JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P.-H. BLANCHET

Mémoire sur la propagation et la polarisation du mouvement dans un milieu élastique indéfini, cristallisé d'une manière quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 1-30.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE
SUR LA PROPAGATION ET LA POLARISATION DU MOUVEMENT DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE INDÉFINI, CRISTALLISÉ D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE;

Par M. P.-H. BLANCHET,
Professeur de Physique au Collége royal de Henri IV. [*]

1. M. Poisson, dans un de ses beaux Mémoires, a traité complétement la propagation du mouvement dans un milieu élastique, homogène, non cristallisé : je me propose ici d'interpréter les intégrales dans toute la généralité de la question. L'étude des lois du mouvement dans un milieu homogène, élastique, indéfini, cristallisé d'une manière quelconque, n'est peut-être pas indigne de l'attention des géomètres.

J'intègre par une méthode connue [**]; mais j'en tire un parti nouveau pour mettre les intégrales sous une forme qui n'a été donnée nulle part. Les résultats sont parfaitement symétriques.

[*] Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences, le 6 août 1838. Voyez le rapport de M. Sturm, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome VII, page 1143.
[**] Employée avec élégance par M. Cauchy, dans ses leçons au Collége de France.

2. Les équations générales du mouvement, que nous voulons considérer, sont (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome X, page 578) :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \dfrac{dP_1}{dx} + \dfrac{dP_2}{dy} + \dfrac{dP_3}{dz} = 0, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + \dfrac{dQ_1}{dx} + \dfrac{dQ_2}{dy} + \dfrac{dQ_3}{dz} = 0, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + \dfrac{dR_1}{dx} + \dfrac{dR_2}{dy} + \dfrac{dR_3}{dz} = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles nous avons pris $\rho = 1$. Nous avons aussi remplacé u, v, w, par ξ, η, ζ. On a

$$(2)\qquad P_1 = R_3,\quad Q_1 = R_2,\quad P_2 = Q_3.$$

Les quantités P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3 se réduisent à six, qui sont toutes de la forme

$$(3)\quad T = A\frac{d\xi}{dx} + B\frac{d\eta}{dy} + C\frac{d\zeta}{dz} + D\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) + E\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) + F\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

Nous supposerons le corps homogène et partout à la même température, de telle sorte que les 36 coefficients tels que A, B, C, etc., seront constants ainsi que la densité ρ, que nous avons pu prendre égale à 1 par cette raison.

3. Pour intégrer les équations (1), prenons d'abord

$$(4)\quad \begin{cases} \xi = Ue^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}, \\ \eta = Ve^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}, \\ \zeta = We^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

U, V, W sont des fonctions de t; u, v, w sont indépendants des variables x, y, z, t.

On a évidemment

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} = u\xi\sqrt{-1}, & \dfrac{d\xi}{dy} = v\xi\sqrt{-1}, & \dfrac{d\xi}{dz} = w\xi\sqrt{-1}, \\ \dfrac{d\eta}{dx} = u\eta\sqrt{-1}, & \dfrac{d\eta}{dy} = v\eta\sqrt{-1}, & \dfrac{d\eta}{dz} = w\eta\sqrt{-1}, \\ \dfrac{d\zeta}{dx} = u\zeta\sqrt{-1}, & \dfrac{d\zeta}{dy} = v\zeta\sqrt{-1}, & \dfrac{d\zeta}{dz} = w\zeta\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Par la substitution de ces valeurs, une quantité de la forme (3) deviendra

$$(6)\qquad \mathrm{T} = \begin{bmatrix} (\mathrm{A}u + \mathrm{F}v + \mathrm{E}w)\xi \\ + (\mathrm{F}u + \mathrm{B}v + \mathrm{D}w)\eta \\ + (\mathrm{E}u + \mathrm{D}v + \mathrm{C}w)\zeta \end{bmatrix} \sqrt{-1},$$

ou, pour abréger,

$$(7)\qquad \mathrm{T} = (\mathrm{T}'\xi + \mathrm{T}''\eta + \mathrm{T}'''\zeta)\sqrt{-1},$$

si l'on pose

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{T}' = \mathrm{A}u + \mathrm{F}v + \mathrm{E}w, \\ \mathrm{T}'' = \mathrm{F}u + \mathrm{B}v + \mathrm{D}w, \\ \mathrm{T}''' = \mathrm{E}u + \mathrm{D}v + \mathrm{C}w. \end{cases}$$

