JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BINET

Réflexions sur le problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 79-90.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__79_0>

Réflexions sur le Problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales ;

PAR M. J. BINET,

Professeur au Collége de France, ancien Professeur à l'École Polytechnique, etc.

Cette question a été résolue par Euler, mais il n'a pas donné la démonstration de sa formule. On la trouve citée dans l'analyse sommaire d'un Mémoire de Segner, sur le même sujet, imprimé dans la collection de Saint-Pétersbourg, 1758 — 1759 : nous apprenons de Segner qu'Euler lui avait indiqué ce problème et qu'il lui avait en même temps communiqué les nombres de décompositions triangulaires des polygones de 4, 5, 6, 7, 8, 9 côtés : ces nombres sont 2, 5, 14, 42, 132, 429. Segner trouva une méthode pour passer successivement des polygones de moins de n côtés au polygone de n côtés, par une espèce d'échelle de dérivation que nous rapporterons ci-dessous. Il en déduisit une table étendue jusqu'aux polygones de 20 côtés : En comparant cette table à la sienne, Euler reconnut qu'à partir du polygone de 15 côtés, elle était défectueuse. C'est alors qu'il donna sa formule, et la table qu'il en avait déduite portée jusqu'aux polygones de 25 côtés. La formule résulte d'une équation à différences finies du premier ordre, beaucoup plus simple que l'échelle de dérivation de Segner. Ainsi la solution d'un même problème a conduit à deux formules analytiques distinctes : par quelle voie algébrique peut-on passer de l'une à l'autre? Nous avons appris de M. Terquem, dont le talent et l'érudition sont connus des géomètres, que ce problème d'analyse a vainement exercé des hommes habiles. Dans ces derniers temps, M. Lamé a démontré la solution d'Euler (3e vol. de ce *Journal de Mathématiques*, page 505): en partant de l'équation de Segner, il se sert ingénieusement dans ce but d'une considération géométrique. Je suis informé par M. Liouville que M. Rodrigues vient de prouver plus directement encore la formule d'Euler par une considération synthétique du même genre. Mais la question analytique que je viens d'énoncer subsiste entière, et je vais la traiter. J'y joindrai quelques conséquences naturellement liées à ce sujet. On a eu quelquefois à remarquer que les choses les plus épineuses ne prenaient cette apparence que du point de vue d'où elles étaient considérées : la question dont il s'agit en présentera un nouvel exemple.

[1]. Pour plus de clarté, je crois utile de rappeler le principe très simple de la solution de Segner. Il s'agit dans ce problème de faire l'énumération des manières distinctes dont on peut opérer la décomposition d'une figure rectiligne en triangles, par ses diagonales. On désignera par h l'ordre du polygone, h étant 1 pour le triangle, 2 pour le quadrilatère, etc.; et $h+2$ sera le nombre des sommets ou des côtés du polygone. On dénotera par $T(h)$ le nombre des triangulations contiguës qui conviennent à la figure de l'ordre h, en sorte que $T(1)$ qui se rapporte au triangle égale 1; $T(2)$ relatif au quadrilatère partagé en triangles par ses diagonales, $T(2)=2$; $T(3)=5$, etc. Parmi les sommets de la figure, prenez-en deux qui répondent à un côté LM et joignez-les par des diagonales à un autre angle O ; si cet angle appartient à un côté consécutif à LM, le triangle emploiera deux côtés du polygone et seulement une diagonale : alors la figure sera partagée en un triangle LOM et en un polygone dont l'ordre sera $h-1$. Le nombre des triangulations contiguës de la figure de l'ordre $h-1$ sera $T(h-1)$; chacune d'elles étant jointe au triangle donnera une triangulation de la figure proposée : ainsi $T(h-1)$ sera une partie du nombre cherché $T(h)$. Si le triangle LOM laisse à gauche de LO un seul sommet du polygone, ce sommet O′ et LO formeront un triangle ; à droite du côté OM il restera $h-1-1$ sommets, qui avec le côté OM composeront une figure de l'ordre $h-2$; le nombre de ses décompositions sera $T(h-2)$, et chacune d'elles jointe au triangle LOM et à la figure triangulaire O′OL, fournira une décomposition du polygone donné; on aura de cette manière $T(h-2)\times T(1)$

