b}{\lambda} - \frac{(a+b)z^2}{2ab\lambda} \right) dz = \sin 2\pi (T - Z) dz,$$

en posant

$$T = t - \frac{b}{\lambda}, \quad Z = \frac{(a+b)z^2}{2ab\lambda}.$$

La vitesse V que prend P en vertu des actions d'une portion de l'onde, pour les deux extrémités de laquelle les valeurs de DM sont z' et z'' , z' et z'' pouvant être positifs ou négatifs, sera donnée par

l'intégrale

$$V = \int_{z'}^{z''} \sin 2\pi (T - Z) \cdot dz, \quad (2)$$

et l'intensité I de la lumière en P aura pour expression

$$I = \int_0^1 V^2 dt. \quad (3)$$

Développant les calculs et remarquant que

$$\int_0^1 \sin^2 2\pi T dt = \int_0^1 \cos^2 2\pi T dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \sin 2\pi T \cos 2\pi T \cdot dt = 0,$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\int_{z'}^{z''} dz \sin 2\pi Z \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_{z'}^{z''} dz \cos 2\pi Z \right)^2,$$

remplaçant Z par sa valeur

$$I = \frac{1}{2} \left(\int_{z'}^{z''} dz \sin \frac{2\pi(a+b)z^2}{2ab\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_{z'}^{z''} dz \cos \frac{2\pi(a+b)z^2}{2ab\lambda} \right)^2 \quad (*), \quad (4)$$

posant

$$v^2 = \frac{2(a+b)z^2}{ab\lambda}, \quad (5)$$

d'où

$$dz = dv \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}},$$

et représentant par v' et v'' les valeurs de v correspondantes à z' et z'' ,

(*) La marche que j'ai suivie pour calculer l'intensité de la lumière coïncide avec celle de Fresnel. En effet, ce célèbre physicien, après avoir trouvé pour la vitesse des molécules éthérées une expression de la forme $u = a \sin 2\pi t$, prend a^2 pour mesure de l'intensité de la lumière, ce qui suppose, comme je l'ai fait, que le rapport des intensités en deux points différents est égal au rapport qui existe entre les sommes des valeurs que prend u^2 en chacun de ces points pendant la durée d'une oscillation.

on obtient

$$I = \frac{ab\lambda}{4(a+b)} \left[\left(\int_{\nu'}^{\nu''} d\nu \sin \frac{\pi\nu^2}{2} \right)^2 + \left(\int_{\nu'}^{\nu''} d\nu \cos \frac{\pi\nu^2}{2} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Si l'écran n'existait pas, z' et z'' seraient $+\infty$ et $-\infty$, ainsi que ν' et ν'' ; alors les intégrales se réduisent chacune à l'unité, ce qui rend la valeur de I égale à $\frac{ab\lambda}{2(a+b)}$ et le rapport de la valeur précé-

dente à celle-ci est égal, abstraction faite du facteur $\frac{1}{2}$, à

$$\left(\int_{\nu'}^{\nu''} d\nu \sin \frac{\pi\nu^2}{2} \right)^2 + \left(\int_{\nu'}^{\nu''} d\nu \cos \frac{\pi\nu^2}{2} \right)^2. \quad (7)$$

On ne connaît pas les valeurs générales de

$$\int d\nu \sin \frac{\pi\nu^2}{2}, \quad \int d\nu \cos \frac{\pi\nu^2}{2},$$

on sait seulement qu'elles sont égales à l'unité, lorsque les limites sont $-\infty$, $+\infty$. Fresnel a calculé une table des valeurs numériques de chacune de ces intégrales dans des limites suffisantes pour les applications.

Lorsqu'on veut déterminer, à l'aide de la formule (7), les points P pour lesquels l'intensité de la lumière est maximum ou minimum, on cherche par tâtonnement les valeurs que doit prendre l'une des limites, convenablement choisie pour que l'expression (7) soit maximum ou minimum; on calcule ensuite par la formule (5) la valeur correspondante de z : on déduit facilement de là la valeur de PC , ou la distance de P à l'ombre géométrique (*).

