JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAMÉ

Second mémoire sur l'équilibre des températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 351-385.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__351_0>

SECOND MÉMOIRE

Sur l'équilibre des Températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution;

Par G. LAMÉ.

Le premier Mémoire (*) que j'ai présenté sur l'équilibre de la chaleur dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, contient la loi des températures permanentes dans l'ellipsoïde à trois axes inégaux, lorsque sa surface est soumise à des sources constantes de chaleur et de froid. Je me suis proposé, dans ce second Mémoire, de considérer en particulier le cas d'un ellipsoïde de révolution, soit aplati, soit allongé. Voici le résumé succinct de ce travail, tel que je l'ai donné dans la note lue à l'Académie des Sciences.

La solution générale indique, par des transformations faciles, la forme de la série qui doit exprimer la température dans le nouveau corps; il serait même possible de l'en déduire complétement, en faisant un usage convenable de la méthode qui sert à trouver la vraie valeur des fractions, se présentant sous une forme indéterminée. Mais après avoir ainsi reconnu la forme, essentielle et suffisante, de la nouvelle solution, j'ai cru préférable de la compléter par des recherches directes.

La loi des températures dans l'ellipsoïde de révolution, est définitivement exprimée par une série de termes, desquels chacun est le produit de trois facteurs : l'un est le cosinus ou le sinus d'un arc multiple de l'angle azimutal, qui particularise les plans méridiens; les deux autres facteurs sont respectivement des fonctions entières et

(*) *Voyez* Tome IV, p. 133 de ce Journal.

rationnelles du diamètre équatorial, et de l'axe polaire des autres surfaces coordonnées, lesquelles sont des ellipsoïdes et des hyperboloïdes de révolution autour du même axe, isothermes et orthogonaux. Les constantes de ces deux fonctions, ou plutôt de ces deux polynomes, sont totalement dégagées de tout nombre incommensurable. Enfin les coefficients des différents termes sont déterminés, à l'aide des températures données de la surface, par des intégrales définies qu'il est facile de calculer.

Cette solution prend une autre forme, quand on choisit pour paramètre des surfaces conjuguées, les transcendantes qui exprimeraient la température dans chaque système coordonné, pris isolément comme système de surfaces isothermes. Les axes des hyperboloïdes de révolution se transforment alors en exponentielles toujours réelles. Quant à ceux des ellipsoïdes, ils deviennent pareillement des exponentielles réelles, si le sphéroïde est allongé; mais ils prennent la forme de la tangente et de la sécante d'un arc de cercle, si l'ellipsoïde est aplati, c'est à-dire si l'axe polaire est moindre que le diamètre de son équateur. Dans les deux cas, la fonction introduite se présente développée en une série de sinus ou de cosinus pour l'une des variables, et d'exponentielles réelles pour l'autre.

Lorsque les températures de la surface sont distribuées de la même manière sur tous les méridiens, la série qui donne les températures intérieures est indépendante de la longitude; et la fonction donnée, qui n'est plus qu'à une seule variable, est introduite par son développement en une série d'exponentielles réelles.

§ I.

La série qui représente la loi des températures, dans l'ellipsoïde à trois axes inégaux, contient les paramètres de trois surfaces du second ordre, ayant les mêmes foyers géométriques que l'ellipsoïde donné, et en outre deux constantes b et c. Ces constantes servent à particulariser les distances $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2-b^2}$, qui séparent les foyers sur chaque section principale; leurs rapports et leurs grandeurs absolues restent arbitraires, en sorte que la série doit conserver la même forme, quelles que soient les valeurs particulières données à ces constantes. Or lorsqu'on suppose $b = 0$, ou $b = c$, il est aisé de voir que l'ellipsoïde devient de révolution autour du petit axe, ou du grand axe de l'ellipse méridienne. L'équilibre des températures dans un ellipsoïde de révolution doit donc pouvoir se déduire de la solution qui concerne l'ellipsoïde à trois axes inégaux; et de cette liaison naturelle résulte la forme, essentielle et suffisante, de la série qui doit exprimer le nouvel équilibre.

Guidé par ces considérations, nous allons chercher directement la loi des températures permanentes d'un ellipsoïde de révolution, lorsque sa surface est en contact avec des sources de chaleur et de froid. Nous considérerons d'abord le cas où l'ellipsoïde de révolution est aplati, c'est-à-dire tel que le diamètre de l'équateur surpasse l'axe polaire.

L'ellipsoïde proposé est alors compris parmi les surfaces au paramètre ρ, représentées par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2+y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2-c^2} = 1;$$

ces surfaces sont conjuguées à celles désignées par les équations

$$(2) \qquad \frac{x^2+y^2}{\rho_1^2} - \frac{z^2}{c^2-\rho_1^2} = 1, \quad \theta = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right),$$

desquelles la première représente des hyperboloïdes à une nappe, de révolution autour de l'axe polaire, et la seconde des plans méridiens. Les ellipsoïdes (1) et les hyperboloïdes (2) sont tels qu'un même plan méridien les coupe suivant des ellipses et des hyperboles ayant les mêmes foyers géométriques.

Si l'on prend pour coordonnées nouvelles les paramètres $\rho > c$, $\rho_1 < c$, et θ, de ces surfaces orthogonales conjuguées, les équations (1) et (2) donnent aisément pour formules de transformation :

$$(3) \qquad cx = \rho\rho_1 \sin\theta, \quad cy = \rho\rho_1 \cos\theta, \quad cz = \sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}.$$

Si l'on désigne par h, h_1, h_2, les valeurs de l'expression différentielle $\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}$, pour f successivement égal à ρ, ρ_1, θ, le calcul donne

$$(4) \qquad h = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}}, \quad h_1 = \frac{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}}, \quad h_2 = \frac{c}{\rho\rho_1}.$$

Enfin, si l'on représente par le symbole $\Delta_2 f$, la somme........ $\left(\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2}\right)$, on trouve

$$(5) \quad \Delta_2 \rho = \frac{d \log \rho \sqrt{\rho^2 - c^2}}{d\rho} h^2, \quad \Delta_2 \rho_1 = \frac{d \log \rho_1 \sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{d\rho_1} h_1^2, \quad \Delta_2 \theta = 0.$$

Les formules (4) et (5) servent à transformer en coordonnées ρ, ρ_1, θ, l'équation $\Delta_2 V = 0$, laquelle exprime l'équilibre de la température V, dans un corps solide homogène et quelconque : il convient, pour simplifier, d'introduire les deux transcendantes

$$(6) \qquad \varepsilon = \int_c^\rho \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}, \quad \varepsilon_1 = \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho}{\rho_1 \sqrt{c^2 - \rho_1^2}},$$

et l'équation $(\Delta_2 V = 0)$ devient

$$(7) \qquad \rho_1^2 \frac{d^2 V}{d\varepsilon^2} + \rho^2 \frac{d^2 V}{d\varepsilon_1^2} + (\rho^2 - \rho_1^2) c^2 \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0.$$

Le problème d'analyse, qu'il s'agit de résoudre, consiste à trouver une fonction V de ρ, ρ_1, θ, qui, vérifiant l'équation (7) se réduise à une fonction connue $\varphi(\rho_1, \theta)$ quand $\rho = \rho_0$, ou sur la surface de l'ellipsoïde de révolution proposé.

Avant d'aborder la solution de ce problème, il est nécessaire d'étudier les propriétés du système des coordonnées ρ, ρ_1, θ, afin de pouvoir partager la fonction φ, dans le cas le plus général, en plusieurs fonctions plus simples, et satisfaisant à des conditions de symétrie particulières.

§ II.

Le système coordonné qui vient d'être défini n'est qu'un cas particulier du système général employé pour la solution de l'ellipsoïde à trois axes inégaux ; on peut le déduire de ce dernier en posant

$\rho_2 = b \sin\theta$, et ensuite $b = 0$. Il résulte de là, et des considérations exposées au § XVI du premier Mémoire, que parmi les six quantités ρ, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ρ_1, $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, $\sin\theta$, $\cos\theta$, introduites par les nouvelles coordonnées, les seules pour lesquelles il soit nécessaire d'admettre des valeurs négatives, sont $\sin\theta$ ou θ, ρ_1 et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$. Les changements de signe de ces variables sont liés avec ceux de x, y, z : d'après les formules (3), x change de signe avec θ, y avec ρ_1, z avec $\sqrt{\rho^2 - c^2}$.

Pour fixer les idées, nous appellerons *longitude* l'angle azimutal θ. Le plan correspondant à $x = 0$ ou à $\theta = 0$, sera alors le méridien de départ; la longitude étant positive à droite, et négative à gauche de ce plan. Le méridien perpendiculaire à celui dont la longitdue est nulle, sépare les points de l'espace situés en avant et pour lesquels ρ_1 est positif, de ceux situés en arrière et pour lesquels ρ_1 est négatif. D'où il suit que dans un plan méridien quelconque, deux points pris de part et d'autre de l'axe de révolution, correspondent à des valeurs de ρ_1 ayant des signes contraires. Enfin le plan de l'équateur sur lequel $z = 0$, ou bien $\rho = c$, ou $\rho_1 = \pm c$, divise l'espace de telle manière que $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ est positif au-dessus, et négatif au-dessous de ce plan.

D'après cette représentation géométrique, θ ne varierait qu'entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et ρ_1 entre $-c$ et $+c$. Mais on peut aussi particulariser successivement tous les points de l'espace, en ne conservant que des valeurs positives de ρ_1, et même de θ : les points, situés en avant de l'axe de révolution, se distinguent alors de ceux situés en arrière, sur un même plan méridien, en ce que θ augmente de π lorsqu'on passe des premiers aux seconds.

§ III.