décompositions nouvelles faisant aussi partie de $T(h)$; lorsque le sommet O sera pris de telle sorte qu'il laisse à gauche de OL deux sommets O′O″, il en restera $h-3$ à droite de OM; alors le polygone sera partagé en une figure du second ordre (quadrilatère), le triangle LOM, en une figure de l'ordre $h-3$; $T(2)$ sera le nombre des décompositions de la figure du second ordre et $T(h-3)$ le nombre de l'autre polygone partiel; le nombre des décompositions de la figure proposée répondant à ce mode de partage sera $T(2)\times T(h-3)$, et sera aussi une des parties du nombre $T(h)$; en continuant ainsi, on voit que

$$(1)\ \begin{cases} T(h)=T(h-1)+T(1)\,T(h-2)+T(2)\,T(h-2)+\text{etc.} \\ \quad \ldots+T(h-2).T(1)+T(h-1). \end{cases}$$

Telle est la solution du problème trouvée par Ségner, à la notation près : il emploie des lettres a, b, c... pour représenter ce que nous dénotons par $T(1)$, $T(2)$, etc. Si dans cette formule on pose successivement $h=2$, $=3$, $=4$, etc., on aura

$$(1')\ \begin{cases} T(2)=T(1)+T(1)=1+1=2, \\ T(3)=\ T(2)+T(1)T(1)+T(2)=2+1+2=5, \\ T(4)=\ T(3)+T(1)\,T(2)+T(2).\,T(1)+T(3)=2(5+2)=14, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Quant à la formule d'Euler, elle s'exprime dans notre notation par l'équation

$$(2)\qquad T(h)=\frac{2.4.6\ldots(4h-3)}{1.2.3\ldots.h.(h+1)};$$

il l'a déduite de l'équation aux différences finies

$$(3)\qquad T(h+1)=\frac{(4h+2)}{h+2}\,T(h),$$

sous la condition de $T(1)=1$. C'est à cette équation que la nouvelle démonstration de M. Rodrigues conduit directement.

[11]. La question analytique à traiter est de faire voir comment l'une de ces formules peut être une conséquence de l'autre, quand

on considère h comme un nombre entier, ce que suppose nécessairement la formule de Ségner.

$T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, etc., étant les quantités que nous avons définies précédemment, c'est-à-dire liées par la formule de Ségner, nous formerons une fonction

$$(4)\quad Z = 1 + zT(1) + z^2 T(2) + z^3 T(3) + \ldots + z^h T(h) + \text{etc.}$$

Cette formule sera composée d'un nombre infini de termes où $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, etc., entrent en coefficients : les géomètres désignent les fonctions de cette espèce par le nom de *fonction génératrice des coefficients* $T(1)$, $T(2)\ldots T(h)\ldots$. Les fonctions génératrices sont d'un grand usage dans l'analyse depuis Moivre et Euler ; mais c'est à Laplace que l'on doit les considérations les plus étendues et les méthodes les plus générales que l'on en ait tirées pour la transformation des suites et pour d'autres sujets difficiles à traiter autrement. (Voyez sa *Théorie des Probabilités* et ses Mémoires dans le *Recueil de l'Académie des Sciences*, et dans le XV[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*). Dans la fonction Z la quantité z est une arbitraire que l'on suppose assez petite pour que la série soit convergente.

Élevant au carré l'équation (4), on a

$$\begin{aligned} Z^2 = 1 &+ z[T(1) + T(1)] + z^2[T(2) + T(1)T(1) + T(2)] + \ldots \\ &+ z^{h-1}[T(h-1) + T(1)T(h-2) + \text{etc.} + T(h-2)T(1) + T(h-1)] \\ &+ \text{etc.}; \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{Z}{z} = \frac{1}{z} + T(1) + zT(2) + z^2 T(3) + \ldots + z^{h-1} T(h) + \text{etc.};$$

si l'on soustrait cette dernière formule de la valeur de Z^2, et que l'on ait égard à l'équation (1), ainsi qu'aux équations (1′) qui en ont été déduites, on verra que dans le second membre tous les termes, à l'exception d'un seul, disparaissent ; on aura donc

$$(5)\qquad Z^2 - \frac{1}{z} Z = -\frac{1}{z};$$

équation du second degré qui fait connaître la nature algébrique de la fonction génératrice Z. On aura en effet, par la résolution de l'équation (5),

$$Z = \frac{1}{2z} - \sqrt{\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{z}},$$

ou bien

$$(6) \qquad Z = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4z}\right):$$

on a employé le signe négatif du radical, parce que l'autre racine de l'équation ne donne pas $Z = 1$ quand $z = 0$, condition que remplit la fonction génératrice : cette autre racine admettrait des puissances négatives dans la valeur de Z développée, forme que ne comporte pas la fonction définie par l'équation (4).