On aura

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{T}}{dx} = \mathrm{T}u\sqrt{-1} = -(\mathrm{T}'\xi + \mathrm{T}''\eta + \mathrm{T}'''\zeta)u, \\ \dfrac{d\mathrm{T}}{dy} = \mathrm{T}v\sqrt{-1} = -(\mathrm{T}'\xi + \mathrm{T}''\eta + \mathrm{T}'''\zeta)v, \\ \dfrac{d\mathrm{T}}{dz} = \mathrm{T}w\sqrt{-1} = -(\mathrm{T}'\xi + \mathrm{T}''\eta + \mathrm{T}'''\zeta)w. \end{cases}$$

Si l'on fait les calculs analogues pour les quantités P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2, etc., on aura

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -(\mathcal{L}_1\xi + \mathcal{R}_2\eta + \mathcal{Q}_3\zeta), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -(\mathcal{R}_1\xi + \mathcal{M}_2\eta + \mathcal{P}_3\zeta), \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -(\mathcal{Q}_1\xi + \mathcal{P}_2\eta + \mathcal{N}_3\zeta), \end{cases}$$

en désignant les coefficients de ξ, η, ζ, par $-\mathcal{L}_1$, $-\mathcal{M}_2$, $-\mathcal{N}_3$, $-\mathcal{R}_1$, $-\mathcal{P}_2$, $-\mathcal{Q}_3$, $-\mathcal{Q}_1$, $-\mathcal{R}_2$, $-\mathcal{P}_3$. Toutes ces quantités sont des polynomes entiers homogènes du second degré en u, v, w.

Si maintenant nous multiplions respectivement les trois équations (10) par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et si nous les ajoutons, après avoir posé

$$(11)\qquad \frac{\mathcal{L}_1\mathcal{A} + \mathcal{R}_1\mathcal{B} + \mathcal{Q}_1\mathcal{C}}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{R}_2\mathcal{A} + \mathcal{M}_2\mathcal{B} + \mathcal{P}_2\mathcal{C}}{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{Q}_3\mathcal{A} + \mathcal{P}_3\mathcal{B} + \mathcal{N}_3\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = s^2$$

et

$$(12)\qquad \text{ȣ} = \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta,$$

nous aurons

$$\frac{d^2\mathfrak{u}}{dt^2} + s^2\mathfrak{u} = 0; \tag{13}$$

on en tire par l'intégration

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 \cos st + \mathfrak{u}_1 \frac{\sin st}{s}, \tag{14}$$

en désignant par $\mathfrak{u}_0$ et $\mathfrak{u}_1$ les valeurs initiales de $\mathfrak{u}$ et de $\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$ pour $t = 0$.

Les équations (11) donnent

$$\left\{\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_1 - s^2)\mathcal{A} + \mathcal{R}_1\mathcal{B} + \mathcal{Q}_1\mathcal{C} = 0,\\
&\mathcal{R}_2\mathcal{A} + (\mathcal{M}_2 - s^2)\mathcal{B} + \mathcal{P}_2\mathcal{C} = 0,\\
&\mathcal{Q}_3\mathcal{A} + \mathcal{P}_3\mathcal{B} + (\mathcal{N}_3 - s^2)\mathcal{C} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

On tire des deux premières

$$\mathcal{A} = \frac{-\mathcal{C}[\mathcal{Q}_1(\mathcal{M}_2 - s^2) - \mathcal{R}_1\mathcal{P}_2]}{(\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2) - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2},$$

$$\mathcal{B} = \frac{-\mathcal{C}[\mathcal{P}_2(\mathcal{L}_1 - s^2) - \mathcal{Q}_1\mathcal{R}_2]}{(\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2) - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2},$$

et par suite

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{P}_2\mathcal{R}_1 - \mathcal{Q}_1(\mathcal{M}_2 - s^2)} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{Q}_1\mathcal{R}_2 - \mathcal{P}_2(\mathcal{L}_1 - s^2)} = \frac{\mathcal{C}}{(\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2) - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}, \tag{16}$$

substituant dans la troisième les quantités proportionnelles à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, on aura, pour déterminer s^2,

$$\left\{\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2)(\mathcal{N}_3 - s^2) - \mathcal{P}_2\mathcal{P}_3(\mathcal{L}_1 - s^2) - \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_3(\mathcal{M}_2 - s^2)\\
&\qquad - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2(\mathcal{N}_3 - s^2) + \mathcal{R}_1\mathcal{P}_2\mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_1\mathcal{R}_2\mathcal{P}_3
\end{aligned}\right\} = 0. \tag{17}$$