La fonction V qui représentera la loi que nous cherchons, étant exprimée en coordonnées rectilignes, doit être développable suivant les puissances ascendantes de ces variables, sans que la série résultante contienne des exposants négatifs : car la température ne saurait devenir infinie pour $z = 0$, ou $y = 0$, c'est-à-dire pour des points intérieurs de l'ellipsoïde situés sur l'équateur, ou sur le méridien dont la longitude est nulle, ou $\frac{\pi}{2}$. Le développement de V en x, y, z, peut être groupé ainsi :

$$V = P + P'x + P''y + P'''z + P_3 yz + P_2 zx + P_1 xy + P_0 xyz\,;$$

$P, P', \ldots P_1, P_0$, étant des fonctions rationnelles de x^2, y^2, z^2. Si l'on transforme ce développement en coordonnées ρ, ρ_1, θ, à l'aide des formules (3), il prendra la forme

$$(8)\left\{\begin{aligned} V = {} & Q + Q'\rho\rho_1 \sin\theta + Q''\rho\rho_1\cos\theta + Q_1 \sin\theta\cos\theta \\ & + (Q''' + Q_2\rho\rho_1 \sin\theta + Q_3\rho\rho_1\cos\theta + Q_0 \sin\theta\cos\theta)\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\,; \end{aligned}\right.$$

$Q, Q', \ldots Q_1, Q_0$, étant des fonctions rationnelles de $\rho^2, \rho_1^2, \sin^2\theta, \cos^2\theta$.

Sur la surface de l'ellipsoïde proposé, ou pour $\rho = \rho_0$, la température se réduit à une fonction V_0 des deux variables ρ_1 et θ, laquelle a pour forme correspondante à celle qui précède :

$$(9)\left\{\begin{aligned} V_0 = {} & (q + q'\rho_1\sin\theta + q''\rho_1\cos\theta + q_1\sin\theta\cos\theta) \\ & + (q''' + q_2\rho_1\sin\theta + q_3\rho_1\cos\theta + q_0\sin\theta\cos\theta)\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\,, \end{aligned}\right.$$

$q, q', \ldots q_1, q_0$, étant des fonctions rationnelles de $\rho_1^2, \sin^2\theta, \cos^2\theta$.

Il suit de là que l'état général de l'équilibre des températures, dont nous cherchons la loi, peut être regardé comme la superposition de huit états partiels, correspondant aux huit termes des développements (8) et (9), et qui jouissent chacun de propriétés particulières.

Pour les quatre termes qui ne contiennent pas $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ ou $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$ comme facteur, les sources calorifiques de la surface, et par suite les températures intérieures de l'ellipsoïde, sont les mêmes en deux points symétriquement placés, l'un au-dessus, et l'autre au-dessous du plan de l'équateur. Tandis que pour les quatre termes qui contiennent ce facteur irrationnel les températures des deux points symétriques sont égales et de signes contraires.

Pour les quatre termes qui ne contiennent pas le facteur $\sin\theta$, les sources et les températures sont distribuées symétriquement, à droite et à gauche du plan méridien dont la longitude est zéro. Tandis que pour les quatre termes qui contiennent ce facteur $\sin\theta$, les températures des deux points symétriques par rapport au méridien de départ, sont de signes contraires et égales seulement en valeur absolue.

Enfin, les termes qui ne présentent aucun des deux facteurs $\sin\theta$, $\cos\theta$, ainsi que ceux qui contiennent ces deux facteurs à la fois, ne changeant ni de signes, ni de valeurs, quand θ augmente de π, correspondent à des états partiels où les températures sont distribuées symétriquement de part et d'autre de l'axe de révolution, sur chaque plan méridien. Tandis que les quatre termes qui présentent le facteur $\sin\theta$, ou $\cos\theta$, changeant de signe et conservant la même valeur absolue, quand θ augmente de π, désignent des états partiels où les températures sont de signes contraires en deux points d'un même plan méridien symétriques par rapport à l'axe.

Quelle que soit la fonction $\varphi(\rho_1, \theta)$ qui exprime la loi donnée des températures de la surface, elle pourra toujours être décomposée en huit fonctions plus simples, dont elle sera la somme, et qui jouiront respectivement des conditions de symétrie, directe ou inverse, particularisant les huit termes généraux du développement (9).

Il suit de là que la solution générale sera facile à composer, si l'on parvient à exprimer la loi des températures permanentes de l'ellipsoïde, dans chacun des huit cas particuliers qui viennent d'être distingués, et qui sont représentés par les huit groupes (8).

§ IV.

Le développement (8) de V, ne contenant que des puissances entières et positives de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$, peut être transformé de la manière suivante :

$$(10)\left\{\begin{aligned} V=&\sum P_i\cos 2i\theta+\sum P'_i\sin(2i+1)\theta+\sum P''_i\cos(2i+1)\theta+\sum P'''_i\sin 2i\theta\\ &+\left[\sum R_i\cos 2i\theta+\sum R'_i\sin(2i+1)\theta+\sum R''_i\cos(2i+1)\theta+\sum R'''_i\sin 2i\right]\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\varrho_1^2}.\end{aligned}\right.$$

Les sigma s'étendent à toutes les valeurs positives du nombre entier i.

P_i, $P'\ldots R''_i$, R'''_i, sont des séries rationnelles en ρ et ρ_1, qui ne renferment que des puissances positives de ces variables, et qui changent pour chaque valeur de i; P_i, P'''_i, R_i, R'''_i, ne contiennent que des puissances paires de ρ et ρ_1, et P'_i, P'', R'_i, R''_i, seulement des puissances impaires. Les huit états partiels qui se superposent dans le cas général sont maintenant représentés par les huit groupes du développement (10).

La composition des séries $P_i\ldots R'''_i$, est indiquée par la solution de l'ellipsoïde à trois axes inégaux. En effet, il a été démontré dans le premier Mémoire que la température permanente d'un ellipsoïde quelconque, était essentiellement exprimée par la série :

$$(11) \qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} S_n MEE_1E_2;$$

E, E_1, E_2, sont des polynomes entiers, rationnels et du degré n, savoir: E en ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$, axes de l'ellipsoïde isotherme; E_1 en ρ_1 $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, axes de l'hyperboloïde isotherme à une nappe; E_2 en ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, axes de l'hyperboloïde isotherme à deux nappes; de plus ces polynomes sont composés de la même manière et avec les mêmes coefficients ; la somme S_n est composée en général de $(2n+1)$ termes semblables, dans lesquels les polynomes facteurs ont tous le même degré n ; enfin le sigma s'étend à toutes les valeurs positives du nombre n.

Pour déduire de cette série (11) appartenant à tout système ellipsoïdal, celle particulière à l'ellipsoïde de révolution aplati, il faut poser $\rho_2 = b\sin\theta$, et faire $b=0$. Lorsqu'on fait d'abord $\rho_2 = b\sin\theta$, d'où $\sqrt{b^2-\rho_2^2} = b\cos\theta$, et $\sqrt{c^2-\rho_2^2} = \sqrt{c^2-b^2\sin^2\theta}$, on peut négliger $-b^2\sin^2\theta$ devant c^2, sous le dernier radical, ou remplacer $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$ par c; tout le polynome E_2, de degré n, devient alors une fonction entière et rationnelle de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, qui peut être remplacée par une série limitée de sinus ou de cosinus d'arcs multiples de θ, le multiple le plus élevé ne surpassant pas $n\theta$. Quant aux polynomes E et E_1, ils conservent le même degré n, restent entiers, rationnels et composés de la même manière, le premier en ρ et $\sqrt{\rho^2-c^2}$, le second en ρ_1 et $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$.

Si l'on met en facteur commun dans la série (11) ainsi transformée, les produits EE_1, qui multiplient le cosinus et le sinus d'un même multiple $j\theta$, ce facteur, mis sous la forme $\sum MEE_1$, se composera d'une somme de produits EE_1 de deux polynomes symétriques et du même degré n. Ce degré varie d'un terme à l'autre, mais ne peut être moindre que j : car il est évident que, dans la série générale, un polynome E_2 transformé ne contiendra pas le sinus ou le cosinus de $j\theta$, si son degré primitif surpasse j.

Il suit de cette transformation de la série générale, que les séries partielles P_1, P'_1, ... R''_1, R'''_1, des huit groupes (10) sont nécessairement de la forme $\sum MEE_1$; E et E_1 sont des polynomes entiers, rationnels et composés de la même manière, l'un en ρ, l'autre en ρ_1; le degré n de chaque polynome varie d'un terme à l'autre; enfin, le sigma s'étend depuis une valeur de n qui dépend du multiple de θ correspondant, jusqu'à $n=\infty$.

Telle est la forme, essentielle et suffisante, de la série qui doit représenter les températures permanentes dans l'ellipsoïde de révolution aplati, lorsque sa surface est en contact avec des sources de chaleur et de froid. Mais pour que cette série soit complétement connue, il reste à déterminer les polynomes conjugués E et E_1 qui correspondent aux divers états partiels, définis par les groupes du développement (10).

§ V.

Le cas le plus simple de la question qui nous occupe, est celui où la fonction donnée des températures de la surface, serait indépendante de θ, ou ne contiendrait que ρ_1; c'est-à-dire celui où les foyers calorifiques seraient distribués de la même manière dans tous les plans méridiens. Il convient de traiter d'abord ce cas simple, avant d'aborder la solution générale.

Dans les circonstances supposées, la fonction représentant la température dans l'ellipsoïde est indépendante de θ, et l'équation aux différences partielles qu'elle doit vérifier se réduit à celle-ci :

$$(12) \qquad \rho_1^2 \frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + \rho^2 \frac{d^2V}{d\varepsilon_1^2} = 0;$$

ε et ε_1 étant toujours les transcendantes (6). Le problème d'analyse, qu'il faut résoudre, consiste à trouver une fonction V de ρ et ρ_1 qui, vérifiant l'équation (12), se réduise à une fonction connue $\varphi(\rho_1)$ de ρ_1, quand $\rho = \rho_0$.

Les seuls termes du développement (10) qu'il faille conserver, sont $(P_0 + \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}.R_0)$: la première série, P_0, correspond à une distribution des sources calorifiques, identiquement la même au-dessus et au-dessous de l'équateur; la seconde série, R_0, appartient à une autre distribution de ces sources, telle que deux points, placés symétriquement par rapport au plan de l'équateur, aient des températures égales en valeur absolue, mais de signes contraires. Or, la fonction φ peut toujours être décomposée en deux fonctions partielles, jouissant respectivement des deux conditions de symétrie, directe ou inverse, qui viennent d'être définies; l'une de ces fonctions partielles servira à déterminer la série P_0, l'autre la série R_0. Il faut considérer séparément les deux états particuliers qui correspondent à ces séries.