Actuellement, que l'on développe en série par la formule de Newton, le radical $\sqrt{1-4z}$, on aura

$$\sqrt{1-4z} = 1 - \frac{1}{2}4z - \frac{1.1}{2.4}(4z)^2 - \frac{1.3}{2.4.6}(4z)^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}(4z)^4 - \text{etc}$$

Retranchant cette suite de l'unité et divisant par $2z$, on aura formé le développement de la valeur de Z, savoir,

$$Z = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}.4 + \frac{1}{2.4}4^2.z + \frac{1.3}{2.4.6}.4^3.z^2 \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2h-1).4^{h+1}}{2.4\ldots 2h.(2h+2)}z^h + \text{etc.}\right]$$

D'après la formation (4) de la fonction génératrice, $T(h)$ est le coefficient de z^h dans ce développement, il en résulte

$$T(h) = \frac{1.3.5\ldots(2h-1)}{2.4.6\ldots 2h.(2h+2)}.2^{2h+1}.$$

Dans cette fraction, on peut enlever $h+1$ facteurs égaux à 2 au dénominateur, et effacer la puissance 2^{h+1} au numérateur, alors on aura plus simplement

$$(2) \qquad T(h) = \frac{1.3.5\ldots(2h-1).2^h}{1.2.3\ldots h.(h+1)}.$$

Si l'on met ici $h+1$ à la place de h et que l'on prenne le rapport de $T(h+1)$ à $T(h)$, on aura

$$(3) \qquad T(h+1) = 2\,\frac{(2h+1)}{h+2}\,.\,T(h).$$

Ces deux formules sont celles qui répondent à la solution d'Euler (2), (3). Cette solution se trouve ainsi algébriquement déduite de la formule de Ségner.

[III]. *Réciproquement.* Si par un moyen quelconque, celui de M. Rodrigues, par exemple, on a établi l'équation (2) comme donnant la valeur du nombre $T(h)$, on peut remonter à la formule de Ségner (1), comme conséquence de celle d'Euler. Il suffira pour cela de former la fonction génératrice Z d'après cette loi

$$\begin{aligned} Z &= 1 + zT(1) + z^2.T(2) + z^3T(3) + z^4.T(4)\ldots + z^{h-1}.T(h-1) + \text{etc.}\\ &= 1 + z.2^3\frac{1}{2.4} + z^2.2^5\frac{1.3}{2.4.6} + z^3.2^7.\frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \text{etc.} + z^{h-1}2^{2h-1}.\frac{1.3\ldots(2h-3)}{2.4.6\ldots 2h}, \end{aligned}$$

et on y reconnaît facilement le développement de la fonction algébrique $\frac{1}{2z}(1-\sqrt{1-4z})$; ainsi l'on aura $Z = \frac{1}{2z}(1-\sqrt{1-4z})$; d'où l'on tire $(2Z.z-1)^2 = 1-4z$; ou bien, en divisant par $4z$,

$$Z^2 = \frac{1}{z}.(Z-1).$$

Avec la valeur de $Z = 1 + zT(1) + z^2T(2) + \text{etc.}$ on formera le carré Z^2; on y prendra la somme des termes affectés de la puissance z^{h-1} : cette somme sera

$$T(h-1) + T(1)\,T(h-2) + T(2)\,T(h-3) + \text{etc.} + T(h-1),$$

et en vertu de l'équation précédente, on l'égalera à $T(h)$, coefficient de z^{h-1} dans l'expression de $\frac{1}{z}(Z-1)$. On formera de cette manière l'équation (1)

$$T(h) = T(h-1) + T(1)T(h-2) + T(2)\,T(h-3) + \text{etc.} + T(h-1),$$

comme conséquence de la valeur $T(h) = \frac{1.3.5\ldots(2h-1).2^{2h+1}}{2.4.6\ldots 2h.(2h+2)}$ donnée par Euler.

