JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

THÉODORE OLIVIER

Recherches géométriques sur les engrenages de With

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 281-303.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__281_0>

Recherches géométriques sur les Engrenages de WITH;

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

(Mémoire présenté à l'Institut, le 5 décembre 1825.)

Le mécanicien With, lors du concours pour les prix décennaux, en 1810, soumit à l'examen de l'Institut, des engrenages cylindriques et coniques d'une construction nouvelle, et dit en les présentant qu'ils jouissaient des deux propriétés regardées jusque alors comme incompatibles, savoir : 1° vitesses angulaires dans un rapport constant, et 2° frottement de roulement; et qu'ainsi : 1° le pignon décrivant des arcs égaux faisait parcourir à la roue dentée des espaces angulaires aussi égaux, et 2° les courbes par lesquelles les dents étaient en contact, se roulaient à la manière de deux cercles tracés sur un même plan.

With n'était pas géomètre, aussi ne put-il démontrer rigoureusement l'existence des propriétés qu'il annonçait appartenir à ses engrenages. On voyait bien qu'en effet les vitesses angulaires étaient dans un rapport constant, on sentait bien que le frottement était très doux, mais cependant le frottement pouvait être de glissement. Jusqu'à présent la question est restée indécise.

En examinant les procédés pratiques que With employait pour la construction de ses engrenages, procédés qu'il a décrits dans une petite brochure que je n'ai pu me procurer qu'à la bibliothèque de l'École royale de l'artillerie et du génie à Metz, on voit qu'on peut *traduire géométriquement* les procédés de mécanique pratique, par une construction géométrique qui consiste, 1° à faire passer un plan M (fig. 4, pl. II) par les deux axes parallèles P de la roue dentée et Q du pignon; 2° à tracer dans ce plan une droite R parallèle aux axes, et dont les distances p à P et q à Q seront dans le rapport inverse des vitesses des axes, puis 3° construire deux triangles abc et $a'b'c'$, le premier coupant la ligne R par son côté ab au point m et le second ayant son sommet a' placé en ce point m; les deux triangles n'ayant d'ailleurs aucun autre point commun; 4° faire mouvoir le triangle abc autour de l'axe P, tous les points du côté ab décrivant des hélices de même pas, que j'appellerai H, nommant S l'hélice décrite par le point m; 5° faire mouvoir le triangle $a'b'c'$ autour de l'axe Q, le point a' décrivant une hélice s dont le pas sera h, et l'on devra avoir l'équation $\frac{\mathrm{H}}{h} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire que les pas des hélices S et s seront dans le même rapport que les rayons des deux cylindres sur lesquels elles sont tracées. Ainsi les dents sont formées par des filets de vis, et ne se mettent successivement en contact que par les courbes S et s.

Si les axes P et Q se coupent, la droite R passe alors par leur point d'intersection et elle divise l'angle compris entre P et Q en deux dont les sinus sont dans le rapport inverse des vitesses des axes, et les courbes S et s sont des spirales coniques d'Archimède dont les pas sont aussi dans le rapport direct des rayons des rouets coniques sur lesquelles elles sont tracées.

Les dents ainsi construites se conduisent-elles en effet par un frottement de roulement, et le rapport des vitesses angulaires est-il constant ?

Telle est la première question que je me propose de résoudre dans ce Mémoire.

Examinons d'abord les engrenages cylindriques.

Par la droite R (fig. 5), je mène un plan M' perpendiculaire au plan M qui contient les axes. Je trace sur ce plan M' une droite g passant par le point m situé sur la droite R. (Au lieu d'une droite, l'on pourrait tracer une courbe arbitraire, mais dans les arts l'on doit préférer la droite parce qu'elle donne sur le cylindre une hélice, courbe que l'on peut tracer facilement par un mouvement continu, ce mouvement continu étant procuré par un mécanisme simple.) Puis j'enroule ce plan M' sur le cylindre dont R est une génératrice, p le rayon de la base et P l'axe; la droite g se déformera suivant une hélice S dont le pas H sera l'un des côtés de l'angle droit du triangle mxy, construit dans le plan M'; la ligne mx étant horizontale et la droite my étant une partie de la droite g, et mx étant égal au développement de la circonférence du cercle dont p est le rayon, H sera dès-lors égal à xy. Si, ensuite, j'enroule le plan M′ sur le cylindre dont R est une génératrice, q le rayon de la base et Q l'axe, la droite g se déformera suivant une hélice s, dont le pas h sera égal à $x'y'$, le côté mx' étant égal au développement de la circonférence du cercle dont q est le rayon, et l'on aura l'équation $\frac{H}{h}=\frac{p}{q}$. Cela posé : si je fais rouler le cylindre qQ sur le plan tangent M′, la courbe s se développera sur la droite g. De même si je fais rouler le cylindre pP sur le même plan tangent M′, la courbe S se développera sur la même droite g. Ainsi au point m les courbes s et S sont en contact ayant en ce point pour tangente commune la droite g. Si donc le cylindre pP prenant un mouvement de rotation autour de son axe P, entraîne par le frottement de roulement le cylindre pQ, les deux courbes s et S rouleront l'une sur l'autre et auront une tangente commune en chacun de leurs points de contact successif, et le point de contact parcourra la droite R.

Maintenant je trace dans le plan M qui contient les axes P et Q, une droite arbitraire G passant par le point m de contact des deux hélices s et S, puis je décris deux courbes arbitraires φ et φ' ayant pour tangente commune au point m la droite G; l'une de ces courbes φ étant au-dessus, l'autre φ' étant au-dessous de la droite G et toutes deux situées dans le plan M.

Cela posé : j'imprime au plan M un mouvement de rotation autour de l'axe P de manière que la courbe φ se meuve le long de la courbe S; on obtiendra par ce moyen une surface héliçoïde Φ. Si de même je fais mouvoir la courbe φ' le long de la courbe s, je formerai une seconde surface héliçoïde Φ', et ces deux surfaces Φ et Φ' seront en contact au point m, car elles auront en ce point même plan tangent, déterminé par les droites g et G, et ces deux surfaces n'auront évidemment que ce seul point commun. Dans les engrenages de With la courbe φ est une droite, par conséquent la surface Φ est une héliçoïde, telle qu'on l'emploie dans les vis triangulaires ou à filet carré. La courbe φ' se réduit à un point; donc la surface Φ' se réduit à une hélice, de sorte que la dent Φ conduira ou sera conduite par la dent Φ' par un frottement de roulement, les vitesses angulaires étant dans un rapport constant.