Lorsque les foyers calorifiques, déjà distribués de la même manière sur tous les méridiens, le sont en outre symétriquement au-dessus et au-dessous de l'équateur, la température V doit être exprimée par la seule série P_0, qui d'après les considérations des § III et IV, est nécessairement de la forme

$$(13) \qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} MEE_1;$$

E et E_1 étant des polynomes rationnels en ρ^2 et ρ_1^2, du même degré $2n$, ayant même coefficients; et le sigma s'étendant à toutes les valeurs positives du nombre entier n. Pour que la série (13) puisse résoudre la question dont il s'agit ici, il faut que chaque produit EE_1 vérifie séparément l'équation (12). Or, si l'on pose dans cette équation $V = EE_1$, E ne dépendant que de ρ, et E_1 que de ρ_1, il vient

$$(14) \qquad \rho_1^2 E_1 \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} + \rho^2 E \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = 0;$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$(15)\qquad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} - A\rho^2 E = 0,\quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} + A\rho_1^2 E_1 = 0;$$

A étant un coefficient constant, le même dans les deux équations.

Les transcendantes ε et ε_1 étant les fonctions de ρ et ρ_1 données par les relations (6), on a

$$\frac{dE}{d\varepsilon} = \frac{dE}{d\rho}\rho\sqrt{\rho^2 - c^2},\quad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} = \frac{d^2E}{d\rho^2}(\rho^4 - c^2\rho^2) + \frac{dE}{d\rho}(2\rho^3 - c^2\rho),$$
$$\frac{dE_1}{d\varepsilon_1} = \frac{dE_1}{d\rho_1}\rho_1\sqrt{c^2 - \rho_1^2},\quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = \frac{d^2E_1}{d\rho_1^2}(c^2\rho_1^2 - \rho_1^4) + \frac{dE_1}{d\rho_1}(c^2\rho_1 - 2\rho_1^3);$$

et les équations (15) peuvent s'écrire ainsi

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2E}{d\rho^2}(\rho^4 - c^2\rho^2) + \frac{dE}{d\rho}(2\rho^3 - c^2\rho) = A\rho^2 E,\\ &\frac{d^2E_1}{d\rho_1^2}(\rho_1^4 - c^2\rho_1^2) + \frac{dE_1}{d\rho_1}(2\rho_1^3 - c^2\rho_1) = A\rho_1^2 E_1.\end{aligned}\right.$$

La symétrie de ces deux équations indique que si l'on trouve un polynome E du degré n en ρ^2, et une valeur de A correspondante, qui vérifient la première, la même valeur de A et le polynome E_1 qu'on déduira de E en y changeant ρ^2 en ρ_1^2, vérifieront la seconde : ce qui confirme la symétrie prévue de la série (13).

§ VI.

Soit posé $E = \alpha_0\rho^{2n} + \alpha_1\rho^{2n-2} + \alpha_2\rho^{2n-4} + \ldots + \alpha_n$, dans la première des équations (16), il vient, en divisant par ρ^2, facteur commun à tous les termes, et en ordonnant le premier membre,

$$\begin{aligned} &2n(2n+1)\alpha_0\rho^{2n} + [(2n-1)(2n-2)\alpha_1 - (2n)^2c^2\alpha_0]\rho^{2n-2}\\ &\quad + [(2n-3)(2n-4)\alpha_2 - (2n-2)^2c^2\alpha_1]\rho^{2n-4} + \ldots\\ &\quad = A\alpha_0\rho^{2n} + A\alpha_1\rho^{2n-2} + A\alpha_2\rho^{2n-4} + \ldots.\end{aligned}$$

L'identification de ces deux polynomes donne d'abord $A = 2n(2n+1)$, et les n relations

$$
\begin{aligned}
&[A - (2n - 2)(2n - 1)]\alpha_1 + (2n)^2 c^2 \alpha_0 = 0,\\
&[A - (2n - 4)(2n - 3)]\alpha_2 + (2n - 2)^2 c^2 \alpha_1 = 0,\\
&[A - (2n - 6)(2n - 5)]\alpha_3 + (2n - 4)^2 c^2 \alpha_2 = 0, \ldots
\end{aligned}
$$

Si l'on convient de représenter par le symbole A_j le produit $2j(2j+1)$, d'un nombre pair $2j$ par l'impair qui le suit, les valeurs des n coefficients $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, déduites des relations précédentes seront

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{(2n)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2 \alpha_0,\\
\alpha_2 &= +\frac{(2n)^2 (2n-2)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})} c^4 \alpha_0,\\
\alpha_3 &= -\frac{(2n)^2 (2n-2)^2 (2n-4)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})(A_n - A_{n-3})} c^6 \alpha_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_n &= (-1)^n \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 \ldots 4^2 . 2^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2}) \ldots (A_n - A_1) A_n} c^{2n} \alpha_0;
\end{aligned}
$$

et l'on pourra supposer $\alpha_0 = 1$.

Ainsi $2n$ étant un nombre entier pair quelconque, on satisfera aux équations différentielles (15) ou (16), en prenant

$$A = 2n(2n + 1) = A_n,$$

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
E &= \rho^{2n} - \frac{(2n)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2 \rho^{2n-2} + \frac{(2n)^2 (2n-2)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})} c^4 \rho^{2n-4} - \ldots (-1)^n \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 \ldots 4^2 . 2^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2}) \ldots (A_n - A_1) A_n} c^{2n},\\
E_1 &= \rho_1^{2n} - \frac{(2n)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2 \rho_1^{2n-2} + \frac{(2n)^2 (2n-2)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})} c^4 \rho_1^{2n-4} - \ldots (-1)^n \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 \ldots 4^2 . 2^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2}) \ldots (A_n - A_1) A_n} c^{2n};
\end{aligned}
\right.
$$

les polynomes E et E_1 ainsi définis se terminent évidemment au terme en c^{2n}.

§ VII.

La série (13) est maintenant connue, les deux polynomes conjugués E et E_1 de chacun de ses termes étant donnés par les formules (17) pour chaque valeur de n. Lorsque $\rho = \rho_0$, ou sur la surface de l'ellipsoïde, on a

$$V_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{ME}(\rho_0)\,\mathrm{E}_1,$$

$\mathrm{E}(\rho_0)$ désignant la constante à laquelle se réduit E pour $\rho = \rho_0$. Mais V_0, ou la température à la surface, est une fonction connue $\psi(\rho_1)$ de ρ_1 satisfaisant par hypothèse à la condition de symétrie directe du cas actuel; on doit donc avoir

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{NE}_1 = \psi(\rho_1); \tag{18}$$

N représentant pour simplifier le produit $\mathrm{ME}(\rho_0)$; et il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient général N, de telle sorte que la série (18) soit un des développements possibles de la fonction $\psi(\rho_0)$.

Or, si E_1 et E'_1 désignant deux polynomes différents, pris dans la série (18), de degrés $2n$ et $2n'$, ou correspondant à des valeurs différentes $\mathrm{A} = 2n(2n+1)$, $\mathrm{A}' = 2n'(2n'+1)$, ces deux polynomes vérifieront les équations

$$\frac{d^2\mathrm{E}_1}{d\varepsilon_1^2} + \mathrm{A}\rho_1^2\mathrm{E}_1 = 0,\quad \frac{d^2\mathrm{E}'_1}{d\varepsilon_1^2} + \mathrm{A}'\rho_1^2\mathrm{E}'_1 = 0,$$

d'où l'on conclut aisément

$$\mathrm{E}_1\frac{d^2\mathrm{E}'_1}{d\varepsilon_1^2} - \mathrm{E}'_1\frac{d^2\mathrm{E}_1}{d\varepsilon_1^2} = (\mathrm{A} - \mathrm{A}')\rho_1^2\mathrm{E}_1\mathrm{E}'_1;$$

si l'on multiplie cette équation par $d\varepsilon_1 = \dfrac{d\rho_1}{\rho_1\sqrt{c^2-\rho_1^2}}$, et que l'on intègre de $\rho_1 = 0$ à $\rho_1 = c$, le premier membre disparaîtra, car son intégrale indéfinie

$$\left(\mathrm{E}_1\frac{d\mathrm{E}'_1}{d\varepsilon_1} - \mathrm{E}'_1\frac{d\mathrm{E}_1}{d\varepsilon_1}\right),\ \text{ou}\ \left(\mathrm{E}_1\frac{d\mathrm{E}'_1}{d\rho_1} - \mathrm{E}'_1\frac{d\mathrm{E}_1}{d\rho_1}\right)\rho_1\sqrt{c^2-\rho_1^2},$$

s'évanouit aux deux limites, et l'on aura simplement

$$0 = (\mathrm{A} - \mathrm{A}')\int_0^c \frac{\rho_1\mathrm{E}_1\mathrm{E}'_1\,d\rho_1}{\sqrt{c^2-\rho_1^2}};$$

donc, excepté lorsque $A = A'$, on a

$$(19) \qquad \int_0^c \frac{\varrho_1 E_1 E'_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}} = 0.$$

Il suit de là qu'en multipliant l'équation (18) par le facteur $\frac{\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}$; et intégrant de $\rho_1 = 0$ à $\rho_1 = c$, tous les termes du premier membre disparaîtront à l'exception de celui en E_1; ce qui donnera pour le coefficient N :

$$N = \frac{\int_0^c \frac{\psi(\varrho_1)\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}},$$

et pour les séries (18) et (13),

$$(20) \quad \psi(\rho_1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int_0^c \frac{\psi(\varrho_1)\,\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}} E_1, \quad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int_0^c \frac{\psi(\varrho_1)\,\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}} \frac{E}{E(\varrho_0)} E_1,$$

formules qui complètent la solution, car la dernière est l'expression analytique de la loi cherchée.

§ VIII.