(*) La formule (4) convient à tous les cas de la diffraction dans lesquels il ne faut intégrer que dans un sens et spécialement aux trois cas principaux de ce genre de phénomènes, savoir, aux franges produites par une ouverture étroite, à celles de l'ombre d'un corps étroit, et enfin aux franges que fait naître le bord d'un écran. On peut, par des considérations géométriques très simples, rendre raison, ainsi que Fresnel l'a fait, des deux premières espèces de franges, et même en

Dans les applications que j'aurai à faire de cette formule, la position de P sera déterminée par l'observation, ce qui fera connaître les valeurs de z' , z'' , et par (5) celles de v' et v'' ; on calculera alors les valeurs de (7) pour les sept rayons simples : en représentant par r , o , j , v , b , i , u , les valeurs obtenues, il restera à les substituer dans les deux expressions

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{(r+u)0,822682 + (o+i)0,207399 - (j+b)0,511428 - v \cdot 0,953819}{r + o + j + v + b + i + u} \\ Y &= \frac{(r-u)0,482373 + (o-i) \cdot 0,963168 + (j-b)0,815348}{r + o + j + v + b + i + u}, \end{aligned} \right\} (8)$$

qui sont, d'après la règle de Newton, les coordonnées du centre de gravité de la teinte cherchée : en appelant d la distance de ce centre de gravité au centre du cercle, et ψ l'angle de la ligne qui joint ces deux points avec l'axe oR (fig. 2), on a

$$\text{tang } \psi = \frac{Y}{X}, \quad d = \frac{X}{\cos \psi}.$$

L'angle ψ fait connaître la nature de la teinte cherchée, et peut varier de 0° à 360° ; $1 - d$ est la proportion de lumière blanche qui entre dans la composition de la teinte (*).

Lorsque la lumière émanée de la source traverse une ouverture circulaire de diamètre très petit, on aperçoit au-delà une tache centrale de teinte variable avec sa distance à l'orifice, et entourée d'anneaux colorés. On peut encore dans ce cas comparer simplement

fixer à très peu près la position. Mais le même raisonnement ne peut pas servir pour les franges du bord d'un écran. La raison en est, que dans les deux premiers cas, la vitesse des molécules éthérées dans les franges obscures est *constamment* nulle ou plus petite que dans les points voisins : par suite, l'intensité de la lumière y est nulle ou très petite. Dans le dernier cas, il n'existe aucun point dans lequel la vitesse de l'éther soit à chaque instant plus petite que dans les points voisins, et il faut calculer la force vive pendant la durée d'une vibration, pour connaître les points dans lesquels l'intensité de la lumière est minimum ou maximum.

(*) *Traité de Physique mathématique* de M. Biot, 3^e vol.

la théorie à l'expérience quand on connaît la distance de la tache à l'orifice, le diamètre de celui-ci et sa distance au point lumineux. Je vais donc calculer d'abord l'intensité, dans le cas d'une lumière homogène, pour la projection du centre de l'ouverture.

Je décompose la surface de l'onde en zones infiniment étroites par des plans perpendiculaires à LC (fig. 3). La vitesse en C à l'époque t due à la zone correspondante au point M pour lequel $AM = z$ sera

$$2\pi z dz \sin 2\pi \left(t - \frac{CM}{\lambda} \right) = 2\pi z dz \sin 2\pi \left[t - \frac{b}{\lambda} - \frac{z^2(a+b)}{2ab\lambda} \right] = 2\pi z dz \sin 2\pi (T - Z),$$

en employant les notations précédentes.

La vitesse V en C par l'action de tous les éléments de l'onde sera

$$V = 2\pi \int_0^r z dz \sin 2\pi (T - Z),$$

r étant le rayon de l'ouverture, et l'intensité

$$I = \int_0^T V^2 dt,$$

ce qui conduit à

$$I = \frac{1}{2} \left(\int_0^r 2\pi z dz \sin 2\pi Z \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^r 2\pi z dz \cos 2\pi Z \right)^2.$$

Comme

$$dZ = \frac{(a+b)}{ab\lambda} z dz,$$

$$\int 2\pi z \sin 2\pi Z \cdot dz = - \frac{ab\lambda}{a+b} \cos 2\pi Z + \text{const.},$$

$$\int 2\pi z \cos 2\pi Z \cdot dz = \frac{ab\lambda}{a+b} \sin 2\pi Z + \text{const.},$$

$$\int_0^r 2\pi z \sin 2\pi Z \cdot dz = \frac{ab\lambda}{a+b} \left[1 - \cos \frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda} \right],$$

$$\int_0^r 2\pi z \cos 2\pi Z \cdot dz = \frac{ab\lambda}{a+b} \sin \frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}.$$

On aura donc

$$I = \frac{a^2 b^2 \lambda^2}{2(a+b)^2} \left[2 - 2 \cos \frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda} \right] = \frac{a^2 b^2 \lambda^2}{(a+b)^2} \left[1 - \cos \frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda} \right].$$