Ainsi les engrenages construits par With satisfont aux deux conditions regardées jusqu'à présent comme incompatibles. Mais pour que ces deux conditions soient en effet remplies à la fois, il faut que les engrenages soient exécutés avec une rare précision. Examinons si l'on n'obtiendrait pas dans des engrenages construits d'après le même principe, un frottement de glissement provenant d'une inexactitude dans le rapport des pas H et h, frottement de glissement qu'il serait impossible cependant de reconnaître et de détruire entièrement. Prenons l'engrenage exécuté par With, c'est-à-dire celui où les courbes φ et φ' sont des triangles. Chacun des points de la droite ab décrit une hélice dont le pas est H, mais, d'après ce qui précède, l'hélice décrite par le point m est la seule qui puisse se rouler avec l'hélice décrite par le point a' et dont le pas est h, si l'équation $\frac{\mathrm{H}}{h} = \frac{p}{q}$ est satisfaite.

Les deux hélices S et s ont au point de contact m une tangente commune; et pour tous les points de l'hélice S, la tangente fait avec l'axe P le même angle; il en est de même pour tous les points de l'hélice s. Si les hélices décrites par les points de ab, au lieu d'avoir le pas H avaient un pas H' peu différent de H, alors le point a' ne pourrait se mettre en contact avec le point m. Car alors l'hélice S' décrite par le point m n'aurait pas même tangente que l'hélice s décrite par le point a' (les deux axes P et Q étant supposés dans le même plan); et aussi comme les hélices décrites par les divers points de ab, ont des tangentes qui font avec l'axe P des angles de plus en plus petits, à mesure que les points qui les décrivent se rapprochent de cet axe, l'on voit que l'on trouvera en avant ou en arrière du point m sur ab un point m' tel que l'hélice qu'il décrira fera avec l'axe P le même angle que l'hélice s fait avec l'axe Q.

Alors ces deux hélices pourront être mises en contact, elles auront une tangente commune, et nécessairement on aura : p' (distance de m' à l'axe P) est à q (distance du point a' à l'axe Q) dans le rapport qui existe entre H' et h; car l'hélice décrite par le point m' pourra être formée en pliant sa tangente au point m' sur le cylindre dont le rayon est p'.

Ainsi, en ne considérant que deux dents, si l'une n'est pas construite avec exactitude, si donc les hélices qui composent la surface héliçoïde qui doit conduire ou être conduite par l'hélice s décrite par le point a'

n'ont pas rigoureusement leur pas égal à H, il sera toujours possible de rapprocher ou d'éloigner les axes P et Q, de manière que le point a' trouve un point m' situé sur ab, lequel décrira une hélice faisant avec l'axe P le même angle que fait l'hélice s avec l'axe Q. Et l'hélice s décrite par le point a' ne pourra être mise en contact qu'avec l'hélice décrite par ce point m', tant que les axes P et Q, ainsi que la droite R lieu des points de contact successif, seront assujétis à être situés dans un même plan; car toute autre hélice faisant avec l'axe P un angle plus petit ou plus grand, donnerait au point de contact des tangentes qui se croiseraient; par conséquent l'hélice s ne serait pas tangente à la surface héliçoïde, au point considéré : elle la pénétrerait en ce point; les dents ne pourraient donc se conduire. Mais aussi les vitesses des axes P et Q ne seront plus dans le rapport demandé $\frac{q}{p}$, mais dans le rapport $\frac{q}{p'}$, p' étant le rayon de l'hélice S' sur laquelle se roule l'hélice s.

Mais un engrenage ne peut être formé par des roues n'ayant chacune qu'une seule dent. Il faut forcément placer sur ces roues plusieurs dents et dans des positions telles que le mouvement de rotation puisse se continuer sans être arrêté.

Il faudra donc placer sur le cylindre qQ une suite d'hélices équidistantes, leurs points de départ sur le cercle C tracé par le point a' étant aussi équidistants entre eux, et divisant ce cercle C, en arcs égaux; puis faire rouler ce cylindre qQ sur le cylindre pP. Toutes les hélices du cylindre qQ laisseront sur pP pour traces des hélices aussi équidistantes, mais dont les points de départ sur le cercle C' décrit par le point m ne seront équidistants qu'autant que le cercle C dont le rayon est q se développera un nombre exact de fois sur le cercle C' dont le rayon est p, c'est-à-dire qu'autant que p et q seront dans un rapport commensurable; et cette condition doit être évidemment satisfaite pour que le mouvement de rotation ne soit pas interrompu.

Mais supposant le pignon terminé par le cylindre idéal qQ sur lequel se trouvent tracées des hélices équidistantes s, s', s'', etc., dont les pas sont tous égaux à h, et les points de départ de ces hélices divisant en parties égales le cercle base du cylindre qQ, nous ne pouvons pas supposer que la roue soit terminée par le cylindre idéal pP, parce que les dents doivent avoir un excès de longueur pour que l'hélice s conduise son homologue S autrement que par le contact, c'est-à-dire ne puisse pas s'échapper, si la résistance devient plus grande que celle que peut vaincre le frottement de roulement. Le cylindre idéal aura donc pour la roue un rayon p'' plus grand que p, et nous appellerons ce cylindre p''P (fig. 4).

Puisque nous supposons que le cylindre qQ se développe un nombre exact de fois sur le cylindre pP, et que nous supposons que les surfaces des dents de la roue sont formées par une surface héliçoïde, il s'ensuit que l'on aura sur le cylindre p''P des hélices équidistantes entre elles et dont les points de départ diviseront le cercle qui lui sert de base et dont le rayon est p'', aussi en parties égales; et les distances de ces hélices, distances mesurées sur les génératrices du cylindre p''P, seront toutes égales entre elles et à celles des hélices tracées sur le cylindre qQ du pignon. Dans ce cas les hélices du pignon ne pourront se mettre en contact qu'avec celles tracées sur le cylindre pP, supposant le point de contact dans le plan des deux axes P et Q.

Mais si, par un vice de construction, les hélices composant les surfaces héliçoïdes qui forment les dents de la roue n'avaient pas leurs pas H dans le rapport $\frac{\mathrm{H}}{h} = \frac{p}{q}$, il arriverait nécessairement, ou que les points de départ des hélices sur le cercle des bases ne seraient point également distants, les distances des hélices dans le sens des génératrices du cylindre n'ayant point varié, ou que ces distances auraient varié, si les points de départ étaient restés les mêmes, c'est-à-dire divisant le cercle base en arcs égaux. Dans le deuxième cas, les hélices du pignon et de la roue ne pourraient se mettre en contact, car les dents ne pourraient s'enchâsser les unes dans les autres; et dans le premier cas, le mouvement de rotation ne pourrait être continu. Ainsi l'engrenage de With ne peut marcher qu'autant que les hélices sont parfaitement exécutées, toutefois, en supposant, ainsi que nous l'avons fait dans tout ce qui précède, que le point de contact sera dans le plan des axes.