La solution précédente peut être exprimée d'une autre manière, en adoptant pour paramètres des ellipsoïdes (1), et des hyperboloïdes (2), les transcendantes (6) qui serviraient à exprimer les températures sur ces surfaces, prises comme systèmes de surfaces isothermes. Les équations (6) donnent en effectuant les intégrations indiquées

$$(21) \qquad c\varepsilon = \text{arc}\left(\cos = \frac{c}{\varrho}\right), \quad c\varepsilon_1 = \log \frac{\varrho_1}{c + \sqrt{c^2-\varrho_1^2}};$$

d'où l'on conclut aisément

$$(22) \qquad \rho = \frac{c}{\cos c\varepsilon}, \quad \rho_1 = \frac{2c}{e^{c\varepsilon_1} + e^{-c\varepsilon_1}};$$

e étant la base des logarithmes népériens. Les limites de ρ_1 étant zéro et c, il suit de la seconde des relations (22), que les limites correspondantes de ε_1 seront l'infini et zéro.

La première des séries (20) prendra la forme suivante, en remarquant que $\psi(\rho_1)$ doit être maintenant considéré comme une fonction $\mathrm{f}(\varepsilon_1)$ de ε_1,

$$(23)\qquad \mathrm{f}(\varepsilon_1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(\varepsilon_1)\,\mathrm{E}_1 d\varepsilon_1}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{E}_1^2 d\varepsilon_1}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}}\,\mathrm{E}_1,$$

et la température V sera donnée par la série

$$(24)\qquad \mathrm{V} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(\varepsilon_1)\,\mathrm{E}_1 d\varepsilon_1}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{E}_1^2 d\varepsilon_1}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}}\,\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}(\varepsilon_0)}\,\mathrm{E}_1;$$

ε_0 étant la valeur de ε correspondante à $\rho = \rho_0$.

Les fonctions E et E_1 sont alors, pour chaque valeur de n, les séries limitées qui suivent : [A_j désignant toujours le produit $2j(2j+1)$]

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E} &= \left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}}\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_{n-1})(\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_{n-2})}\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n-4} - \ldots \\
&\qquad (-1)^n \frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 4^2.2^2}{(\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_{n-1})\ldots(\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_1)\mathrm{A}_n}, \\
\mathrm{E}_1 &= \left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_{n-1}}\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_{n-1})(\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_{n-2})}\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n-4} - . \\
&\qquad (-1)^n \frac{(\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_{n-1})\ldots(\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_1)\mathrm{A}_n}{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 4^2.2^2},
\end{aligned}\right.$$

lesquelles vérifient respectivement les deux équations différentielles

$$(26)\quad \frac{d^2\mathrm{E}}{d\varepsilon^2} - \frac{2n(2n+1)c^2}{(\cos c\varepsilon)^2}\mathrm{E} = 0, \qquad \frac{d^2\mathrm{E}_1}{d\varepsilon_1^2} + \frac{2n(2n+1).4c^2}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}\mathrm{E}_1 = 0.$$

Toutes ces formules se simplifient quand on suppose la constante c égale à l'unité de longueur, ou quand on remplace $c\varepsilon$ et $c\varepsilon_1$ par de nouvelles variables.

§ IX.

Si l'on pose $c\varepsilon_1 = x$, $f(\varepsilon_1) = F(x)$, il résultera du paragraphe précédent un théorème d'analyse dont voici l'énoncé : n étant un nombre entier : $E_n(x)$ étant la série suivante de $n+1$ termes,

$$\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{A_n-A_{n-1}}\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A_n-A_{n-1})(A_n-A_{n-2})}\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^{2n-4} - \ldots$$
$$(-1)^n \frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 4^2.2^2}{(A_n-A_{n-1})\ldots(A_n-A_1)A_n} = E_n(x)$$

dans laquelle le symbole A_j représente le produit $2j(2j+1)$, et qui vérifie l'équation

$$\frac{d^2E_n(x)}{dx^2} + \frac{4A_n}{(e^x+e^{-x})^2}E_n(x) = 0;$$

enfin $F(x)$ représentant une fonction de x telle que $F(-x) = F(x)$; on aura identiquement

$$(27) \qquad F(x) = \sum^{n=\infty} \frac{\int_0^\infty \frac{F(\alpha)E_n(\alpha)\,d\alpha}{(e^\alpha+e^{-\alpha})^2}}{\int_0^\infty \frac{[E_n(\alpha)]^2\,d\alpha}{(e^\alpha+e^{-\alpha})^2}} E_n(x).$$

Ainsi une fonction paire d'une seule variable se trouve développée par la formule (27) en une série d'exponentielles réelles. La solution d'un autre cas particulier va nous conduire à une formule analogue à celle (27), pour une fonction impaire, ou qui change de signe avec sa variable en conservant la même valeur absolue.

§ X.

Lorsqu'à la surface de l'ellipsoïde, les températures données, toujours distribuées de la même manière sur tous les méridiens, sont positives au-dessus de l'équateur, négatives au-dessous, en conservant la même valeur absolue pour deux points symétriques par rapport à ce plan, la température V doit être exprimée par la série

$R_0\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$ du développement (10). Il résulte des §§ III et IV que cette série sera aussi de la forme (13); mais alors E et E_1 devront contenir respectivement les facteurs $\sqrt{\rho^2-c^2}$ et $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$. Le produit EE_1 doit toujours vérifier séparément l'équation (12); ce qui exige que E et E_1 satisfassent encore à des équations de la forme (15).

Soit posé $E=Q\sqrt{\rho^2-c^2}$, $E_1=Q_1\sqrt{c^2-\rho_1^2}$; Q et Q_1 seront nécessairement des polynomes entiers et rationnels en ρ^2 et ρ_1^2. On a successivement [relations (6)]:

$$\frac{dE}{d\varepsilon}=\frac{dQ}{d\rho}\rho(\rho^2-c^2)+Q\rho^2,\quad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2}=\left[\frac{d^2Q}{d\rho^2}(\rho^4-c^2\rho^2)+(4\rho^3-c^2\rho)\frac{dQ}{d\rho_1}+2\rho^2Q\right]\sqrt{\rho^2-c^2}$$
$$\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}=\frac{dQ_1}{d\rho_1}\rho_1(c^2-\rho_1^2)-Q_1\rho_1^2,\quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2}=\left[\frac{d^2Q_1}{d\rho_1^2}(c^2\rho_1^2-\rho_1^4)+(c^2\rho_1-4\rho_1^3)\frac{dQ_1}{d\rho_1}-2\rho_1^2Q_1\right]\sqrt{c^2-\rho_1^2};$$

et les équations différentielles (15) deviennent, en changeant les signes de la seconde, et supprimant les facteurs communs $\sqrt{\rho^2-c^2}$ et $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$:

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2Q}{d\rho^2}(\rho^4-c^2\rho^2)+\dfrac{dQ}{d\rho}(4\rho^3-c^2\rho)=(A-2)\rho^2Q, \\[2mm] \dfrac{d^2Q_1}{d\rho_1^2}(\rho_1^4-c^2\rho_1^2)+\dfrac{dQ_1}{d\rho_1}(4\rho_1^3-c^2\rho_1)=(A-2)\rho_1^2Q_1. \end{cases}$$

D'après la symétrie de ces équations, si l'on trouve un polynome Q en ρ^2, et une valeur correspondante de A qui vérifient la première, il suffira de changer dans Q, ρ^2 en ρ_1^2, pour avoir son conjugué Q_1; cette similitude de forme était prévue.

Soit posé $Q=\alpha_0\rho^{2n}+\alpha_1\rho^{2n-2}+\ldots+\alpha_n$, dans la première des équations, (28) il viendra, en divisant par ρ^2 et ordonnant le premier membre,

$$\begin{aligned} 2n(2n+3)\alpha_0\rho^{2n}&+[(2n-2)(2n+1)\alpha_1-(2n)^2c^2\alpha_0]\rho^{2n-2} \\ &+[(2n-4)(2n-1)\alpha_2-(2n-2)^2c^2\alpha_1]\rho^{2n-4}+\ldots \\ &=(A-2)\alpha_0\rho^{2n}+(A-2)\alpha_1\rho^{2n-2}+(A-2)\alpha_2\rho^{2n-4}+\ldots \end{aligned}$$

L'identification de ces deux polynomes donne $(A-2)=2n(2n+3)$, et les n relations

$$(A-2)\alpha_1=(2n-2)(2n+1)\alpha_1-(2n)^2c^2\alpha_0,\quad (A-2)\alpha_2=(2n-4)(2n-1)\alpha_2-(2n-2)^2c^2\alpha_1,$$
$$(A-2)\alpha_3=(2n-6)(2n-3)\alpha_3-(2n-4)^2c^2\alpha_2,\ldots$$

d'où l'on conclut d'abord $A=2n(2n+3)+2=(2n+2)(2n+1)$

Ajoutons respectivement aux deux membres des n relations précédentes $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, $2\alpha_3$;... remarquons que

$$(2n-2)(2n+1)+2=2n(2n-1),\ (2n-4)(2n-1)+2=(2n-2)(2n-3),\\ (2n-6)(2n-3)+2=(2n-4)(2n-5)\ldots;$$

enfin convenons que le symbole A'_j désignera, pour simplifier, le produit $2j(2j-1)$, d'un nombre pair $2j$ par l'impair qui le précède; on aura plus simplement

$$A=A'_{n+1},\ (A'_{n+1}-A'_n)\alpha_1+(2n)^2c^2\alpha_0=0,\ (A'_{n+1}-A'_{n-1})\alpha_2+(2n-2)^2c^2\alpha_1=0,\\ (A'_{n+1}-A'_{n-2})\alpha_3+(2n-4)^2c^2\alpha_2=0,\ldots$$

relations d'où l'on déduit pour les valeurs des n coefficients α_1, α_2, $\alpha_3,\ldots\ \alpha_n$:

$$\alpha_1=-\frac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\alpha_0,$$

$$\alpha_2=+\frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})}c^4\alpha_0,$$

$$\alpha_3=-\frac{(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})(A'_{n+1}-A'_{n-2})}c^6\alpha_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_n=(-1)^n\frac{(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\ldots4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})(A'_{n+1}-A'_{n-2})\ldots(A'_{n+1}-A'_1)}c^{2n}\alpha_0,$$

et l'on pourra supposer $\alpha_0=1$.