[IV]. Les nombres entiers $T(1) = 1$, $T(2) = 2$, $T(3) = 5$, $T(4) = 14$, etc., s'étaient déjà présentés à ce grand géomètre avant qu'il y rattachât la question géométrique de la triangulation des polygones : dans le chapitre *du calcul différentiel* où il traite de la transformation des suites, on rencontre (p. 297) précisément la série des entiers $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, etc.; ils concourent aussi à un mode singulier de résolution de l'équation indéterminée $x^2 = 8z + 1 + 2^m . y$, ainsi qu'on peut le voir dans la Théorie des Nombres de Legendre (2^{me} et 3^{me} édition). Leurs propriétés méritent donc d'attirer l'attention des géomètres. Voici celles que l'on tire immédiatement des méthodes d'Euler pour la transformation des suites.

Nous avons trouvé qu'en posant

$$(4) \qquad Z = 1 + zT(1) + z^2T(2) \ldots + z^hT(h) + \text{etc.},$$

la fonction génératrice $Z = \frac{1}{2z}(1 - \sqrt{1-4z})$: Dans ces formules, nous écrirons $z = y - y^2$; il en résultera

$$\sqrt{1-4z} = \sqrt{1 - 4y + 4y^2} = 1 - 2y,$$

et
$$Z = \frac{1}{2(y-y^2)}(1 - 1 + 2y) = \frac{1}{1-y};$$

ou bien en développant selon les puissances de y,

$$Z = 1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc.}$$

Mais en substituant dans l'équation (4) $z = y(1-y)$, on aura sous une autre forme

$$Z = 1 + y(1-y)T(1) + y^2(1-y)^2T(2) + y^3(1-y)^3T(3) + \text{etc.}$$

Lorsque cette dernière suite aura été ordonnée relativement à y, elle devra devenir identique à $1 + y + y^2 + $ etc.; on aura donc

$$\begin{aligned} T(1) &= 1, \\ T(2) - T(1) &= 1, \\ T(3) - 2T(2) &= 1, \\ T(4) - 3T(3) + T(2) &= 1, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

$$(7)\ \mathrm{T}(h)-(h-1)\mathrm{T}(h-1)+\frac{(h-2)(h-3)}{2}\mathrm{T}(h-2)-\frac{(h-3)(h-4)(h-5)}{2.3}\mathrm{T}(h-3)+\text{etc.}=1.$$

Nous venons de trouver $\mathrm{Z}=\frac{1}{1-y}=\frac{y}{z}$; substituons cette valeur dans l'équation précédente où entre Z exprimée en $\mathrm{T}(1)$, $\mathrm{T}(2)$, etc., et multiplions par $1-y$; il en résulte

$$1=1-y+y(1-y)^2\mathrm{T}(1)+y^2(1-y)^3\mathrm{T}(2)+y^3(1-y)^4\mathrm{T}(3)+\text{etc.}$$

Dans celle-ci comparons encore les termes semblables ou affectés des mêmes puissances de y, on aura cette autre suite d'équations

$$\begin{aligned}
o &= \mathrm{T}(1) - 1,\\
o &= \mathrm{T}(2) - 2\mathrm{T}(1) = o,\\
o &= \mathrm{T}(3) - 3\mathrm{T}(2) + \mathrm{T}(1) = o,\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$(8)\ o=\mathrm{T}(h)-h\mathrm{T}(h-1)+\frac{(h-1)(h-2)}{2}\mathrm{T}(h-2)-\frac{(h-2)(h-3)(h-4)}{2.3}\mathrm{T}(h-3)+\text{etc.}$$

Nous avons appris que par une méthode très différente, M. Catalan a trouvé de son côté une relation analogue à cette dernière équation ; elle ne lui est pas tout-à-fait identique, mais elle s'y ramène sans difficulté. On pourra aisément s'assurer que la formule (8) est une conséquence fort simple de l'équation (7) et réciproquement.

Il serait au moins aussi facile de parvenir à la formule (8), par des considérations synthétiques, qu'à celles d'Euler et de Séguer : on pourrait ensuite remonter à celles-ci comme conséquences de la nouvelle relation.