With est parvenu à vaincre toutes les difficultés que l'exécution présentait, comme on peut s'en assurer en examinant un modèle d'engrenage cylindrique qui existe dans le cabinet de l'École Polytechnique. Les hélices sont construites avec une rare précision, la division des surfaces cylindriques de la roue et du pignon est d'une grande égalité.

Mais malgré la perfection de son travail, est-il vrai que ses engrenages, mis en place, jouissent du frottement de roulement?

Nous venons de démontrer que tant que le point de contact des hélices qui se conduisaient était dans le plan des axes, cela avait lieu. Nous avons aussi démontré que la moindre inexactitude dans l'inclinaison voulue des hélices, conduisait à des roues et pignons qui ne pouvaient s'engrener, si l'on cherchait à mettre le point de contact dans le plan des axes. Mais le pignon ne peut-il pas avoir son contact hors du plan des axes? Et dans ce cas, les vitesses angulaires seraient-elles toujours dans le même rapport, et le frottement ne pourrait-il pas être de glissement? C'est ce que je vais examiner.

Supposons (fig. 4) une surface héliçoïde E engendrée par la droite ab tournant autour de l'axe P, puis une hélice s engendrée par le point a' tournant autour de l'axe Q, la tangente à l'hélice s faisant avec l'axe Q un angle α.

Sur la surface E je prends un point arbitraire m; par ce point je fais passer un plan tangent T à cette surface. Par le point m passe une hélice S de la surface héliçoïde dont le pas est H. La distance du point m à l'axe P étant p, la tangente à l'hélice S fait avec l'axe P un angle dont la tangente trigonométrique sera $\frac{H}{2\pi p}$.

Par le point m j'élève une parallèle Y à l'axe P, puis je fais passer par ce même point une droite faisant avec cette parallèle l'angle α. Cette droite engendrera par son mouvement de rotation un cône droit dont l'axe sera Y. Le plan T pourra, 1° ne rencontrer le cône qu'en son sommet; 2° toucher ce cône suivant une génératrice; 3° couper le cône suivant deux génératrices.

Dans le premier cas, de quelque manière que l'on place les deux axes P et Q en les supposant toujours dans le même plan, l'hélice s ne pourra être tangente au point m à la surface E: elle la pénétrera toujours.

Dans le deuxième cas, les axes P et Q devront être à une distance déterminée pour que l'hélice s soit tangente à la surface E, et il n'y aura qu'une position de contact.

Dans le troisième cas, il y aura deux positions de contact.

Voyons, d'après ce qui précède, ce qui doit arriver dans les engrenages de With.

La surface E d'une dent de la roue est composée d'hélices dont les pas égaux sont avec celui de l'hélice s du pignon dans le rapport $\frac{H}{h}=\frac{p}{q}$, p et q étant les rayons des cercles bases des cylindres sur lesquels sont tracées les hélices S et s, qui se conduisent, et ces cercles se développant un nombre exact de fois l'un sur l'autre, c'est-à-dire que p et q sont commensurables entre eux, et que S et s ont pour tangentes des lignes qui font avec l'axe P et Q des angles égaux.

J'appelle tS la tangente à l'hélice S, et ts la tangente à l'hélice s, m un point quelconque de S, et a' un point quelconque de s, p la distance de m à l'axe P, et q la distance de a' à l'axe Q.

Et rappelons-nous que la surface E est engendrée par une droite (qui ne sera autre que le côté ab du triangle générateur employé par With), laquelle s'appuie sur l'axe P et l'hélice S, et qui se meut en restant parallèle à une surface conique droite dont P serait l'axe, ou bien en restant parallèle au plan perpendiculaire à l'axe P. Désignons par d la position particulière de cette droite lorsqu'elle passe par le point m.

Si nous prenons sur d un point m' dont la distance p' à l'axe P soit plus grande que p, par ce point m' passera une hélice S' dont la tangente tS' fera avec l'axe P un angle $\alpha' > \alpha$.

Par le point m' faisons passer une droite Y parallèle à P, et dans le plan qui passe par Y et tS', traçons une droite f passant par m' et qui fasse avec l'axe P un angle α.

Si je fais tourner f autour de Y, elle engendrera une surface conique droite Σ dont Y sera l'axe et f la génératrice, et il pourra arriver deux cas (en se rappelant que la droite ts est comprise dans l'angle formé par Y et tS', puisque $\alpha' > \alpha$), ou que ce cône ne rencontre pas le plan T tangent à E en m', plan qui passe par d et tS', ou qu'il lui soit tangent, car le plan qui passe par Y et tS' n'est point perpendiculaire au plan tangent T. [Cela n'aurait lieu qu'autant que d serait perpendiculaire à l'axe P, c'est-à-dire lorsque la surface E sera engendrée par une droite, s'appuyant sur l'axe P et sur l'hélice S, et restant parallèle au plan perpendiculaire à l'axe P, et dans ce dernier cas, le cône Σ ne serait tangent au plan T que lorsque le point m' se confondrait avec le point m.] Si le cône Σ ne rencontre pas le plan tangent T, lorsque l'on mettra l'hélice s en contact avec l'hélice S', et qu'ainsi les points a' et m' seront seulement superposés, que l'on fasse éloigner ou rapprocher les axes P et Q l'un de l'autre en les faisant tourner autour de la droite Y, dans quelque position, enfin, que l'on place les hélices S' et s l'une par rapport à l'autre, il arrivera toujours que s coupera la surface E, par conséquent les deux roues dentées ne pourront être mises en contact par les points a' et m'.

Si le cône est tangent au plan tangent à E, l'hélice s pourra être mise en contact avec la surface E, et sa position sera celle où sa tangente ts se confondra avec l'arète de contact du plan tangent T avec le cône décrit par f autour de Y.

Mais alors les deux hélices s et S' n'ayant point les rayons des cylindres sur lesquels elles sont tracées dans le rapport exact et inverse des vitesses des axes P et Q, elles ne rouleront point angulairement l'une sur l'autre, mais glisseront angulairement l'une sur l'autre. J'ai employé l'expression *angulaire*, parce que dans les positions qu'occupent les hélices s et S', l'on voit que leurs tangentes ne se confondent point, mais se croisent au point qui leur est commun, celui en lequel les points a' et m' se confondent.