§ XI.

Ainsi, dans le cas actuel, chaque terme de la série (13) est le produit des deux fonctions E et E_1, données pour chaque valeur du nombre pair $2n$, par les séries limitées qui suivent :

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned}
E&=\Big[\rho^{2n}-\frac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\rho^{2n-2}+\frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})}c^4\rho^{2n-4}-\ldots\\
&\quad(-1)^n\frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_1)}c^{2n}\Big]\sqrt{\rho^2-c^2},\\
E_1&=\Big[\rho_1^{2n}-\frac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\rho_1^{2n-2}+\frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})}c^4\rho_1^{2n-4}-\ldots\\
&\quad(-1)^n\frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_1)}c^{2n}\Big]\sqrt{c^2-\rho_1^2};
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles le symbole A'_j désigne le produit $2j(2j-1)$, et qui vérifient respectivement les deux équations différentielles

$$\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}-(2n+2)(2n+1)\rho^2E=0,\quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2}+(2n+2)(2n+1)\rho_1^2E_1=0.$$

On peut remarquer de suite que la fonction E_1 (29) s'évanouit à la limite c de ρ_1, et que $\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}$, ou $\left[\frac{dQ_1}{d\varepsilon_1}\rho_1(c^2-\rho_1^2)-Q\rho_1^2\right]$, est nul pour $\rho_1=0$. D'où il suit que E_1 et E'_1 désignant deux polynomes E_1 différents, donnés par la même formule (29), l'expression.... $\left(E_1\frac{dE'_1}{d\varepsilon_1}-E'_1\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}\right)$, est nulle pour les deux limites de ρ_1. Ce théorème permet d'appliquer au cas actuel les raisonnements du § VII. On démontre ainsi que l'équation (19) a lieu lorsque E_1 et E'_1 sont donnés par les formules (29). Les séries (20) comprennent donc aussi la nouvelle solution, en choisissant les valeurs de E et E_1, non plus dans les formules (17), mais dans celles (29).

Les séries (23) et (24), aux paramètres ε et ε_1, restent aussi les mêmes; mais les formules qui déterminent les fonctions E et E_1 de ces séries, diffèrent de celles (25) : on déduit des équations (22)

$$(30)\qquad \sqrt{\rho^2-c^2}=c\,\frac{\sin c\varepsilon}{\cos c\varepsilon},\quad \sqrt{c^2-\rho_1^2}=c\,\frac{e^{c\varepsilon_1}-e^{-c\varepsilon_1}}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}};$$

et les quatre valeurs (22) et (30) transforment ainsi en ε et ε_1, les fonctions E et E_1 (29) (en supprimant le facteur commun constant c^{2n+1}, comme inutile) :

$$(31)\ \left\{\begin{aligned}
E&=\Bigg[\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n}-\frac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n-2}+\frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})}\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n-4}-\ldots\\
&\qquad (-1)^n\frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)\ldots(A'_{n+1}-A'_1)}\Bigg]\frac{\sin c\varepsilon}{\cos c\varepsilon},\\
E_1&=\Bigg[\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n}-\frac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n-2}+\frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_1)}\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n-4}\\
&\qquad (-1)^n\frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)\ldots(A'_{n+1}-A'_{n-1})}\Bigg]\frac{e^{c\varepsilon_1}-e^{c\varepsilon_1}}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}.
\end{aligned}\right.$$

Ces fonctions, qu'il faut introduire dans les séries (23) et (24), pour le cas actuel, vérifient respectivement les deux équations différentielles

$$\frac{d^2 E}{ds^2} - \frac{(2n+1)(2n+2)c^2}{(\cos c\varepsilon)^2} E = 0, \quad \frac{d^2 E_1}{d\varepsilon_1^2} + \frac{(2n+1)(2n+2)4c^2}{(e^{c\varepsilon_1} + e^{-c\varepsilon_1})^2} E_1 = 0.$$

Les séries (23) et (24) et les formules (31) peuvent toujours être simplifiées en remplaçant $c\varepsilon$ et $c\varepsilon_1$ par de nouvelles variables.

§ XII.

Si l'on pose $c\varepsilon_1 = x$, $f(\varepsilon_1) = F(x)$, il résultera de la série (23), et des dernières formules du § XI, un théorème d'analyse dont voici l'énoncé : n étant un nombre entier; A'_j désignant généralement le produit $2j(2j-1)$, $\mathcal{E}_n(x)$ étant la série suivante, de $(n+1)$ termes,

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)\left[\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{A'_{n+1} - A'_n}\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1} - A'_n)(A'_{n+1} - A'_{n-1})}\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right) - \dots \right.$$
$$\left. (-1)^n \frac{(2n)^2(2n-2)^2 \dots 4^2 . 2^2}{(A'_{n+1} - A'_n) \dots (A'_{n+1} - A'_{n-1})}\right] = \mathcal{E}_n(x)$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_n(x)}{dx^2} + \frac{4A_{n+1}}{(e^x + e^{-x})^2} \mathcal{E}_n(x) = 0;$$

enfin $F(x)$ étant une fonction telle que $F(-x) = -F(x)$: on a identiquement

$$(32) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int_0^\infty \frac{F(\alpha)\mathcal{E}_n(\alpha)\,d\alpha}{(e^\alpha + e^{-\alpha})^2}}{\int_0^\infty \frac{[\mathcal{E}_n(\alpha)]^2\,d\alpha}{(e^\alpha + e^{-\alpha})^2}} \mathcal{E}_n(x).$$

La formule (32) donne ainsi le développement d'une fonction impaire en série d'exponentielles réelles; elle est analogue à celle (27) du § IX, qui suppose la fonction paire.

Les deux cas simples traités dans les §§ V, VI, ... X, XI, avaient pour but de conduire aux formules nouvelles (27) et (32), en éloignant la variable θ, à laquelle correspond un genre de développement connu depuis long-temps, et qui eût compliqué les calculs, sans rien ajouter à la rigueur de la démonstration. Mais pour trouver la solution du problème général qui fait l'objet de ce Mémoire, et dont l'énoncé se trouve à la fin du § I, il faut reprendre la question au point où la laissait le § IV, et conserver toute sa généralité à la loi donnée des températures de l'ellipsoïde.

§ XIII.

Les deux paragraphes V et VI donnent la forme essentielle de la série P_0 qui correspond à $i = 0$, dans le premier groupe du développement (8); des calculs analogues conduisent à la détermination de la série P_i qui multiplie $\cos 2i\theta$ dans le même groupe, lorsque le nombre entier i n'est pas zéro. Cette série P_i est de la forme $\sum \mathrm{MEE}_1$, comme on l'a vu au § IV; E et E_1 doivent être essentiellement des polynomes en ρ^2 et ρ_1^2, du même degré et ayant les mêmes coefficients; ces fonctions doivent être déterminées par la condition que chaque produit $EE_1 \cos 2i\theta$ vérifie séparément l'équation aux différences partielles (7), afin que les coefficients M, restant arbitraires, puissent être employés à l'introduction des températures données de la surface.

Si dans l'équation (7) on pose $V = EE_1 \cos 2i\theta$, il vient, en supprimant le facteur $\cos 2i\theta$,

$$(33) \qquad \rho_1^2 E_1 \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} + \rho^2 E \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = 4i^2c^2(\rho^2 - \rho_1^2) EE_1;$$

d'où il est facile de conclure qu'on doit avoir séparément

$$\frac{d^2E}{d\varepsilon^2} = (A\rho^2 - 4i^2c^2)E, \quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = (4i^2c^2 - A\rho_1^2)E_1;$$

A étant un coefficient constant, le même dans les deux équations. Ou bien, remplaçant les transcendantes ε et ε_1 par leurs valeurs (6), il faut que E et E_1, fonctions de ρ^2 et ρ_1^2, vérifient les deux équations différentielles

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2E}{d\rho^2}(\rho^4 - c^2\rho^2) + \dfrac{dE}{d\rho}(2\rho^3 - c^2\rho) = (A\rho^2 - (2i)^2c^2)E, \\ \dfrac{d^2E_1}{d\rho_1^2}(\rho_1^4 - c^2\rho_1^2) + \dfrac{dE_1}{d\rho_1}(2\rho_1^3 - c^2\rho_1) = (A\rho_1^2 - (2i)^2c^2)E_1, \end{cases}$$

que l'on déduit des précédentes par le calcul qui transformait plus haut les équations (15) en celles (16). La symétrie des formules (34) indique que si l'on trouve un polynome E en ρ^2, et une valeur de A, qui vérifient la première, il suffira de changer ρ^2 en ρ_1^2 dans E, pour obtenir le polynome conjugué E_1 qui pour la même valeur de A doit vérifier la seconde.

D'après la forme assignée à E par les considérations des paragraphes III et IV, $\dfrac{dE}{d\rho}$ est nécessairement divsible par ρ; le premier membre de l'équation (34) en E, sera donc divisible par ρ^2, et comme dans le second membre i n'est pas nul, il s'ensuit que E doit être divisible par une certaine puissance ρ^{2k} de ρ. D'après cela, soit pris pour E le polynome incomplet

$$E = \alpha\rho^{2n} + \beta\rho^{2n-2} + \ldots + \lambda\rho^{2k-2} + \mu\rho^{2k};$$

sa substitution dans la première des équations (34) donnera, en ordonnant le premier membre,

$$\begin{aligned} &2n(2n+1)\alpha\rho^{2n+2} + [(2n-2)(2n-1)\beta - (2n)^2c^2\alpha]\rho^{2n} + [(2n-4)(2n-3)\gamma - (2n-2)^2c^2\beta]\rho^{2n-2} + \ldots \\ &\quad \ldots + [2k(2k+1)\mu - (2k+2)^2c^2\lambda]\rho^{2k+2} - (2k)^2c^2\mu\rho^{2k} \\ &= A\alpha\rho^{2n+2} + [A\beta - (2i)^2c^2\alpha]\rho^{2n} + [A\gamma - (2i)^2c^2\beta]\rho^{2n-2} + \ldots + [A\mu - (2i)^2c^2\lambda]\rho^{2k+2} - (2i)^2c^2\mu\rho^{2k}; \end{aligned}$$

et l'identification de ces polynomes exigera que l'on ait : par les premiers termes $A = 2n(2n+1)$, et par les derniers $k = i$; puis, en reprenant la notation $A_j = 2j(2j+1)$, les coefficients seront déterminés par les relations

$$(A_n - A_{n-1})\beta + [(2n)^2 - (2i)^2]c^2\alpha = 0,\quad (A_n - A_{n-2})\gamma + [(2n-2)^2 - (2i)^2]c^2\beta = 0, \ldots$$

qui conduisent aux valeurs suivantes :

$$\beta = - \frac{(2n)^2 - (2i)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2 \alpha ,$$

$$\gamma = + \frac{[(2n)^2 - (2i)^2][(2n-2)^2 - (2i)^2]}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})} c^4 \alpha ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu = (-1)^{n-i} \frac{[(2n)^2 - (2i)^2][(2n-2)^2 - (2i)^2] \ldots [(2i+2)^2 - (2i)^2]}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2}) \ldots (A_n - A_i)} c^{2n-2i} \alpha ,$$

dans lesquelles on pourra supposer $\alpha = 1$.