[V]. Reprenons l'expression de $\mathrm{T}(h)$, savoir

$$\mathrm{T}(h)=\frac{1.3.5\ldots(2h-1).2^h}{1.2.3\ldots h(h+1)};$$

en multipliant haut et bas par $1.2.3\ldots h$, on en peut tirer

$$\frac{1.2.3\ldots(2h-1)\,2h}{1.2.3\ldots h.1.2.3\ldots h}=(h+1)\,\mathrm{T}(h),$$

le premier membre est le coefficient de $a^h b^h$ dans le développement de la puissance $(a+b)^{2h}$ du binome $a+b$. Stirling a donné pour le calculer une belle formule que voici et où π désigne le nombre du cercle

$$2^{2h}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2h+1}+\frac{1}{2.(2h+1)(2h+3)}+\frac{1.3^2}{2.4.(2h+1)\ldots(2h+5)}+\text{etc.}\right]},$$

en égalant donc à ce développement la quantité $(h+1)\,T(h)$, il en résulte la formule suivante particulièrement propre au calcul de $T(h)$, quand h devient un grand nombre, c'est-à-dire quand le nombre des côtés du polygone est très grand, puisque ce nombre est $h+2$:

$$T(h)=\frac{2^{2h}}{h+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2h+1}+\frac{1}{2(2h+1)(2h+3)}+\frac{1.3^2}{2.4.(2h+1)(2h+3)(2h+5)}+\text{etc.}\right]}:$$

La série qui entre sous le radical est d'autant plus convergente que h est un nombre plus considérable.

On peut encore évaluer le même nombre par une seconde formule, qui n'est point dans l'ouvrage de Stirling, mais qui a beaucoup d'analogie avec la précédente:

$$T(h)=\frac{2^{2h}}{h+1}\sqrt{\frac{1}{\pi h}\left[1-\frac{1}{2(2h+1)}-\frac{1}{3}\,\frac{1.3^2}{2.4.(2h+1)(2h+3)}-\frac{1}{5}\,\frac{1.3^2.5^2}{2.4.6\,(2h+1)\ldots(2h+5)}-\text{etc.}\right]}$$

Par ces expressions on calculera rapidement les nombres rapportés dans la table d'Euler: la première étant arrêtée à un certain terme donnera un nombre moindre que $T(h)$; la seconde donnera un nombre plus fort.

Je n'exposerai pas ici la méthode par laquelle on peut établir simplement ces belles formules. Ces démonstrations se trouveront dans un Mémoire dont la rédaction m'occupe en ce moment, et dont l'objet est l'évaluation des intégrales définies que les géomètres connaissent sous le nom d'*Eulériennes*, et leur usage dans la détermination, en suites convergentes, des formules qui sont fonctions de grands nombres.

Je dois avertir dès à présent les analystes que la dernière formule ne pourrait pas être remplacée à l'aide de la deuxième expression donnée par Stirling (page 120, *Tract. de summ. Serierum*, édit. 1764): je me suis assuré que celle-ci est inexacte. Il en est même ainsi de la seconde équation de la page 119, prop. XXIII. Les deux autres formules excitèrent l'admiration de Moivre, et elles en étaient bien dignes, ainsi que l'ouvrage entier de Stirling. Comment depuis un siècle de tels résultats ne sont-ils cités dans presque aucun ouvrage français ! Je ne sais même si l'on pourrait y rencontrer une seule de ces formules, avant la seconde édition de la théorie des probabilités de Laplace : dans une addition fort curieuse, il rapporte et démontre un peu plus simplement que Stirling, la première de ses quatre expressions, relatives au plus grand terme du binome élevé à une haute puissance paire. Les trois autres ne méritaient pas moins que la première l'attention des géomètres, soit pour en confirmer l'exactitude, soit pour les rectifier, s'il était nécessaire.

[VI]. L'équation (3) d'Euler $T(h+1) = \frac{2(2h+1)}{h+2} T(h)$, considérée analytiquement et indépendamment de son origine géométrique, est une équation aux différences finies du premier ordre d'une plus grande généralité que l'échelle de dérivation de Ségner :

$$T(h) = T(h-1) + T(1)T(h-2) + T(2)T(h-3) + \text{etc.} + T(h-1).$$

Dans celle-ci h désigne nécessairement un entier positif, puisqu'il est le nombre des termes du second membre : dans l'équation (3), h peut être un nombre quelconque ; $T(h)$ et $T(h+1)$ sont deux valeurs consécutives d'une fonction répondant aux valeurs h et $h+1$ de la variable. L'équation (3) s'intègre facilement à l'aide d'une intégrale binome, car elle est de l'espèce de celles dont Stirling s'est occupé d'abord, et que Euler et Laplace ont traitées à peu près dans le même temps. Pour l'intégrer, on posera $T(h) = 4^h . U(h)$, et en substituant dans l'équation, on aura