Mais si nous considérons le point m appartenant à l'hélice S et si nous établissons que les points a' et m se superposent, alors la tangente ts pourra prendre deux positions sur le plan tangent à la surface E passant par d et tS. Car le plan qui passera par tS, et sera parallèle à l'axe P, ne sera point perpendiculaire au plan tangent au point m à la surface E, à moins que d ne soit perpendiculaire à l'axe P, et dans ce dernier cas la tangente ts ne pourra prendre qu'une seule position et ce sera celle où elle se confond avec la tangente tS. Dans le premier cas s et S pourront avoir un frottement de roulement direct ou angulaire, et dans le deuxième cas, un frottement de roulement direct seulement. En prenant un point m'' sur d entre l'axe P et le point m et établissant que le point a' se superpose avec ce point m'', alors la droite ts pourra toujours prendre deux positions sur le plan tangent à la surface E au point m''. Ainsi l'on doit conclure de tout ce qui précède :

Que si la génératrice d de la surface héliçoïde E qui forme la surface des dents est inclinée par rapport à l'axe P, lors même que les hélices s et S (qui doivent se développer l'une sur l'autre en roulant), seraient en contact, il pourra arriver, ou que leurs tangentes se confondent ou qu'elles se croisent sans que l'on puisse en être averti par autre chose que par le calcul que l'on fera de la somme des distances p et q. Si la distance des axes P et Q dans la position de contact égale $(p+q)$, les tangentes se confondront; si elle est plus petite, les tangentes se croiseront. Dans le premier cas le frottement sera direct et de roulement, et dans le deuxième il sera angulaire et de roulement.

Mais comme nous avons vu que l'hélice s peut se mettre en contact dans deux positions différentes ou dans une seule (la droite d étant toujours inclinée par rapport à P), avec une hélice S′ autre que S, il pourra arriver que la distance des axes P et Q soit $>$ ou $<(p+q)$, et que le frottement soit, dès-lors, angulaire et de glissement. Et l'on ne pourra le reconnaître qu'autant que l'on aura calculé les épaisseurs des roues, de manière que les cercles supérieurs et inférieurs soient dans le même plan, les points a' et m étant en contact, et que le mouvement de rotation soit bien donné par le travail des hélices s et S; si donc par une *pose* défectueuse de l'engrenage le mouvement de rotation est donné par le travail des hélices s et S′, les cercles supérieurs et inférieurs ne seront point dans le même plan (la droite d étant toujours inclinée par rapport à P). Mais dans le cas où d sera perpendiculaire à P, quelque position que l'hélice s prenne, les cercles supérieurs et inférieurs qui terminent la roue et le pignon seront toujours dans le même plan, et aussi dans ce cas sera-t-on assuré que s est en contact avec S lorsque la distance des axes P et Q sera égale à $(p+q)$.

On doit donc préférer pour les engrenages de With la génération de la surface héliçoïde E par une droite d perpendiculaire à l'axe P. Mais on voit par tout ce qui précède, que même dans ce cas, on ne pourra affirmer que le frottement est direct et de roulement, car les moyens mécaniques manquent pour mesurer avec une exactitude mathématique, la distance des deux axes P et Q. De sorte que l'on ne pourra jamais être sûr que le frottement ne soit pas angulaire et de glissement. Le glissement sera, il est vrai, très petit, et de plus sera constant, c'est-à-dire que les dents glisseront l'une sur l'autre de la même quantité pour des espaces angulaires parcourus en temps égaux.

On voit d'après ce qui précède que l'on doit reconnaître quatre espèces de frottement, que je désignerai ainsi :

$$\text{Frottement direct}\left\{\begin{array}{c}\text{de roulement}\\ \text{et}\\ \text{de glissement}\end{array}\right\}\text{ et angulaire}\left\{\begin{array}{c}\text{de roulement}\\ \text{et}\\ \text{de glissement.}\end{array}\right\}$$

Les premiers auront lieu lorsque les courbes en contact auront même tangente, les seconds lorsque leurs tangentes se croiseront au point commun. Mais, dans les engrenages de With, il ne pourra exister que trois de ces quatre frottements :

1°. Frottement direct et de roulement, lorsque les hélices qui sont en contact ont même inclinaison, et que le point de contact est dans le plan des axes;

2°. Frottement angulaire et de roulement, lorsque les hélices qui sont en contact ont même inclinaison, et que le point de contact n'est pas dans le plan des axes;

3°. Enfin, frottement angulaire et de glissement, lorsque les hélices qui sont en contact n'ont pas la même inclinaison, et que le point de contact n'est pas dans le plan des axes.

Pour rendre plus clair tout ce que je viens de dire sur la difficulté que l'on éprouve à mettre en place les engrenages de With, et pour mieux faire comprendre la nature des divers frottements que je viens d'indiquer, je vais construire géométriquement des courbes qui pendant leur mouvement jouiront de l'un ou de l'autre des deux frottements angulaires remarqués dans les engrenages de With. Je supposerai que ces courbes sont tracées sur des cylindres droits, dont les bases sont des cercles ou des courbes arbitraires. Car ce que nous dirons dans le cas des cercles sera vrai pour le cas des courbes arbitraires.

Fig.6. Supposons deux cercles de rayons inégaux, tracés dans un même plan. Le centre du premier étant le point P, son rayon p; le centre du deuxième étant le point Q, et son rayon q. Ces deux cercles se coupant aux points m et n, supposons deux cylindres verticaux ayant ces cercles horizontaux pour bases.

Nous nommerons P′ l'axe du premier, Q′ l'axe du deuxième, et M et N les génératrices d'intersection, lesquelles passeront respectivement par les points m et n. Supposons par M un plan dans lequel nous tracerons une droite d ou une courbe φ (nous emploierons dans les arts la droite d); puis enroulons ce plan, soit sur le cylindre P', soit sur le cylindre Q', la droite d laissera sur le premier pour trace une hélice G, et sur le deuxième une hélice g, qui se croiseront au point m' situé sur la génératrice d'intersection M, la droite d passant par ce point m', les droites m'T' et $m't'$ tangentes au point m' respectivement à l'hélice G et à l'hélice g, se projetteront suivant mT et mt tangentes respectives en m aux cercles p et q.

Si le cylindre P' tourne autour de son axe, l'hélice G conduira l'hélice g et le frottement sera angulaire et de roulement, car les points de ces deux hélices se conduiront angulairement les uns par rapport aux autres de la même manière qu'ils se conduiraient directement, si le cylindre Q' prenant un mouvement autour de la génératrice, M, venait se mettre en contact avec le cylindre P' suivant cette même ligne M, auquel cas, les deux hélices G et g auraient une tangente commune et rouleraient directement l'une sur l'autre.