Ainsi chaque terme de P_i contiendra le produit des deux fonctions suivantes :

$$(35) \begin{cases} E = \varrho^{2n} - \dfrac{(2n)^2 - (2i)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2 \varrho^{2n-2} + \dfrac{[(2n)^2 - (2i)^2][(2n-2)^2 - (2i)^2]}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})} c^4 \varrho^{2n-4} - \ldots \\ \qquad (-1)^{n-i} \dfrac{[(2n)^2 - (2i)^2] \ldots [(2i+2)^2 - (2i)^2]}{(A_n - A_{n-1}) \ldots (A_n - A_i)} c^{2n-2i} \varrho^{2i}, \\ E_1 = \varrho_1{}^{2n} - \dfrac{(2n)^2 - (2i)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2 \varrho_1{}^{2n-2} + \dfrac{[(2n)^2 - (2i)^2][(2n-2)^2 - (2i)^2]}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})} c^4 \varrho_1{}^{2n-4} - \ldots \\ \qquad (-1)^{n-i} \dfrac{[(2n)^2 - (2i)^2] \ldots [(2i+2)^2 - (2i)^2]}{(A_n - A_{n-1}) \ldots (A_n - A_i)} c^{2n-2i} \varrho^{2i} ; \end{cases}$$

et la série P_i s'étendra à toutes les valeurs déduites des formules précédentes, en prenant pour n les nombres entiers plus grands que i.

Il est évident que la série P''', dans le quatrième groupe du développement (10), ne pourra différer que par ses coefficients arbitraires de celle P_i dans le premier; car on retomberait sur les mêmes équations (33) et (34), en introduisant la vérification nécessaire de l'équation (7). On peut donc poser généralement

$$(36) \qquad P_i''' = P_i = \sum_{n=i}^{n=\infty} \mathrm{MEE}_1 ,$$

en prenant pour composer cette série tous les groupes de valeurs des polynomes E et E_1 correspondant à la même valeur de i, et donnés par les formules (35), lesquelles comprennent celles (17) lorsque $i = 0$.

§ XIV.

Les séries P'_i, P''_i, qui correspondent au sinus et au cosinus du même multiple $(2i+1)\theta$, dans le second et le troisième groupe du développement (10), ont aussi la même composition. On a vu, §§ III et IV, que ces séries doivent être de la forme $\sum \mathrm{MEE}_1$, E et E_1 étant des polynomes qui ne contiennent que des puissances impaires de ρ et ρ_1, du même degré, et ayant mêmes coefficients. La vérification nécessaire de l'équation (7) par chaque terme séparé $\mathrm{EE}_1 \sin(2i+1)\theta$, ou $\mathrm{EE}_1 \cos(2i+1)\theta$, exige que les deux fonctions E et E_1, satisfassent aux deux équations,

$$(37)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2E}{d\rho^2}(\rho^4 - c^2\rho^2) + \frac{dE}{d\rho}(2\rho^3 - c^2\rho) = [A\rho^2 - (2i+1)^2c^2]\,E, \\ &\frac{d^2E_1}{d\rho_1^2}(\rho_1^4 - c^2\rho_1^2) + \frac{dE_1}{d\rho_1}(2\rho_1^3 - c^2\rho_1) = [A\rho_1^2 - (2i+1)^2c^2]\,E_1, \end{aligned} \right.$$

lesquelles remplacent ici celles (34), et qu'on obtient par le même calcul. Il suffit encore de chercher le polynome E et la valeur de A qui doivent vérifier la première des équations (37); le polynome E_1 se déduisant de celui E en y changeant ρ en ρ_1.

Soit pris pour E le polynome impair et incomplet......... $\alpha\rho^{2n+1} + \beta\rho^{2n-1} + \ldots + \lambda\rho^{2k+3} + \mu\rho^{2k+1}$; sa substitution dans la première des équations (37) conduit encore à identifier deux polynomes; pour que leurs premiers termes soient les mêmes, il faut que l'on ait $A = (2n+1)(2n+2)$; pour que leurs derniers termes se détruisent, il faut que $k = i$; puis en reprenant la notation $A'_j = 2j(2j-1)$, l'identification des termes intermédiaires donne les relations suivantes :

$$(A'_{n+1} - A'_n)\beta + [(2n+1)^2 - (2i+1)^2]c^2\alpha = 0,\quad (A'_{n+1} - A'_{n-1})\gamma + [(2n-1)^2 - (2i+1)^2]c^2\beta \ldots,$$
$$\ldots (A'_{n+1} - A'_{i+1})\mu + [(2i+3)^2 - (2i+1)^2]c^2\lambda = 0;$$

d'où l'on conclut, pour les coefficients du polynome E, les valeurs

$$\beta = -\frac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\,c^2\alpha,$$

$$\gamma = +\frac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2]\,[(2n-1)^2-(2i+1)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)\,(A'_{n+1}-A'_{n-1})}\,c^4\alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu = (-1)^{n-i}\frac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2][(2n-1)^2-(2i+1)^2]\ldots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)\,(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}\,c^{2n-2i}\alpha,$$

dans lesquelles on peut supposer $\alpha = 1$.

Ainsi les séries P'_i, P''_i, seront encore représentées par la série symbolique (36), avec les mêmes indices au sigma ; mais les fonctions conjuguées E et E_1 de chaque terme, au lieu d'être données par les formules (35), le seront par celles-ci :

$$(38)\left\{\begin{aligned}
E &= \rho^{2n+1} - \frac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\,c^2\rho^{2n-1} + \ldots \\
&\qquad (-1)^{n-i}\frac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2]\ldots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}\,c^{2n-2i}\rho^{2i+1},\\
E_1 &= \rho_1^{2n+1} - \frac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\,c^2\rho_1^{2n-1} + \ldots \\
&\qquad (-1)^{n-i}\frac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2]\ldots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}\,c^{2n-2i}\rho_1^{2i+1},
\end{aligned}\right.$$

en prenant successivement pour n tous les nombres entiers plus grands que i.

§ XV.

Les séries qui multiplient le cosinus et le sinus de $2i\theta$, dans le cinquième et le huitième groupe du développement (10), ont la même composition. D'après les §§ III et IV, ces séries sont nécessairement de la forme $\sum MEE_1$, dans laquelle $E = Q\sqrt{\rho^2-c^2}$, $E_1 = Q_1\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, Q et Q_1 étant des polynomes en ρ^2 et ρ_1^2, du même degré, et ayant mêmes coefficients. Ces polynomes doivent être déterminés par la condition que chaque produit $QQ_1\sqrt{\rho^2-c^2}\,\sqrt{c^2-\rho_1^2}\cos 2i\theta$, ou $QQ_1\sqrt{\rho^2-c^2}\,\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sin 2i\theta$, vérifie l'équation (7); ce qui conduit aux deux équations séparées :

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2Q}{d\varrho^2}(\rho^4 - c^2\rho^2) + \dfrac{dQ}{d\varrho}(3\rho^3 - c^2\rho) = [(A-2)\rho^2 - (2i)^2c^2]Q, \\ \dfrac{d^2Q_1}{d\varrho_1^2}(\rho_1^4 - c^2\rho_1^2) + \dfrac{dQ_1}{d\varrho_1}(3\rho_1^3 - c^2\rho_1) = [(A-2)\rho_1^2 - (2i)^2c^2]Q_1, \end{cases}$$

qu'on obtient en combinant les calculs des §§ XIII et X.

Si l'on substitue à Q, dans la première équation (39), un polynome incomplet du degré n en ρ^2, et que l'on identifie les deux membres, on trouve que A doit être égal à $(2n+2)(2n+1)$; que Q ne doit pas contenir de puissances de ρ^2 inférieures à ρ^{2i}; et l'on obtient en outre un nombre suffisant de relations qui donnent les valeurs des coefficients du polynome Q, par des calculs analogues à ceux du § X.

On démontre ainsi que la valeur de V(10), limitée au cinquième ou au huitième groupe, est de la forme

$$V = \sum_{i=0}^{i=\infty} \begin{pmatrix} \cos 2i\theta \\ \text{ou} \\ \sin 2i\theta \end{pmatrix} \sum_{n=i}^{n=\infty} MEE_1,$$

les fonctions conjuguées E et E_1 étant données par les formules

$$(40)\quad \begin{cases} E = \Bigg[\varrho^{2n} - \dfrac{(2n)^2-(2i)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\varrho^{2n-2} + \ldots \\ \qquad (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n)^2-(2i)^2][(2n-2)^2-(2i)^2]\ldots[(2i+2)^2-(2i)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}c^{2n-2i}\varrho^{2i}\Bigg]\sqrt{\varrho^2-c^2}, \\ E_1 = \Bigg[\varrho_1^{2n} - \dfrac{(2n)^2-(2i)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\varrho_1^{2n-2} + \ldots \\ \qquad (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n)^2-(2i)^2][(2n-2)^2-(2i)^2]\ldots[(2i+2)^2-(2i)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}c^{2n-2i}\varrho_1^{2i}\Bigg]\sqrt{c^2-\varrho_1^2}, \end{cases}$$

lesquelles donnent celles (29) lorsque $i=0$; le symbole A'_j représentant toujours le produit $2j(2j-1)$.