Cette équation est du troisième degré en s^2, elle aura trois racines s'^2, s''^2, s'''^2, qui donneront pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, trois systèmes de valeurs $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{A}'''$, $\mathcal{B}'''$, $\mathcal{C}'''$, et par suite trois valeurs de $\mathfrak{u}$:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{u}' &= \mathcal{A}'\xi + \mathcal{B}'\eta + \mathcal{C}'\zeta,\\
\mathfrak{u}'' &= \mathcal{A}''\xi + \mathcal{B}''\eta + \mathcal{C}''\zeta,\\
\mathfrak{u}''' &= \mathcal{A}'''\xi + \mathcal{B}'''\eta + \mathcal{C}'''\zeta.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

En désignant par ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, ζ_1, les valeurs initiales tirées des expressions (4) quand on fait $t = 0$ dans U, V, W, on aura pour les valeurs initiales des $\mathfrak{s}$ et des $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$:

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{s}'_0 = \mathcal{A}'\xi_0 + \mathcal{B}'\eta_0 + \mathcal{C}'\zeta_0, \\ \mathfrak{s}''_0 = \mathcal{A}''\xi_0 + \mathcal{B}''\eta_0 + \mathcal{C}''\zeta_0, \\ \mathfrak{s}'''_0 = \mathcal{A}'''\xi_0 + \mathcal{B}'''\eta_0 + \mathcal{C}'''\zeta_0, \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{s}'_1 = \mathcal{A}'\xi_1 + \mathcal{B}'\eta_1 + \mathcal{C}'\zeta_1, \\ \mathfrak{s}''_1 = \mathcal{A}''\xi_1 + \mathcal{B}''\eta_1 + \mathcal{C}''\zeta_1, \\ \mathfrak{s}'''_1 = \mathcal{A}'''\xi_1 + \mathcal{B}'''\eta_1 + \mathcal{C}'''\zeta_1, \end{cases}$$

et, en vertu de l'équation (14),

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{s}' = \mathfrak{s}'_0 \cos s't + \mathfrak{s}'_1 \dfrac{\sin s't}{s'}, \\ \mathfrak{s}'' = \mathfrak{s}''_0 \cos s''t + \mathfrak{s}'_1 \dfrac{\sin s''t}{s''}, \\ \mathfrak{s}''' = \mathfrak{s}'''_0 \cos s'''t + \mathfrak{s}'''_1 \dfrac{\sin s'''t}{s'''}. \end{cases}$$

D'ailleurs, des équations (18), on tire, par l'élimination, des expressions de la forme

$$(22)\quad \begin{cases} \xi = a'\mathfrak{s}' + a''\mathfrak{s}'' + a'''\mathfrak{s}''', \\ \eta = b'\mathfrak{s}' + b''\mathfrak{s}'' + b'''\mathfrak{s}''', \\ \zeta = c'\mathfrak{s}' + c''\mathfrak{s}'' + c'''\mathfrak{s}'''; \end{cases}$$

et comme ces valeurs doivent rendre identiques les équations (18), on en conclura les conditions suivantes :

$$(23)\quad \begin{cases} a'\mathcal{A}' + b'\mathcal{B}' + c'\mathcal{C}' = 1, \\ a''\mathcal{A}'' + b''\mathcal{B}'' + c''\mathcal{C}'' = 1, \\ a'''\mathcal{A}''' + b'''\mathcal{B}''' + c'''\mathcal{C}''' = 1, \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} \mathcal{A}'a'' + \mathcal{B}'b'' + \mathcal{C}'c'' = 0, \\ \mathcal{A}'a''' + \mathcal{B}'b''' + \mathcal{C}'c''' = 0, \\ \mathcal{A}''a' + \mathcal{B}''b' + \mathcal{C}''c' = 0, \\ \mathcal{A}''a''' + \mathcal{B}''b''' + \mathcal{C}''c''' = 0, \\ \mathcal{A}'''a' + \mathcal{B}'''b' + \mathcal{C}'''c' = 0, \\ \mathcal{A}'''a'' + \mathcal{B}'''b'' + \mathcal{C}'''c'' = 0. \end{cases}$$