Si donc par les deux tangentes m'T' et $m't'$, je fais passer un plan, il coupera les deux axes P' et Q', le premier au point o, le deuxième au point o'. Je joins o et m', o' et m' par des droites, puis dans le plan passant par m' et P' je trace une courbe L tangente en m' à la droite om'; et dans le plan passant par m' et Q' une courbe L' tangente en m' à la droite $o'm'$.

Je fais mouvoir la courbe L le long de l'hélice G, de manière qu'elle soit toujours dans un plan passant par l'axe P' et que la droite $o'm'$ dans ses diverses positions reste parallèle à une surface conique droite engendrée par $o'm'$ tournant autour de l'axe P', le point o' étant le sommet du cône.

Je fais mouvoir de la même manière la courbe L' autour de l'axe Q' et le long de l'hélice g; j'aurai alors formé deux surfaces héliçoïdales E et e qui seront pendant le mouvement de rotation toujours tangentes l'une à l'autre et le point de contact se mouvra sur la droite M.

Les deux cercles p et q se coupent par conséquent, le rayon p étant $> q$, l'arc mbn appartenant au cercle q et qui tourne sa concavité vers $mb'n$ appartenant au cercle p sera plus grand que lui. Par conséquent l'hélice g aura un point dont la projection sera en n qui se trouvera au-dessous de celui de G qui a le même point n pour projection horizontale; il faudra donc que l'hélice g conduise en-dessous l'hélice G ou soit conduite en-dessus par elle. Ainsi L' sera au-dessous de L par rapport au plan tangent commun aux deux surfaces E et e. (Plan tangent qui n'est autre que celui qui passe par les deux tangentes $m'T'$ et $m't'$), et ces deux surfaces e et E se conduiront par un frottement angulaire et de roulement.

Dans le cas des engrenages de With, la surface e se réduit à l'hélice g et la courbe L' à un point de cette hélice, et la courbe L n'est autre que la droite om'.

Mais si au lieu de tracer sur le plan passant par la génératrice M une seule courbe φ ou une droite d nous traçons deux courbes φ et φ' ou deux droites d et d' passant par le point m' situé sur M (et ce que nous dirons pour les droites d et d' sera vrai pour le cas où l'on aurait les courbes φ et φ').

En roulant ce plan sur le cylindre P', d laissera pour trace une hélice G, et d' laissera sur le cylindre Q' une hélice g'. Ces deux hélices G et g' auront des tangentes qui se croiseront en m', mais si je fais tourner le cylindre Q' autour de M pour venir se mettre en contact avec le cylindre P', suivant cette même génératrice M, alors les deux hélices G et g' auront bien pour plan tangent commun, le plan vertical passant par la génératrice M et les tangentes aux hélices; mais ces tangentes ne se confondront plus en une seule, elles se croiseront. Les deux hélices dans cette position ne pourront se rouler, et pour qu'elles conservent un point commun le long de la génératrice M, pendant le mouvement de rotation, elles devront glisser l'une sur l'autre, de sorte que, quoique dans leur position primitive angulaire, je puisse leur mener un plan tangent commun par leurs tangentes $m'T'$ et $m't'$ (tangentes qui ne sont autres que les droites d et d'), plan qui coupera les deux axes P' et Q', et me permettra de construire deux héliçoïdes E et e' tangents l'une à l'autre au point m', le frottement entre les deux courbes G et g' sera nécessairement angulaire et de glissement et non de roulement.

Nous n'avons encore dans la construction de ces engrenages à frottement angulaire considéré que deux filets ou dents en contact. Mais pour que le mouvement de rotation puisse être continu, il faudra disposer sur chaque roue une série de filets équidistants.

Dans le cas où p et q seront commensurables entre eux et seront dans le rapport inverse des vitesses des axes, on voit que les hélices tracées sur le cylindre P′ et Q′ ont des pas qui sont dans le rapport des rayons des cercles bases des cylindres, c'est-à-dire que l'on a $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$. Ainsi la construction sera absolument la même dans le cas du roulement angulaire et dans celui du roulement direct.

Mais lorsque p et q sont incommensurables entre eux ou ne sont pas dans le rapport inverse des vitesses des axes, si les hélices de l'héliçoïde E ayant pour pas H, l'hélice tracée sur le cylindre Q′ avait pour pas h, de sorte que l'équation $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$ subsiste, on ne pourrait avoir sur ce cylindre des hélices s, s', s'', etc., équidistantes entre elles sur la génératrice M de la même quantité que les hélices des surfaces E, E′, E″, etc., le sont sur cette même génératrice, et de plus divisant par leurs points de départ le cercle base du cylindre Q′ en parties égales. Alors il faudra incliner ces hélices, en les faisant pivoter autour de leurs points situés sur la génératrice M jusqu'à ce que l'on obtienne un pas h' tel que les points de départ sur le cercle base du cylindre Q′ soient équidistants. Dans ce cas on voit que les hélices s et S ne seront plus également inclinées par rapport à leurs axes respectifs P′ et Q′, et que l'on aura un frottement angulaire et de glissement. (*Voir* la Note A.)

[Il faut encore remarquer que si l'on avait pour bases des cylindres, des courbes autres que des cercles, fig. 7, il faudra que pendant le mouvement de rotation, les petits arcs de la courbe γ interceptés par la courbe γ' soient toujours plus petits ou plus grands que ceux que cette courbe γ interceptait sur γ', parce que l'on a vu qu'il fallait, pour que les hélices pussent se conduire, qu'elles n'eussent pas de point commun sur la deuxième génératrice d'intersection désignée par N, mais seulement sur la première que nous avons désignée par M].

Nous avons démontré que les engrenages de With, tels que ce mécanicien les a construits, en supposant que l'héliçoïde E est engendré par une droite, et que la surface e se réduit à un hélice, pouvaient être mis en contact de trois manières différentes, de sorte que l'on pouvait avoir trois espèces de frottement; mais cela ne tient-il pas à la nature des surfaces E et e que With a choisies, et si l'on employait des surfaces E et e dont les courbes génératrices L et L' seraient autres qu'une droite et un point, ces trois positions de contact seraient-elles possibles? Ainsi l'engrenage étant construit avec précision, pour une position de contact, lorsqu'on le mettra en place, ne sera-t-il pas forcé de prendre la position voulue, sans pouvoir en prendre une autre, comme cela arrive à ceux construits par With, quelque précision d'ailleurs qu'on apporte à leur exécution?