Enfin on démontre, de la même manière, que la fonction V(10), limitée au sixième, ou au septième groupe, est de la forme

$$V = \sum_{i=0}^{i=\infty} \begin{pmatrix} \sin(2i+1)\theta \\ \text{ou} \\ \cos(2i+1)\theta \end{pmatrix} \sum_{n=i}^{n=\infty} MEE_1,$$

le facteurs conjugués E et E_1 étant déduits des formules

$$
(41)\begin{cases}
\mathrm{E} = \Big[\rho^{2n+1} - \dfrac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{A}_n}c^2\rho^{2n-1} + \ldots \\
\qquad (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2][(2n-1)^2-(2i+1)^2]\ldots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{A}_n)(\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{A}_{n-1})\ldots(\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{A}_{i+1})}c^{2n-2i}\rho^{2i+1}\Big]\sqrt{\rho^2-c^2}, \\
\mathrm{E}_1 = \Big[\rho_1^{2n+1} - \dfrac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{A}_n}c^2\rho_1^{2n-1} + ,\ldots \\
\qquad (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2][(2n-1)^2-(2i+1)^2]\ldots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{A}_n)\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{A}_{n-1})\ldots(\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{A}_{i+1})}c^{2n-2i}\rho_1^{2i+1}\Big]\sqrt{c^2-\rho_1^2},
\end{cases}
$$

le symbole A_j représentant toujours le produit $2j(2j+1)$.

§ XVI.

En résumé : si l'on ne désigne par la caractéristique E que les polygones (35) et (38) qui sont totalement rationnels en ρ et ρ_1, en adoptant la nouvelle caractéristique $\mathcal{E}$ pour représenter les fonctions (40) et (41) qui contiennent un facteur radical ; si en outre on convient d'affecter d'un accent, placé en haut, les polynomes (38) et (40), dont les coefficients présentent le symbole $\mathrm{A}'_j = 2j(2j-1)$, et de laisser sans accent les fonctions (35) et (41) qui s'expriment à l'aide du symbole $\mathrm{A}_j = 2j(2j+1)$; la série générale V(10), déterminée par la condition que tous les termes vérifient séparément l'équation aux différences partielles (7), sera

$$
(42)\begin{cases}
\mathrm{V} = \sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\cos 2i\theta\sum\limits_{n=i}^{n=\infty}\mathrm{M E_1 E_2} + \sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\sin(2i+1)\theta\sum\limits_{n=i}^{n=\infty}\mathrm{M' E' E'_1} + \sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\cos(2i+1)\theta\sum\limits_{n=i}^{n=\infty}\mathrm{M'' E' E'_1} + \sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\sin 2i\theta\sum\limits_{n=i}^{n=\infty}\mathrm{M''' E E_1} \\
+\sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\cos 2i\theta\sum\limits_{n=i}^{n=\infty}\mathfrak{M}\mathcal{E}'\mathcal{E}'_1 + \sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\sin(2i+1)\theta\sum\limits_{n=i}^{n=\infty}\mathfrak{M}'\mathcal{E}\mathcal{E}_1 + \sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\cos(2i+1)\theta\sum\limits_{n=i}^{n=\infty}\mathfrak{M}''\mathcal{E}\mathcal{E}_1 + \sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\sin 2i\theta\sum\limits_{n=i}^{n=\infty}\mathfrak{M}'''\mathcal{E}'\mathcal{E}'_1
\end{cases}
$$

Et cette série (42) aura la forme, essentielle et suffisante, qui convient à la loi des températures permanentes de l'ellipsoïde de révolution aplati, quand sa surface est en contact avec des sources de chaleur et de froid, de quelque manière que ces sources soient distribuées.

Il suit de la composition même des polynomes E_1, E'_1, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_1$, que la fonction V (42) ne contient plus que le paramètre ρ quand $\rho_1 = 0$;

c'est-à-dire que les deux variables θ et ρ_1 disparaissent à la fois. Ce résultat pouvait être prévu : car l'équation $\rho_1 = 0$ appartient à l'axe polaire, et sur cet axe, intersection commune de tous les plans méridiens, la température doit être nécessairement indépendante de θ, et ne peut varier qu'avec le paramètre de l'ellipsoïde.

Pour compléter la solution générale du problème que nous nous sommes proposé, il faut trouver une méthode qui puisse servir à déterminer les coefficients M, M', ... $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$, de la série (42), à l'aide de la loi des températures connues de la surface. Nous supposerons, comme au § III, que la fonction de ρ_1 et θ qui exprime cette loi, ait été partagée en huit fonctions partielles, jouissant respectivement des conditions de symétrie qui particularisent les huit groupes du développement (10), ou de la série complète (42). Il suffit alors de considérer un seul de ces groupes, et de déterminer ses coefficients à l'aide de la fonction partielle qui lui correspond; on reconnaîtra facilement que la même méthode serait applicable à tout autre groupe.

§ XVII.

L'état partiel que nous choisissons, pour le traiter seul complétement, est celui défini par la première des doubles séries qui composent la valeur générale de V (42), laquelle se réduit alors à

$$(43) \qquad V = \sum_{i=0}^{i=\infty} \cos 2i\theta . \sum_{n=i}^{n=\infty} \mathrm{MEE}_1.$$

E et E_1 sont les polynomes en ρ^2 et ρ_1^2 déduits des formules (35), lesquels vérifient les équations différentielles

$$\frac{d^2 E}{d\epsilon^2} = [2n(2n+1)\rho^2 - 4i^2c^2]E, \quad \frac{d^2 E_1}{d\epsilon_1^2} = [4i^2c^2 - 2n(2n+1)\rho_1^2]E_1,$$

ou celles (34) en y posant $A = 2n(2n+1)$. Comme les polynomes des formules (38), (40) et (41) sont maintenant étrangers, il faut oublier la notation du § XVI, et les accents pourront être employés pour distinguer les unes des autres les diverses fonctions E et E_1 (35), les seules que nous devions considérer.

La série (43) prise pour exprimer la température permanente dans l'ellipsoïde, suppose que les sources calorifiques sont distribuées symétriquement, au-dessus et en-dessous de l'équateur, à droite et à gauche du méridien de départ, et en outre de part et d'autre de l'axe polaire sur un méridien quelconque. Si l'on désigne par $\psi(\rho_1, \theta)$ la fonction partielle qui exprime dans ces circonstances les températures connues de la surface, cette fonction pourra avoir des valeurs quelconques de $\rho_1 = 0$ à $\rho_1 = c$, et de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$; mais ces valeurs devront se reproduire dans le même ordre de $\theta = 0$ à $\theta = -\frac{2}{\pi}$, de $\frac{\pi}{2}$ à π, de $-\pi$ à $-\frac{\pi}{2}$, d'après les conditions de symétrie exigées par la série (43).

Si, $E(\rho_0)$ étant la constante à laquelle se réduit E quand $\rho = \rho_0$, on pose $ME(\rho_0) = N$, puisque $V(43)$ doit se réduire à $\psi(\rho_1, \theta)$ pour $\rho = \rho_0$, il faut que l'on ait

$$(44) \qquad \sum_{i=0}^{i=\infty} \cos 2i\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} N_i E_1 = \psi(\rho_1, \theta);$$

et il s'agit de déterminer le coefficient général N_i, de telle manière que la série (44) soit un des développements possibles de la fonction ψ.

Si l'on multiplie l'équation (44) par $d\theta$, et qu'on intègre les deux membres de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$, comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$ et que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2i\theta d\theta = 0$, pour toute valeur du nombre entier i autre que zéro, on aura simplement

$$(45) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} N_0 E_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\rho_1, \theta)\, d\theta,$$

E_1 ayant ici toutes les valeurs (35) pour lesquelles $i = 0$, ou toutes celles données par la seconde des formules (17). Le coefficient général N_0 de la série (45) se déterminera donc par la méthode développée au § VII, qui donnera

$$(46)\qquad N_0 = \frac{2}{\pi}\frac{\displaystyle\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(\varrho_1,\theta)\,d\theta}{\displaystyle\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}}.$$

Pour déterminer le coefficient N_i du sigma qui multiplie $\cos 2i\theta$, dans l'équation (44), il faut d'abord isoler cette série partielle, comme il vient d'être fait pour le sigma dont le coefficient est N_0 (45). On remplit ce but, en multipliant l'équation (44) par $\cos 2i\theta d\theta$, et en intégrant les deux membres depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$; car on a,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2i\theta d\theta = 0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2i'\theta \cos 2i\theta d\theta = 0$ quand i' diffère de i, et enfin $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2i\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$; on obtient donc simplement

$$(47)\qquad \sum N_i E_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\rho_1, \theta)\cos 2i\theta d\theta,$$

E_1 ayant ici toutes les valeurs (35) qui correspondent à la même valeur de i.

§ XVIII.

Soient maintenant désignés par E_1 et E_1' deux polynomes (35) correspondant à la même valeur de i, et à deux nombres n et n', ou à deux valeurs différentes $A = 2n(2n+1)$ et $A' = 2n'(2n'+1)$. Ces deux polynomes vérifieront les deux équations

$$\frac{d^2E_1}{dt^2} = (4i^2c^2 - A\rho_1^2)E_1, \quad \frac{d^2E_1'}{dt_1^2} = (4i^2c^2 - A'\rho_1^2)E_1',$$

qui donnent par une combinaison facile

$$E_1\frac{d^2E_1'}{dt_1^2} - E_1'\frac{d^2E_1}{dt_1^2} = (A - A')\rho_1^2E_1E_1' ;$$

si l'on multiplie cette dernière équation par $dt_1 = \frac{d\varrho_1}{\varrho_1\sqrt{c^2-\varrho^2}}$, et qu'on intègre ensuite entre les limites, zéro et c, de ρ_1, le premier membre disparaîtra, car son intégrale indéfinie $\left(E_1 \frac{dE'_1}{d\varepsilon_1} - E'_1 \frac{dE_1}{d\varepsilon_1}\right)$, ou $\left(E_1 \frac{dE'_1}{d\varrho_1} - E'_1 \frac{dE_1}{d\varrho_1}\right) \rho_1 \sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, est nulle pour $\rho_1 = 0$ et $\rho_1 = c$; on aura donc

$$0 = (A - A') \int_0^c \frac{\varrho_1 E_1 E'_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}.$$

D'où il suit que, excepté lorsque $A' = A$, on a nécessairement

$$\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1 E'_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}} = 0;$$

c'est-à-dire que la relation (19) s'étend au cas où E_1 et E'_1 représentent deux polynomes (35) correspondant à la même valeur de i, mais à des valeurs différentes de n.