D'après la règle de Newton, il faut substituer à r, o, j, \dots dans (8) les rapports entre l'intensité de la lumière correspondante et celle qui aurait lieu si l'écran n'existait pas. Il faut donc calculer la valeur de I quand l'ouverture est indéfinie; mais en supposant $r = \infty$, la formule donne un résultat illusoire: pour obtenir sa valeur dans ce cas, on démontre que si l'on partage l'onde en zones dont les différences de distances à C croissent de $\frac{\lambda}{2}$, l'intensité de la lumière apportée par le demi-anneau central égale celle de la lumière apportée lorsque l'écran n'existe pas. Or, si l'on pose $\frac{(a+b)r^2}{2ab} = \frac{\lambda}{4}$, ce qui donne la valeur de r correspondante au demi-anneau central $\cos \frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda} = 0$, et par suite I devient $\frac{a^2b^2\lambda^2}{(a+b)^2}$. Les valeurs de r, o, j, \dots se calculeront donc simplement par la formule

$$I = \cos \frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}. \quad (9)$$

Les formules précédentes sont indépendantes de la direction de la vitesse des molécules éthérées; de sorte que l'intensité de la lumière en chaque point reste la même lorsque la lumière incidente est polarisée dans un plan quelconque, ou lorsqu'elle est neutre.

Le tableau n° 1 renferme les résultats d'une série d'expériences faites avec des ouvertures étroites. Le diamètre de chaque ouverture a été déterminé avec une lame de verre divisée en dixièmes de millimètre. L'intervalle entre les franges situées symétriquement de part et d'autre de la projection du milieu de l'ouverture, a été mesurée à l'aide d'une vis micrométrique portant une loupe munie à son foyer d'un fil très fin; le pas de la vis est de $\frac{1}{4}^{\text{mm}}$; la tête en est divisée en 100 parties; chaque intervalle a été mesuré plusieurs fois, et le rapport de la différence entre les nombres obtenus à leur valeur moyenne s'est trouvé $\frac{1}{80}$ au plus, du moins dans les observations pour lesquelles cette valeur surpasse 2^{mm} .

La 6^e colonne contient la moitié de chacun de ces intervalles ou la distance de chaque frange à la projection du milieu de l'ouverture.

Si l'on représente par m cette distance réduite dans le rapport de a

à $a + b$, et par l la demi-largeur de l'ouverture, on a pour les valeurs des limites z' , z''

$$z' = m - l, \quad z'' = m + l,$$

Lorsque z' est positif, la frange correspondante est extérieure, et intérieure au contraire, lorsqu'il est négatif. Le premier de ces deux cas a lieu pour les observations 1, 2, 5, 6, 7, et le deuxième pour toutes les autres. Pour les franges extérieures, j'ai été obligé, à cause de la petitesse des valeurs de r , o , j , ... de calculer les valeurs de $\int_0^v \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv$, et $\int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv$ en faisant croître v de centième en centième, au lieu de dixième en dixième, comme Fresnel l'a fait.

La 7^e colonne renferme les valeurs de ψ , et la 8^e la nature de la teinte correspondante d'après la règle de Newton; mais on jugera mieux la nature de celle-ci en jetant les yeux sur la figure 2.

Sur 17 observations que ce tableau renferme, 11 présentent, soit pour la teinte, soit pour la proportion de blanc, un accord parfait entre le calcul et l'expérience. Pour les autres, on retrouve toujours la teinte observée, mais avec une déviation tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé.

TABLEAU I (*).

NUMÉROS DES OBSERVATIONS.	DEMLARGEUR DE L'OUVERTURE.	VALEURS de a.	VALEURS de b.	TEINTE DE LA FRANGE observée.	DISTANCE de cette frange à la projection du mi- lieu de l'ouverture.	VALEURS de ψ.	TEINTE CORRESPONDANTE.	VALEURS de i-j ou proportion de blanc.
1	0,4	1000	2000	Vert pâle.	4,53	165°	Vert légèrement jaunâtre.	0,69
2	"	"	"	Rouge violacé.	3,98	333°	Violet tendant au rouge.	0,84
3	0,75	1000	1400	Bleu très pâle	0 "	311° 23'	Violet chargé d'indigo.	0,86
4	"	"	"	Jaune blanc.	0,50	95° 10'	Jaune orangé.	0,89
5	0,25	1000	385	Rouge.	1,10	66° 36'	Orangé fortement rougeâtre.	0,60
6	"	"	2100	Bleu.	2,31	271° 51'	Indigo fortement bleuâtre.	0,56
7	"	"	"	Jaune légèrem. verdâtre.	3,33	127° 3'	Jaune très légèrem. verdâtre.	0,74
8	0,8	500	620	Vert légèrement bleuâtre.	0 "	224° 13'	Bleu verdâtre.	0,86
9	"	"	830	Violet bleuâtre.	0 "	305° 49'	Violet indigo.	0,84
10	"	"	"	Blanc jaunâtre.	0,31	96° 14'	Jaune orangé.	0,89
11	"	"	"	Bleu.	0,66	291° 19'	Indigo violacé.	0,95
12	"	1180	370	Bleu verdâtre.	0 "	239° 37'	Bleu verdâtre.	0,85
13	"	"	"	Orangé rougeât.	0,15	51° 25'	Rouge fortement orangé.	0,87
14	"	"	"	Blanc.	0,68	307° 12'	Violet indigo.	0,98
15	"	"	550	Jaune.	0 "	61° 52'	Orangé très rougeâtre.	0,77
16	"	"	"	Bleu.	0,20	246° 56'	Bleu.	0,86
17	"	"	"	Rouge jaunâtre.	0,37	32° 37'	Rouge tendant un peu vers le jaune.	0,89