Je suppose que le point m situé sur L décrive une hélice dont le pas est H, et que la distance de ce point m à l'axe P soit p; que sur L' j'aie un point a qui décrive une hélice dont le pas est h, que la distance de ce point a à l'axe Q soit q et que l'on ait $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$, les deux hélices rouleront l'une sur l'autre, et le plan tangent à la surface E au point m, fera avec la verticale passant par ce point m le même angle que le plan tangent à la surface e au point a, fait avec la verticale passant par le point a. J'appelle cet angle δ.

Supposons maintenant un point m' situé sur la courbe L entre l'axe P et le point m ou au-delà du point m, par rapport à l'axe P; le plan tangent à la surface E pour ce point m', fera avec la verticale passant par ce point m' un angle β. Sur la courbe L' je prends un point a' placé d'une manière quelconque par rapport à l'axe Q et le point a; je mène le plan tangent à la surface e en ce point a': ce plan fera avec la verticale un angle β'.

Si β et β' sont égaux, je pourrai mettre les deux surfaces E et e en contact par les points m' et a', alors les hélices décrites par ces points m' et a' se croiseront et l'on aura un frottement angulaire de glissement.

On voit donc qu'il faut que tous les plans tangents à la surface E fassent avec l'axe P des angles plus grands ou plus petits que l'angle δ, et que tous les plans tangents à la surface e fassent avec l'axe Q des angles plus petits ou plus grands que cet angle δ, les plans tangents à E et e aux points m et a étant les seuls qui fassent avec P et Q un angle égal à δ et alors les deux surfaces E et e ne pourront être mises en contact que par les seuls points m et a; mais aussi, en satisfaisant à cette condition, l'exécution des surfaces E et e deviendrait plus difficile dans la pratique.

Tout ce que j'ai dit sur les engrenages cylindriques est applicable aux engrenages coniques. Car si l'on mène un plan tangent aux deux surfaces coniques sur lesquelles sont tracées les spirales, ce plan passant par leur arète de contact, on voit que les deux courbes se développeront sur ce plan tangent suivant une même spirale d'Archimède, ayant le sommet commun aux deux cônes pour pôle, si les pas H et h des spirales coniques sont dans le rapport des rayons des cercles bases des cônes; ces cercles ayant pour pôle commun le sommet des cônes, et pour rayon vecteur l'apothème commune.

Ainsi les engrenages coniques de With jouissent des mêmes propriétés et des mêmes inconvénients dont nous avons parlé en examinant ses engrenages cylindriques.

Dans ce qui précède, j'ai discuté les propriétés qui appartenaient aux engrenages exécutés par With. J'ai fait remarquer les inconvénients qui résultaient de la forme que ce mécanicien avait donnée aux dents. Enfin j'ai indiqué les conditions géométriques auxquelles devraient satisfaire les surfaces des dents, afin que ces inconvénients n'eussent pas lieu, c'est-à-dire, pour qu'on fût toujours assuré que le point de contact était dans le plan des axes, lorsque les roues étaient en place. Mais en même temps j'ai fait sentir que l'exécution mécanique des surfaces héliçoïdes des dents serait sans doute beaucoup plus difficile.

Au lieu donc de surfaces héliçoïdes, je pense que l'on devrait employer des surfaces coniques ayant pour courbes directrices, les hélices équidistantes tracées sur l'un des deux cylindres ou sur l'un des deux cônes idéaux, que nous avons désignés précédemment par pP ou qQ, toutes ces surfaces coniques ayant pour sommet commun, un point de l'axe de la roue dentée.

Je vais donner la construction de ces surfaces coniques; et les avantages qui résulteraient de leur emploi par là même deviendront évidents. J'examinerai seulement le cas des engrenages cylindriques, tout ce que j'aurai dit pour eux s'appliquant aux engrenages coniques.

Ayant deux cylindres, dont les axes sont parallèles, et mis en contact suivant une génératrice G; appelant P l'axe du premier et Q celui du deuxième; nommant p le rayon du cercle base du premier et q celui du deuxième, et supposant que p et q sont commensurables entre eux, on a vu que si l'on traçait sur le premier une hélice φ dont la tangente faisait avec l'axe P un angle α, et sur ce deuxième une hélice ζ dont la tangente faisait avec l'axe Q le même angle α, ces deux hélices étant en contact suivant un point m situé sur la génératrice G; on a vu, dis-je, que ces deux hélices roulaient directement l'une sur l'autre pendant le mouvement de rotation des deux cylindres. Supposons que j'éloigne l'axe Q et qu'il prenne la position Q', en le faisant mouvoir parallèlement à lui-même dans le plan des axes, le point m glissant sur une droite mo perpendiculaire à l'axe P, le point o étant sur cet axe; dès-lors le point m prendra une position m' sur la droite mo, et par ce point m' passera une droite $m'G'$ arète du cylindre $Q'q$. Cette arète, en tournant autour de P, engendrera une surface cylindrique ayant $om' = p'$ pour rayon du cercle qui lui servira de base; et si l'on imprime un mouvement de rotation à ce nouveau système, l'hélice ζ aura pour homologue sur le cylindre Pp' une hélice φ' dont la tangente fera avec l'axe P un angle α. En faisant passer successivement le point m par les divers points de mo, et à chaque position nouvelle faisant les constructions précédentes, on voit que par les divers points m, m', m'', m''', etc., de la ligne mo passeront des hélices φ, φ', φ'', φ''', etc., dont les tangentes feront toutes avec l'axe P le même angle α, ces hélices étant tracées sur des cylindres concentriques, dont les cercles bases auront respectivement pour rayons les distances des points m, m', m'', m''', etc., au point o situé sur P, distances que je désignerai par p, p', p'', p''', etc. et p', p'', p'', etc.; étant les unes plus $>$ et les autres $<$ que p.

La surface formée par les hélices φ, φ', φ'', φ''', etc., étant désignée par E, on voit que suivant la droite mo, qui sera une génératrice de cette surface, il existera un plan tangent unique qui passera par les tangentes à φ, φ', φ'', φ''', etc., et menées respectivement aux points m, m', m'', m''', etc. de ces hélices. Maintenant démontrons que cette surface E est un cône dont le sommet est au point o.