Le théorème qui vient d'être démontré conduit, comme au § VII, à la valeur du coefficient N_i de la série (47); cette valeur est

$$N_i = \frac{4}{\pi} \frac{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\varrho_1, \theta) \cos 2i\theta d\theta}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}}. \tag{48}$$

Les coefficients N_0 (46) et N_i (48) étant substitués dans la série (44), donneront le développement cherché de la fonction ψ.

Enfin, remplaçant dans l'équation (43) le coefficient M par $\frac{N}{E(\varrho_0)}$, la valeur de V qui satisfait à toutes les conditions posées, est définitivement

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} V = {} & \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int_0^c \left[\frac{\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\varrho_1, \theta) d\theta \right]}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}} \frac{E}{E(\varrho_0)} E_1 \\ & + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos 2i\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} \frac{\int_0^c \left[\frac{\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\varrho_1, \theta) \cos 2i\theta d\theta \right]}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}} \frac{E}{E(\varrho_0)} E_1; \end{aligned} \right.$$

E et E_1 étant donnés par les formules (17) sous le premier sigma, et par celles (35) pour la série qui multiplie $\cos 2i\theta$.

Il est aisé de voir que la détermination des coefficients pour les sept groupes de la valeur générale (42), autres que celui qui vient d'être traité, se ferait absolument de la même manière. Les développements des huit fonctions partielles, et les séries (49) qui donnent la température dans l'ellipsoïde de révolution aplati, peuvent être transformés en ε et ε_1, à l'aide des relations (6), (22) et (30). Mais il n'y aurait intérêt à présenter ici tous les détails de la solution trouvée, que s'ils étaient accompagnés de développements analytiques, qui permissent de calculer numériquement les températures; et ces développements seraient trop étendus pour trouver place dans ce second Mémoire.

§ XIX.

La solution générale qui vient d'être exposée, concerne seulement l'ellipsoïde aplati, ou celui dans lequel le diamètre de l'équateur surpasse l'axe polaire. Supposons maintenant que l'ellipsoïde soit au contraire allongé, c'est-à-dire formé par la révolution d'une ellipse autour de son grand axe. Il semblerait que ce nouveau cas, très différent du premier, dût nécessiter de nouvelles recherches, aussi étendues que celles qui précèdent; mais fort heureusement il n'en est pas ainsi, car, comme on va le voir, toutes les formules démontrées plus haut, sont applicables au nouvel ellipsoïde avec de légers changements. Et cet accord inattendu est par lui-même un résultat remarquable.

L'ellipsoïde actuel est compris parmi les surfaces au paramètre ρ représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2 + z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \tag{50}$$

lesquelles sont toutes des ellipsoïdes de révolution autour du grand axe, ayant les deux mêmes foyers, et composant un système de surfaces isothermes. Ces ellipsoïdes sont conjugués à deux autres systèmes de surfaces, pareillement isothermes, qui les coupent à angle droit, et qui sont représentés par les équations

$$(51) \qquad \theta = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{z}\right), \quad \frac{x^2}{\rho_2^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2 - \rho_2^2} = 1;$$

le premier système se compose des plans méridiens, le second des hyperboloïdes de révolution à deux nappes ayant les deux mêmes foyers géométriques que l'ellipsoïde donné.

Si l'on prend pour coordonnées nouvelles les paramètres ρ, θ, ρ_2, des surfaces (50) et (51), on aura pour formules de transformation

$$(52) \quad cx = \rho\rho_2, \quad cy = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}\sin\theta, \quad cz = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}\cos\theta.$$

Si l'on désigne par h, h_1, h_2, les valeurs de l'expression différentielle $\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}$, pour f successivement égal à ρ, θ, ρ_2, le calcul donne

$$(53) \qquad h = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_2^2}}, \quad h_1 = \frac{c}{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_2^2}}.$$

Enfin le symbole $\Delta_2 f$ ayant la signification indiquée au § I, on a

$$(54) \quad \Delta_2 \rho = \frac{d\log(\rho^2 - c^2)}{d\rho} h^2, \quad \Delta_2\theta = 0, \quad \Delta_2\rho_2 = \frac{d\log(c^2 - \rho_2^2)}{d\rho_2} h_2^2.$$

Les formules (53) et (54) doivent être employées pour transformer en coordonnées ρ, θ et ρ_2, l'équation générale $\Delta_2 V = 0$, qui appartient à l'état permanent des températures V, dans tout corps solide homogène; si l'on introduit, pour simplifier, les transcendantes

$$(55) \qquad \varepsilon = \int \frac{d\rho}{\rho^2 - c^2}, \quad \varepsilon_2 = \int \frac{d\rho_2}{c^2 - \rho_2^2},$$

cette équation transformée peut être écrite ainsi

$$(56) \quad (c^2 - \rho_2^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + (\rho^2 - c^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon_2^2} + (\rho^2 - \rho_2^2)c^2\frac{d^2V}{d\theta^2} = 0;$$

ρ et ρ_2 étant des fonctions de ε et ε_2 que l'on déduit des équations (55), et qui sont

$$(57) \qquad \rho = -c\,\frac{e^{c\varepsilon} + e^{-c\varepsilon}}{e^{c\varepsilon} - e^{-c\varepsilon}}, \quad \rho_2 = c\,\frac{e^{c\varepsilon_2} - e^{-c\varepsilon_2}}{e^{c\varepsilon_2} + e^{-c\varepsilon_2}}.$$

§ XX.

Pour simplifier l'équation aux différences partielles (56), au lieu des fonctions ρ et ρ_1, il est préférable d'introduire celles γ et γ_1, données par les relations suivantes

$$(58)\qquad \gamma = \sqrt{\rho^2 - c^2} = \frac{2c}{e^{c\varepsilon} - e^{-c\varepsilon}},\quad \gamma_1 = \sqrt{c^2 - \rho_1^2} = \frac{2c}{e^{c\varepsilon_1} + e^{-c\varepsilon_1}},$$

d'où l'on déduit $\rho = \sqrt{c^2 + \gamma^2}$, $\rho_1 = \sqrt{c^2 - \gamma_1^2}$, et par suite, d'après les valeurs (55),

$$(59)\qquad \varepsilon = \int \frac{d\gamma}{\gamma\sqrt{\gamma^2 + c^2}},\quad \varepsilon_1 = \int \frac{d\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{c^2 - \gamma_1^2}}.$$

L'équation (56) devient, en employant les fonctions γ et γ_1, au lieu de ρ et ρ_1, et remarquant que $\rho^2 - \rho_1^2 = \gamma^2 + \gamma_1^2$, d'après les relations (58) :

$$(60)\qquad \gamma_1^2 \frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + \gamma^2 \frac{d^2V}{d\varepsilon_1^2} + (\gamma^2 + \gamma_1^2)\, c^2 \frac{d^2V}{d\theta^2} = 0.$$

La solution générale de l'ellipsoïde, à trois axes inégaux, indique que la fonction V, que nous cherchons, devra être composée d'une somme de termes de la forme $EE_1 \cos k\theta$, ou $EE_1 \sin k\theta$, dans laquelle k représente un nombre entier; E et E_1 étant des polynomes rationnels, le premier en γ et $\sqrt{\gamma^2 + c^2}$, le second en γ_1 et $\sqrt{c^2 - \gamma_1^2}$, qui doivent être déterminés par la condition que chaque terme simple vérifie l'équation (60).

Or, si l'on pose dans cette équation (60), $V = EE_1 \cos k\theta$, ou $V = EE_1 \sin k\theta$, la ligne trigonométrique disparaît comme facteur commun, et il vient

$$\gamma_1^2 E_1 \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} + \gamma^2 E \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = (\gamma^2 + \gamma_1^2)\, k^2c^2 EE_1,$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$(61)\qquad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} = (A\gamma^2 + k^2c^2)\, E,\quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = (k^2c^2 - A\gamma_1^2)\, E_1;$$

A étant un coefficient constant, le même dans les deux équations. Si l'on considère E et E_2 comme des fonctions de γ et γ_2, en prenant pour les transcendantes ε et ε_2 leurs valeurs (59), ces équations (61) deviennent

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2E}{d\gamma^2}(\gamma^4 + c^2\gamma^2) + \frac{dE}{d\gamma}(2\gamma^3 + c^2\gamma) = (A\gamma^2 + k^2c^2)\,E, \\ &\frac{d^2E_2}{d\gamma_2^2}(\gamma_2^4 - c^2\gamma_2^2) + \frac{dE_2}{d\gamma_2}(2\gamma_2^3 - c^2\gamma_2) = (A\gamma_2^2 - k^2c^2)\,E_2. \end{aligned} \right.$$

Quand on compare ces équations (62) à celles (34) ou (37), on reconnaît de suite que les valeurs de E_2 ne différeront de celles qui donnaient E, dans le cas précédent, qu'en ce que γ_2 doit y être substitué à ρ_1, et que les valeurs de E se déduiront de celles de l'ancien cas en y changeant c^2 en $-c^2$, et ρ en γ.

Il est donc inutile de pousser plus loin la solution de l'équilibre des températures dans l'ellipsoïde de révolution allongé, puisqu'elle conduirait à des formules analogues à celle de l'ellipsoïde aplati, et qui se déduiraient facilement de ces dernières par quelques changements de signe.