(*) Le millimètre est pris pour unité.

Le tableau n° 2 contient les résultats d'une deuxième série d'expériences faites sur des orifices circulaires. Le diamètre de chaque orifice a été mesuré à l'aide de la lame de verre qui avait servi pour les ouvertures étroites. Celui du deuxième était un peu moindre que $1^{\text{mm}},9$; en prenant pour r la moitié de ce nombre ou $0,95$, les calculs des trois premières observations ne s'accordaient pas parfaitement avec l'expérience et présentaient pour les valeurs de ψ des différences qui étaient pour toutes dans le même sens. Je modifiais alors la valeur de r dans les centièmes de millimètre jusqu'à ce que la teinte calculée s'accordât avec celle observée pour l'expérience (8); c'est cette valeur ainsi modifiée qui a été employée pour les calculs suivants. La valeur $1,886$ qui en résulte pour le diamètre se trouve inférieure à $1,90$ de quantités que je ne pouvais apprécier.

La plus grande différence entre le calcul et l'observation a lieu pour l'expérience (11); (12) présente un accord très frappant, et pour les autres il y a quelques déviations assez faibles.

TABLEAU II.

NUMÉROS DES OBSERVATIONS.	VALEURS	VALEURS	VALEURS	VALEURS	TEINTE CORRESPONDANTE.	VALEURS	TEINTE OBSERVÉE.
	de r.	de a.	de b.	de ψ.		de 1—d ou propor- tion de blanc.	
1	0,5	1000	360	55.44'	Rouge orangé.	0,39	Rouge orangé
2	"	"	590	96.42	Jaune très orangé.	0,81	Jaune orangé très mêlé de blanc.
3	"	"	2500	275.57	Indigo bleuâtre.	0,999	Blanc.
4	"	500	400	297.36	Indigo violacé.	0,33	Indigo violacé.
5	"	"	570	58.7	Rouge orangé.	0,38	Rouge orangé.
6	"	"	740	82.48	Orangé tendant vers le jaune.	0,49	Jaune orangé très beau.
7	"	1760	540	102.3	Jaune orangé.	0,90	Jaune pâle.
8	0,943	500	520	203.23	Vert bleuâtre.	0,57	Vert bleuâtre.
9	"	"	710	7.24	Rouge très violacé.	0,66	Rouge.
10	"	"	940	111.03	Jaune légèrement orangé.	0,58	Jaune pâle.
11	"	"	1410	229.15	Bleu légèrement verdâtre.	0,46	Vert légèrement jaunâtre.
12	"	"	1940	283.55	Indigo.	0,55	Indigo.
13	"	"	2330	307.13	Violet indigo.	0,45	Violet un peu bleuâtre.
14	"	1000	420	14.13	Rouge légèrement violet.	0,66	Rouge légèrement orangé.
15	"	"	780	356.22	Violet fortement rougeâtre.	0,55	Rouge très violacé
16	"	"	1830	252.53	Bleu indigo.	0,67	Bleu verdâtre pâle.
17	"	1680	1330	283.39	Indigo.	0,39	Bleu très beau.
18	"	1760	540	309.53	Violet chargé d'indig.	0,49	Bleu chargé d'ind.

J'ai rapporté dans ces deux tableaux toutes les observations que j'ai calculées. Il est impossible, il est vrai, de fixer avec précision les valeurs de δ et de ψ , qui conviennent à une teinte observée : mais on peut dire avec certitude quelle est la couleur dominante, et celle-ci a presque toujours été retrouvée par la théorie. Si l'on veut bien réfléchir à la longueur des calculs nécessaires à la détermination de chaque teinte, on regardera, je pense, ce travail comme offrant une vérification aussi satisfaisante que possible des formules d'intensité, du moins sous le point de vue que je me suis proposé.