Pour cela, fig. 8, supposons trois cercles concentriques op'', op, op'. Désignant par o leur centre commun et par $p'' < p < p'$ leurs rayons, coupons ces trois cercles par une droite ob passant par le centre. Les points d'intersection étant m'', m, m', supposons que ces trois cercles sont les bases de trois cylindres verticaux, et par chaque génératrice passant respectivement par les points m'', m, m', menons à ces cylindres des plans tangents M'', M, M'. Dans chacun de ces plans traçons des droites parallèles et passant par les trois points situés sur les cercles de base, ces trois droites faisant avec l'axe commun aux cylindres le même angle α; désignons ces droites par $m''d$, md, $m'd$. Les trois plans tangents couperont le plan horizontal sur lequel sont tracés les trois cercles suivant des tangentes à ces cercles et que nous désignerons par $m''t$, mt, $m't$.

Par le point o menons une droite oc coupant les trois tangentes aux points n'', n, n'; élevant par ces trois points des verticales qui seront respectivement situées dans les trois plans tangents, elles couperont les droites $m''d$, md, $m'd$, en trois points g'', g, g', qui seront sur une droite oG passant par le point o.

Si maintenant j'enroule les trois droites $m''d$, md, $m'd$, sur leurs cylindres respectifs, j'aurai trois hélices φ'', φ, φ', faisant avec l'axe un angle constant α, et chacun des points g'', g, g', se placera sur les hélices correspondantes en des points h'', h, h', qui seront évidemment sur une droite oH passant par le point o. Ainsi toutes les hélices φ'', φ, φ', seront sur un cône dont le sommet sera au point o.

Nous avons jusqu'ici supposé qu'il n'existait sur le pignon qQ qu'une seule hélice ζ. Supposons qu'il existe δ hélices équidistantes entre elles (la distance entre deux hélices étant mesurée sur une génératrice du cylindre Qq), ces hélices ζ, ζ', ζ'',...etc... diviseront le cercle base du pignon en δ arcs égaux. Si je fais mouvoir ce cylindre sur celui dont le rayon égale p et dont l'axe est P, alors comme le cylindre Qq se développera exactement sur le cylindre Pp, on obtiendra $\left(\frac{p}{q}\right)\delta$ hélices sur ce cylindre, et toutes équidistantes entre elles et de la même quantité qui existe pour deux hélices consécutives ζ, ζ', tracées sur Qq.

Nommons θ, θ', θ'',.. etc.... les hélices obtenues sur Pp, nous pourrons les regarder comme les directrices d'une série de cônes ayant tous pour sommet le point o.

Nous pourrons couper ces cônes par deux cylindres Pp' et Pp'', p' étant $<$ que p et $p''> p$, et les zones coniques interceptées formeront les surfaces des dents de la roue ayant pour axe P. Et comme les hélices intersections de la série des cônes et du cylindre Pp'' seront équidistantes, mais d'une quantité plus grande que celle qui existe entre deux hélices consécutives ζ, ζ' du pignon; et que celles qui seront l'intersection de la série des mêmes cônes et du cylindre Pp', le seront d'une quantité plus petite; il est évident que le cylindre Qq du pignon ne pourra se mettre en contact qu'avec le cylindre Pp de la roue, le mouvement de rotation ne pouvant être continu qu'autant que les hélices ζ, ζ', etc., conduiront respectivement les hélices θ, θ', etc.; et comme les contacts des diverses dents seront situés sur une génératrice du cylindre Pp et que par ces points passeront respectivement des génératrices des divers cônes formant la surface des dents en contact, ces génératrices feront avec l'axe P des angles différents, puisqu'elles partent toutes du même point o. Les plans tangents aux points de contact feront donc des angles différents avec l'axe P, par conséquent le pignon ne pourra pas tourner autour de la ligne qui contient les points successifs de contact, pour prendre une autre position que celle que la construction a déterminée.

On appliquerait facilement les mêmes raisonnements et les mêmes constructions à l'engrenage conique.

J'ai publié ce Mémoire sans y rien changer, ni modifier; il est conforme au texte du manuscrit présenté à l'Institut, sauf les corrections de style qui arrivent toujours lors de l'impression. Sans nul doute, je présenterais maintenant mes idées dans un autre ordre, plus net et plus précis; mais j'ai pensé que je devais imprimer ce Mémoire textuellement pour que l'on pût s'assurer qu'en effet la question se trouvait résolue dès 1825, et qu'ainsi With avait raison. Je crois devoir ajouter que la démonstration exposée dans ce Mémoire, avait été trouvée dès 1818, lorsque j'étais élève sous-lieutenant d'artillerie à l'école d'application de Metz, et que je n'ai fait que transcrire ce que j'avais écrit, à cette époque, sur les engrenages de With.

Note A.

Dans cette note, je me propose d'exposer en peu de mots toute la théorie géométrique des engrenages de With, et de démontrer d'une manière très simple, qu'en effet, on peut construire des engrenages à la With qui jouissent à volonté des trois espèces de frottement :

Savoir, frottement de roulement, 1° direct ou 2° angulaire et 3° frottement de glissement angulaire; pouvant d'ailleurs rendre aussi considérable que l'on voudra, ou aussi petit que l'on voudra, le glissement d'une dent sur l'autre, pendant le temps que ces deux dents emploient à se conduire.

Supposons deux axes parallèles P et Q distants l'un de l'autre d'une quantité k, et supposons que dans le plan de ces axes on ait une droite R parallèle à l'une et l'autre droite P et Q et telle que la distance p de R à P soit à la distance q de R à Q dans le rapport inverse des vitesses des axes P et Q.

Ainsi V étant la vitesse de l'axe P et v celle de l'axe Q, on aura

$$\frac{p}{q} = \frac{v}{V}.$$

La droite R en tournant autour de l'axe P engendrera un cylindre pP, et en tournant autour de l'axe Q elle engendrera un cylindre qQ.

Coupons ces deux cylindres par deux plans parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite R, et désignons par z la distance entre ces deux plans.

Le premier coupera le cylindre pP suivant un cercle C et le second suivant un cercle C'.

Le premier coupera le cylindre qQ suivant un cercle c et le second suivant un cercle c'.

Supposons ces quatre cercles liés deux à deux respectivement aux axes P et Q, on voit que lorsque l'axe P tournera sur lui-même avec la vitesse V, les cercles C et C' entraîneront respectivement les cercles c et c' et forceront l'axe Q à se mouvoir avec la vitesse v; les cercles homologues C et c, C' et c' roulant l'un sur l'autre.

Si l'on mène suivant la droite R un plan tangent commun aux deux cylindres pP et qQ, et que dans ce plan on mène une droite D, en pliant ce plan sur le cylindre pP, la droite D se déformera suivant une hélice S et, en pliant le même plan sur le cylindre qQ, la droite D se déformera suivant une hélice s.