Si l'on substituait les valeurs de $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, $\mathfrak{s}'''$ des équations (18) dans les équations (22), on devrait aussi avoir des identités, d'où l'on conclurait encore

$$(25)\qquad \begin{cases} a'\mathcal{B}' + a''\mathcal{B}'' + a'''\mathcal{B}''' = 0,\\ a'\mathcal{C}' + a''\mathcal{C}'' + a'''\mathcal{C}''' = 0,\\ b'\mathcal{A}' + b''\mathcal{A}'' + b'''\mathcal{A}''' = 0,\\ b'\mathcal{C}' + b''\mathcal{C}'' + b'''\mathcal{C}''' = 0,\\ c'\mathcal{A}' + c''\mathcal{A}'' + c'''\mathcal{A}''' = 0,\\ c'\mathcal{B}' + c''\mathcal{B}'' + c'''\mathcal{B}''' = 0, \end{cases}$$

$$(26)\qquad \begin{cases} a'\mathcal{A}' + a''\mathcal{A}'' + a'''\mathcal{A}''' = 1,\\ b'\mathcal{B}' + b''\mathcal{B}'' + b'''\mathcal{B}''' = 1,\\ c'\mathcal{C}' + c''\mathcal{C}'' + c'''\mathcal{C}''' = 1. \end{cases}$$

Si l'on prend les valeurs de $\varkappa'_0$, $\varkappa''_0$, $\varkappa'''_0$, $\varkappa'_1$, $\varkappa''_1$, $\varkappa'''_1$, dans les équations (19) et (20) pour les substituer dans les équations (21), et si l'on substitue ensuite les expressions de $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$, dans les équations (22), on aura

$$(27)\quad \begin{cases} \xi = (a'\mathcal{A}'\cos s't + a''\mathcal{A}''\cos s''t + a'''\mathcal{A}'''\cos s'''t)\xi_0 + \left(a'\mathcal{A}'\dfrac{\sin s't}{s'} + a''\mathcal{A}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + a'''\mathcal{A}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\xi_1\\ \quad + (a'\mathcal{B}'\cos s't + a''\mathcal{B}''\cos s''t + a'''\mathcal{B}'''\cos s'''t)\eta_0 + \left(a'\mathcal{B}'\dfrac{\sin s't}{s'} + a''\mathcal{B}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + a'''\mathcal{B}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\eta_1\\ \quad + (a'\mathcal{C}'\cos s't + a''\mathcal{C}''\cos s''t + a'''\mathcal{C}'''\cos s'''t)\zeta_0 + \left(a'\mathcal{C}'\dfrac{\sin s't}{s'} + a''\mathcal{C}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + a'''\mathcal{C}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\zeta_1.\\[2ex] \eta = (b'\mathcal{A}'\cos s't + b''\mathcal{A}''\cos s''t + b'''\mathcal{A}'''\cos s'''t)\xi_0 + \left(b'\mathcal{A}'\dfrac{\sin s't}{s'} + b''\mathcal{A}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + b'''\mathcal{A}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\xi_1\\ \quad + (b'\mathcal{B}'\cos s't + b''\mathcal{B}''\cos s''t + b'''\mathcal{B}'''\cos s'''t)\eta_0 + \left(b'\mathcal{B}'\dfrac{\sin s't}{s'} + b''\mathcal{B}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + b'''\mathcal{B}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\eta_1\\ \quad + (b'\mathcal{C}'\cos s't + b''\mathcal{C}''\cos s''t + b'''\mathcal{C}'''\cos s'''t)\zeta_0 + \left(b'\mathcal{C}'\dfrac{\sin s't}{s'} + b''\mathcal{C}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + b'''\mathcal{C}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\zeta_1.\\[2ex] \zeta = (c'\mathcal{A}'\cos s't + c''\mathcal{A}''\cos s''t + c'''\mathcal{A}'''\cos s'''t)\xi_0 + \left(c'\mathcal{A}'\dfrac{\sin s't}{s'} + c''\mathcal{A}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + c'''\mathcal{A}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\xi_1\\ \quad + (c'\mathcal{B}'\cos s't + c''\mathcal{B}''\cos s''t + c'''\mathcal{B}'''\cos s'''t)\eta_0 + \left(c'\mathcal{B}'\dfrac{\sin s't}{s'} + c''\mathcal{B}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + c'''\mathcal{B}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\eta_1\\ \quad + (c'\mathcal{C}'\cos s't + c''\mathcal{C}''\cos s''t + c'''\mathcal{C}'''\cos s'''t)\zeta_0 + \left(c'\mathcal{C}'\dfrac{\sin s't}{s'} + c''\mathcal{C}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + c'''\mathcal{C}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\zeta_1. \end{cases}$$

Si l'on fait $t = 0$, les conditions initiales sont remplies en vertu des équations de conditions (25) et (26).

4. Pour former les valeurs de ξ, η, ζ, on peut mettre tant de termes qu'on voudra de même forme, même une infinité de termes, tous les éléments d'intégrales définies propres à représenter les valeurs initiales de ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, pour $t = 0$.