$$4^{h+1} U(h+1) = \frac{4(h+\frac{1}{2})}{h+2} 4^h . U(h);$$

divisant de part et d'autre par 4^{h+1}, on aura

$$U(h+1) = \frac{h+\frac{1}{2}}{h+2} . U(h),$$

il suffira de comparer cette équation à la formule des intégrales binomes

$$\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{p}{p+q}\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1},$$

pour reconnaître que si l'on écrit $p=h+\frac{1}{2}$, $p+q=h+2$, d'où $q=\frac{3}{2}$, on pourra employer l'expression suivante pour $\mathrm{U}(h)$,

$$\mathrm{U}(h) = \mathrm{A}\int_0^1 x^{h+\frac{1}{2}-1}\,dx\,(1-x)^{\frac{3}{2}-1},$$

et par conséquent

$$\mathrm{T}(h) = \mathrm{A}.4^h\int_0^1 x^{h-\frac{1}{2}}\,dx(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette expression suppose uniquement que $h+\frac{1}{2}$ soit une quantité positive : A est une constante arbitraire, indépendante de h. Telle est l'intégrale générale de l'équation linéaire (3), du moins sous la seule condition de $h+\frac{1}{2}>0$. Je ne m'occuperai pas en ce moment de l'intégrale relative à des valeurs de $h+\frac{1}{2}<0$; elle serait étrangère à notre sujet et exigerait l'emploi de fonctions liées aux intégrales définies, mais qui ne sont pas seulement des intégrales définies. Si la valeur $\mathrm{T}(1)$ est donnée et égale à l'unité, on pourra déterminer A ou la constante arbitraire: pour cela on aura par l'équation (3), elle-même en posant $h=0$, $\mathrm{T}(1)=\frac{2}{2}.\mathrm{T}(0)$; ainsi $\mathrm{T}(0)=\mathrm{T}(1)=1$. Si dans la valeur de $\mathrm{T}(h)$ on écrit $h=0$, on aura

$$1 = \mathrm{A}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{A}\frac{1}{2}\pi, \quad \text{donc} \quad \mathrm{A}=\frac{2}{\pi},$$

et par suite

$$\mathrm{T}(h) = \frac{2^{2h+1}}{\pi}\int_0^1 x^{h-\frac{1}{2}}\,dx\,(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

[VII]. Après avoir traité sous le rapport analytique la question qui s'est offerte à nos recherches, nous terminerons par une observation sur l'étendue du problème de la triangulation d'un polygone par ses diagonales, considérée synthétiquement. Nous avons dit que la question consiste à faire l'énumération des manières distinctes dont on peut disposer des triangles dans un certain ordre et dont la somme, pour chaque triangulation, couvre la surface entière du polygone plan et rectiligne.

Ce dénombrement des triangles ne suppose rien de particulier sur la disposition des côtés : il n'est pas nécessaire comme on l'a pensé, que le polygone soit convexe. S'il a des angles rentrans, il arrivera seulement que pour composer sa superficie avec les triangles fournis par les diagonales et les côtés du polygone, on devra retrancher de la somme d'un certain nombre des triangles, la somme des autres. On voit aussi que les mêmes énumérations s'appliquent aux polygones sphériques; elles conviennent également à toute figure tracée sur une surface continue, et qui serait formée par un contour fermé discontinu, anguleux, décrit selon une certaine loi: ce seraient si l'on veut les plus courtes distances à parcourir sur la surface, d'un sommet à l'autre du polygone, les lignes géodésiques, qui formeraient le contour ainsi que les diagonales. Tous ces cas présentent une parfaite analogie, et reçoivent l'application de la même formule. On peut même l'étendre à un périmètre rentrant dont les sommets auraient une disposition arbitraire dans l'espace et non sur un plan, et qui seraient liés consécutivement par des lignes droites. Ce polygone gauche donnerait un semblable dénombrement de triangulations contiguës, mais en ce dernier cas, il n'y aurait plus lieu de composer *la surface d'un polygone* par la somme des surfaces des triangles, ni par la différence de deux sommes.

Novembre 1838.