Et si nous désignons par α l'angle sous lequel la droite D coupe la droite R, on aura, en désignant par H le pas de l'hélice S et par h le pas l'hélice s,

$$(2\Pi . p) \cot \alpha = \mathrm{H} \quad \text{et} \quad (2\Pi . q) \cot \alpha = h.$$

On aura donc

$$\frac{\mathrm{H}}{h} = \frac{p}{q} = \frac{\nu}{\mathrm{V}}.$$

Ainsi les pas des hélices S et s seront dans le rapport inverse des vitesses des axes, ainsi que le sont les rayons des cercles homologues C et c.

Cela posé :

Il est évident que la portion de l'hélice S, ainsi que celle de l'hélice s, comprises entre les deux plans distants entre eux de la quantité z seront égales entre elles et dès-lors pendant le mouvement de rotation, ces deux portions d'hélices rouleront l'une sur l'autre, ayant eu chacun de leur point de contact une tangente commune ; et le point de contact décrira la droite R. On aura donc le frottement de roulement direct. (1er *cas.*)

Si maintenant on fait tourner le cylindre qQ autour de la droite R, sans rien changer à ce qui a été construit précédemment (sinon que la distance des deux axes P et Q sera plus petite que k), les deux hélices S et s se croiseront en un point situé sur la droite R, et pendant le mouvement de rotation, elles se développeront l'une sur l'autre, mais le frottement de roulement sera angulaire, puisque pour chaque point de contact angulaire, leurs tangentes se croisent au lieu de se superposer.

On aura donc le frottement de roulement angulaire. (2e *cas.*)

Mais si l'on prend deux cylindres ayant pour axe l'un P et l'autre Q, ces deux cylindres se coupant suivant deux droites M et N, et si l'on mène deux plans perpendiculaires à la droite M et distants entre eux d'une quantité z; en sorte que le cylindre P soit coupé par le premier plan, suivant un cercle C_1 du rayon p_1, et par le second plan suivant un cercle C'_1 du même rayon p_1; et que le cylindre Q soit coupé par le premier plan suivant un cercle c_1 du rayon q_1 et par le second plan suivant un cercle c'_1 du même rayon q_1.

Si les axes P et Q se meuvent avec les vitesses V et ν, les cercles homologues C_1 et c_1, C'_1 et c'_1 ne rouleront angulairement l'un sur l'autre qu'autant que l'on aura

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\nu}{\mathrm{V}}. \qquad (1)$$

Mais si cette équation ne subsiste pas, alors les cercles homologues glisseront angulairement l'un sur l'autre.

Supposons donc que l'équation (1) n'a pas lieu, et menons par la droite M un plan et dans ce plan une droite D coupant la droite M sous l'angle α. Enroulons ce plan sur le cylindre p_1P; la droite D se déformera suivant une hélice S_1 et en enroulant le même plan sur le cylindre $q_1 Q$, la droite D se déformera suivant un hélice s_1.

Et désignant par H_1 le pas de l'hélice S_1 et par h_1 celui de l'hélice s_1, on aura

$$(2\Pi . p_1) \cot \alpha = H_1 \quad \text{et} \quad (2\Pi . q_1) \cot \alpha = h_1\,;$$

on aura donc

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Mais comme l'équation (1) n'est pas satisfaite, les pas des hélices S_1 et s_1 ne seront pas dans le rapport inverse des vitesses des axes; si donc l'on veut que les deux axes P et Q ne changent pas de vitesses, il faudra nécessairement, en supposant que l'hélice S_1 coupe la droite M sous l'angle α, supposer que l'on a une hélice s'_1 autre que s_1 qui soit chargée de conduire l'hélice S_1.

En désignant par h'_1 le pas de cette hélice particulière s'_1, on devra avoir

$$\frac{H_1}{h'_1} = \frac{v}{V}. \tag{2}$$

Désignant donc par α' l'angle sous lequel l'hélice s'_1 doit couper la droite M, on aura

$$(2\Pi . p_1) \cot \alpha = H_1 \quad \text{et} \quad (2\Pi . q_1) \cot \alpha' = h'_1\,;$$

et en vertu de ce que l'équation (2) doit être satisfaite, on aura

$$\frac{p_1 . \cot \alpha}{q_1 . \cot \alpha'} = \frac{v}{V}. \tag{3}$$

Ainsi, cette équation (3) servira à déterminer l'inclinaison α' de l'hélice s'_1 nécessaire pour que cette hélice s'_1 conduise angulairement l'hélice S_1 et de telle manière que les vitesses des axes soient toujours dans le rapport constant $\frac{v}{V}$.

Mais la position de l'hélice S_1 comprise entre les deux plans distants de la quantité z, ne sera pas égale en longueur à la portion de l'hélice s'_1 comprise entre ces deux mêmes plans; et la différence qui existera entre la longueur rectifiée L de la portion de l'hélice S_1 et la longueur rectifiée l' de la portion de l'hélice s'_1, sera aussi grande ou aussi petite que l'on voudra, pour cela il suffira de faire varier convenablement les rayons p_1 et q_1.

Ainsi plus $\frac{p_1}{q_1}$ différera de $\frac{v}{V}$, plus la différence $(L - l')$ sera grande; plus au contraire $\frac{p_1}{q_1}$ approchera d'être égal à $\frac{v}{V}$, plus la différence $(L - l')$ sera petite.

On aura donc, dans ce cas, un frottement de glissement angulaire qui pourra devenir aussi petit que possible. (3^e *cas*.)

Et remarquons que plus $\frac{p_1}{q_1}$ approche de $\frac{v}{V}$, plus l'angle α' approche d'être égal à l'angle α.

D'après ce qui précède, on voit, 1° que dans les deux premiers cas, les rayons p et q doivent être commensurables entre eux pour que le mouvement de rotation puisse être continu, car il faut que le cercle c se développe un nombre exact de fois sur le cercle C, pour que l'hélice s puisse venir reprendre l'hélice S, et 2° que, dans le troisième cas, les rayons p_1 et q_1 n'ont pas besoin d'être commensurables entre eux ; ainsi il suffira dans les trois cas de diviser les cercles homologues C et c ou C_1 et c_1 en un nombre d'arcs égaux entre eux et tels que si on en place m sur C ou C_1 et n sur c ou c_1, on aura $\frac{m}{n} = \frac{v}{V}$. Dès-lors, si par les points de division des cercles C ou C_1, on fait passer des hélices telles que S ou S_1, et si par les points de division des cercles c ou c_1, on fait aussi passer des hélices telles que s ou s'_1, le mouvement de rotation se continuera sans interruption.