On pourra donc écrire :

$$
(28)\left\{
\begin{aligned}
\xi = \frac{1}{8\pi^3}\iiiint\!\!\iint e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}} & \Big[(a'\mathcal{A}'\cos s't + a''\mathcal{A}''\cos s''t + a'''\mathcal{A}'''\cos s'''t)\, f_1(\lambda,\mu,\nu) \\
& + (a'\mathcal{B}'\cos s't + a''\mathcal{B}''\cos s''t + a'''\mathcal{B}'''\cos s'''t)\, f_2(\lambda,\mu,\nu) \\
& + (a'\mathcal{C}'\cos s't + a''\mathcal{C}''\cos s''t + a'''\mathcal{C}'''\cos s'''t)\, f_3(\lambda,\mu,\nu) \\
& + \left(a'\mathcal{A}'\frac{\sin s't}{s'} + a''\mathcal{A}''\frac{\sin s''t}{s''} + a'''\mathcal{A}'''\frac{\sin s'''t}{s'''}\right) \mathfrak{f}_1(\lambda,\mu,\nu) \\
& + \left(a'\mathcal{B}'\frac{\sin s't}{s'} + a''\mathcal{B}''\frac{\sin s''t}{s''} + a'''\mathcal{B}'''\frac{\sin s'''t}{s'''}\right) \mathfrak{f}_2(\lambda,\mu,\nu) \\
& + \left(a'\mathcal{C}'\frac{\sin s't}{s'} + a''\mathcal{C}''\frac{\sin s''t}{s''} + a'''\mathcal{C}'''\frac{\sin s'''t}{s'''}\right) \mathfrak{f}_3(\lambda,\mu,\nu) \Big] du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu, \\
\eta = \frac{1}{8\pi^3}\iiiint\!\!\iint e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}} & \Big[(b'\mathcal{A}'\cos s't + b''\mathcal{A}''\cos s''t + b'''\mathcal{A}'''\cos s'''t)\, f_1(\lambda,\mu,\nu) \\
& + (b'\mathcal{B}'\cos s't + b''\mathcal{B}''\cos s''t + b'''\mathcal{B}'''\cos s'''t)\, f_2(\lambda,\mu,\nu) \\
& + (b'\mathcal{C}'\cos s't + b''\mathcal{C}''\cos s''t + b'''\mathcal{C}'''\cos s'''t)\, f_3(\lambda,\mu,\nu) \\
& + \left(b'\mathcal{A}'\frac{\sin s't}{s'} + b''\mathcal{A}''\frac{\sin s''t}{s''} + b'''\mathcal{A}'''\frac{\sin s'''t}{s'''}\right) \mathfrak{f}_1(\lambda,\mu,\nu) \\
& + \left(b'\mathcal{B}'\frac{\sin s't}{s'} + b''\mathcal{B}''\frac{\sin s''t}{s''} + b'''\mathcal{B}'''\frac{\sin s'''t}{s'''}\right) \mathfrak{f}_2(\lambda,\mu,\nu) \\
& + \left(b'\mathcal{C}'\frac{\sin s't}{s'} + b''\mathcal{C}''\frac{\sin s''t}{s''} + b'''\mathcal{C}'''\frac{\sin s'''t}{s'''}\right) \mathfrak{f}_3(\lambda,\mu,\nu) \Big] du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu, \\
\zeta = \frac{1}{8\pi^3}\iiiint\!\!\iint e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}} & \Big[(c'\mathcal{A}'\cos s't + c''\mathcal{A}''\cos s''t + c'''\mathcal{A}'''\cos s'''t)\, f_1(\lambda,\mu,\nu) \\
& + (c'\mathcal{B}'\cos s't + c''\mathcal{B}''\cos s''t + c'''\mathcal{B}'''\cos s'''t)\, f_2(\lambda,\mu,\nu) \\
& + (c'\mathcal{C}'\cos s't + c''\mathcal{C}''\cos s''t + c'''\mathcal{C}'''\cos s'''t)\, f_3(\lambda,\mu,\nu) \\
& + \left(c'\mathcal{A}'\frac{\sin s't}{s'} + c''\mathcal{A}''\frac{\sin s''t}{s''} + c'''\mathcal{A}'''\frac{\sin s'''t}{s'''}\right) \mathfrak{f}_1(\lambda,\mu,\nu) \\
& + \left(c'\mathcal{B}'\frac{\sin s't}{s'} + c''\mathcal{B}''\frac{\sin s''t}{s''} + c'''\mathcal{B}'''\frac{\sin s'''t}{s'''}\right) \mathfrak{f}_2(\lambda,\mu,\nu) \\
& + \left(c'\mathcal{C}'\frac{\sin s't}{s'} + c''\mathcal{C}''\frac{\sin s''t}{s''} + c'''\mathcal{C}'''\frac{\sin s'''t}{s'''}\right) \mathfrak{f}_3(\lambda,\mu,\nu) \Big] du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.
\end{aligned}
\right.
$$

Toutes les intégrales sont prises de $-\infty$ à $+\infty$.

5. On peut facilement vérifier que ces formules satisfont aux équations (1). En effet, à cause de l'exponentielle commune, si l'on substitue pour ξ, η, ζ leurs valeurs, les quantités $\mathcal{L}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_3$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, se reproduiront, et les termes affectés de $\cos s't$ disparaîtront, si l'on a

$$(29)\qquad \begin{cases} a's'^2 = \mathcal{L}_1 a' + \mathcal{R}_2 b' + \mathcal{Q}_3 c', \\ b's'^2 = \mathcal{R}_1 a' + \mathfrak{M}_2 b' + \mathcal{P}_3 c', \\ c's'^2 = \mathcal{Q}_1 a' + \mathcal{P}_2 b' + \mathfrak{N}_3 c'. \end{cases}$$

Or, les équations (15) doivent être satisfaites par les quantités $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, s'; on aura donc

$$(30)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}_1\mathcal{A}' + \mathcal{R}_1\mathcal{B}' + \mathcal{Q}_1\mathcal{C}' = \mathcal{A}'s'^2, \\ \mathcal{R}_2\mathcal{A}' + \mathfrak{M}_2\mathcal{B}' + \mathcal{P}_2\mathcal{C}' = \mathcal{B}'s'^2, \\ \mathcal{Q}_3\mathcal{A}' + \mathcal{P}_3\mathcal{B}' + \mathfrak{N}_3\mathcal{C}' = \mathcal{C}'s'^2. \end{cases}$$

Si l'on multiplie respectivement par a', b', c', et si l'on a égard à la première des conditions (23), on trouve

$$(31)\quad (\mathcal{L}_1 a' + \mathcal{R}_2 b' + \mathcal{Q}_3 c')\mathcal{A}' + (\mathcal{R}_1 a' + \mathfrak{M}_2 b' + \mathcal{P}_3 c')\mathcal{B}' + (\mathcal{Q}_1 a' + \mathcal{P}_2 b' + \mathfrak{N}_3 c')\mathcal{C}' = s'^2.$$

On a aussi

$$(32)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}_1\mathcal{A}'' + \mathcal{R}_1\mathcal{B}'' + \mathcal{Q}_1\mathcal{C}'' = \mathcal{A}''s''^2, \\ \mathcal{R}_2\mathcal{A}'' + \mathfrak{M}_2\mathcal{B}'' + \mathcal{P}_2\mathcal{C}'' = \mathcal{B}''s''^2, \\ \mathcal{Q}_3\mathcal{A}'' + \mathcal{P}_3\mathcal{B}'' + \mathfrak{N}_3\mathcal{C}'' = \mathcal{C}''s''^2. \end{cases}$$

Multipliant respectivement par a', b', c', ajoutant et ayant égard à la troisième des conditions (24), on trouve

$$(33)\quad (\mathcal{L}_1 a' + \mathcal{R}_2 b' + \mathcal{Q}_3 c')\mathcal{A}'' + (\mathcal{R}_1 a' + \mathfrak{M}_2 b' + \mathcal{P}_3 c')\mathcal{B}'' + (\mathcal{Q}_1 a' + \mathcal{P}_2 b' + \mathfrak{N}_3 c')\mathcal{C}'' = 0.$$

de même on trouvera

$$(34)\quad (\mathcal{L}_1 a' + \mathcal{R}_2 b' + \mathcal{Q}_3 c')\mathcal{A}''' + (\mathcal{R}_1 a' + \mathfrak{N}_2 b' + \mathcal{P}_3 c')\mathcal{B}''' + (\mathcal{Q}_1 a' + \mathcal{P}_2 b' + \mathfrak{N}_3 c')\mathcal{C}''' = 0.$$

Si maintenant on multiplie les équations (31), (33), (34), respectivement par a', a'', a''', et si l'on ajoute; en vertu de la première des équations (26) et des deux premières des équations (25), on aura

$$\mathcal{L}_1 a' + \mathcal{R}_2 b' + \mathcal{Q}_3 c' = a's'^2.$$

C'est la première des équations (29). On démontrera sans peine les autres. On voit par là que a', b', c', comme $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, satisfont à des équations de même forme que les équations (15), mais qui ne sont pa les équations (15).

On obtiendra des résultats analogues pour a'', b'', c'', a''', b''', c'''.

Il suit de là que les rapports des quantités a', b', c', sont déterminés comme ceux des quantités $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$; mais ces quantités elles-mêmes ne le sont pas. En effet, si dans les équations de condition (23) on fait varier $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, dans un certain rapport, il faudra que a', b', c', varient dans un rapport inverse. Il en sera de même pour $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$ et a'', b'', c'', pour $\mathcal{A}'''$, $\mathcal{B}'''$, $\mathcal{C}'''$ et a''', b''', c'''; et alors toutes les équations de condition (24) seront aussi satisfaites. Admettons que toutes ces quantités soient réelles, comme on le verra plus tard ;

On peut, si l'on veut, fixer les valeurs de toutes ces quantités en prenant

$$(35)\qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \quad a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 = 1.$$

On peut concevoir une droite menée par l'origine, de manière à faire avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus soient a', b', c', et deux autres droites déterminées comme la première par les valeurs de a'', b'', c'', a''', b''', c'''. On aura ainsi trois nouveaux axes, obliques en général.

Remarquons maintenant que s', s'', s''', en vertu de l'équation (17) et de la composition des coefficients $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{Q}_3$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, sont des fonctions homogènes du premier degré en u, v, w. En vertu des équations (35) et d'équations telles que les équations (29), a', b', c', a'', b'', c'', a''', b''', c''', sont des fonctions homogènes de degré nul. Il en est de même des quantités $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{A}'''$, $\mathcal{B}'''$, $\mathcal{C}'''$. De plus, à cause des équations (35), les quantités a', b', c', a'', etc., ne seront jamais infinies; il en sera de même de $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{A}''$, etc. ; car, si par exemple $\mathcal{A}'$ était infini, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ le seraient en même temps à cause de leurs rapports constants avec $\mathcal{A}'$, et a', b', c' seraient simultanément nuls, à cause de la première des équations (23), et ne pourraient satisfaire à la première des équations (35).

6. On peut vérifier que les expressions (28) satisfont aux conditions initiales, pourvu que $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$, $\mathrm{f}_1(x, y, z)$, $\mathrm{f}_2(x, y, z)$, $\mathrm{f}_3(x, y, z)$ soient les valeurs de ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ pour $t=0$.

En effet, si l'on pose $t = 0$ dans les formules (28), les sinus deviennent nuls; les cosinus prennent la valeur 1. Dans la valeur de ξ le coefficient de $f_1(\lambda, \mu, \nu)$ devient égal à 1; les coefficients des autres fonctions s'évanouissent en vertu des équations de condition (23) et (24). Donc, d'après la formule de Fourier étendue à trois variables, ξ se réduit à $f_1(x, y, z)$, qui est sa valeur initiale. Il est facile de voir que $\frac{d\xi}{dt}$ se réduit à $\mathrm{f}_1(x, y, z)$, parce que les sinus et cosinus se changent en cosinus et sinus par la différentiation. La vérification est la même pour η et ζ.

7. Cela posé, pour interpréter les expressions (28) dans leur état général, nous observerons que les diverses parties des intégrales sont de la forme

$$(36)\quad \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\,\omega\cos st\, f(\lambda, \mu, \nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

ou

$$(37)\quad \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\,\omega\frac{\sin st}{s} f(\lambda, \mu, \nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu;$$

cette dernière revient à

$$(38)\quad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\,\omega\cos st\, f(\lambda, \mu, \nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\,dt.$$

Il suffit donc de considérer d'abord l'intégrale (36) dans laquelle $f(\lambda, \mu, \nu)$ désigne une fonction quelconque des variables λ, μ, ν; s et ω des fonctions homogènes de u, v, w: la première du premier degré, la seconde de degré nul.

Posons

$$(39)\quad \begin{cases} x-\lambda = \alpha\rho = \rho\cos\varpi, \\ y-\mu = \beta\rho = \rho\sin\varpi\cos\theta, \\ z-\nu = \gamma\rho = \rho\sin\varpi\sin\theta; \end{cases}$$

ρ sera le rayon vecteur mené du point (x, y, z) au point dont les coordonnées sont λ, μ, ν; $\varpi + \pi$ sera l'angle qu'il fait avec l'axe des x; θ l'angle que fait avec le plan des x, y, le plan qui passe par l'axe des x et par le rayon vecteur; α, β, γ, désigneront les cosinus des angles du rayon vecteur avec les axes des x, des y, des z, pris en signes contraires.

Transformons encore les quantités u, v, w, regardées comme les coordonnées rectangulaires d'un point en d'autres coordonnées rectangulaires, et remplaçons

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{l} u \text{ par } \alpha u + \alpha' v + \alpha'' w, \\ v \text{ par } \beta u + \beta' v + \beta'' w, \\ w \text{ par } \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w. \end{array}\right.$$

La quantité $u(x-\lambda) + v(y-\mu) + w(z-\nu)$ deviendra ρu. En désignant pour abréger par $\chi(\rho)$ ce que devient $f(\lambda, \mu, \nu)$, nous aurons

$$(41)\qquad f(x-\alpha\rho,\ y-\beta\rho,\ z-\gamma\rho) = \chi(\rho),$$

et l'intégrale (36) prendra la forme

$$(42)\quad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho u\sqrt{-1}}\,\omega\cos st\,\chi(\rho)\,\rho^2\,du\,dv\,dw\,d\rho\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

dans laquelle ω et s seront des fonctions homogènes en u, v, w, de même degré qu'avant la transformation.

Soient maintenant

$$(43)\qquad v = pu,\quad w = qu,\quad dv = udp,\quad dw = udq;$$

on aura, à cause de l'homogénéité selon le signe de u,

$$(44)\qquad s = \pm nu,\quad \omega = m; \qquad [*]$$

n et m désigneront des fonctions de p et q seulement. L'intégrale deviendra

$$(45)\quad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho u\sqrt{-1}}\,m\cos unt\,\chi(\rho)\,\rho^2 u^2\,dp\,dq\,du\,d\rho\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

---

[*] A cause de la forme des quantités $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{P}_1 \ldots$, par la transformation indiquée, ce sera le facteur u^2 qui deviendra commun à tous les termes. Par suite, d'après l'équation (17), s sera véritablement de la forme $n(u^2)^{\frac{1}{2}}$. On devra donc prendre $+nu$ quand u sera positif, $-nu$ s'il est négatif. De même, à cause des équations (35), ω, qui représente des quantités de la forme $a\mathfrak{A}$, $a\mathfrak{B}$, sera de la forme $m(u^2)^0 = m$, dans tous les cas.

On peut se débarrasser du facteur u^2 en écrivant sous la forme

$$(46)\quad \frac{-1}{8\pi^3}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho u\sqrt{-1}} m\cos(unt)\,\chi(\rho)\frac{\rho^2}{n^2}\,du\,dp\,dq\,d\rho\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta;$$

on a

$$e^{\rho u\sqrt{-1}} = \cos\rho u + \sqrt{-1},\ \sin\rho u,$$

$$e^{\rho u\sqrt{-1}}\cos(unt) = \cos\rho u\cos unt + \sqrt{-1}\sin\rho u\cos unt,$$

$$\cos\rho u\cos unt = \frac{\cos u(\rho - nt) + \cos u(\rho + nt)}{2}.$$

La partie imaginaire disparaîtra de l'intégrale parce que u entre $-\infty$ et $+\infty$ donnera pour $\sin u$ des valeurs égales et de signes contraires. Les éléments de l'intégrale multipliée par $\sqrt{-1}$ se détruiront deux à deux, et l'on aura, au lieu de l'intégrale (46), la somme de ces deux autres :

$$(47)\ -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{16\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(\rho - nt)\frac{m\rho^2}{n^2}\chi(\rho)\,du\,dp\,dq\,d\rho\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

$$(48)\ -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{16\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(\rho + nt)\frac{m\rho^2}{n^2}\chi(\rho)\,du\,dp\,dq\,d\rho\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Si dans la première, nous considérons seulement les intégrations relatives à u et à ρ, nous aurons par la formule de Fourier,

$$(49)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(\rho - nt)\frac{\rho^2}{n^2}\chi(\rho)\,du\,d\rho = t^2\chi(nt),$$

et l'intégrale (47) deviendra

$$(50)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 m\,\chi(nt)\,dp\,dq\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Si dans l'intégrale (49) on remplace $\rho - nt$ par $\rho + nt$ sous le signe cos, elle s'évanouit, parce que la valeur $\rho = -nt$ n'est pas comprise entre les limites de l'intégration par rapport à ρ. Ainsi l'intégrale (48) disparaît, et l'intégrale (50) représente toute la valeur de l'intégrale (46). Il faut réduire encore l'intégrale quadruple.

8. Pour y parvenir, observons que les racines s'^2, s''^2, s'''^2 de l'équation (17) doivent être réelles et positives pour toutes les valeurs de u, v, w; autrement, la propagation n'aurait pas lieu; car les cosinus et sinus de l'un des arcs $s't$, $s''t$, $s'''t$, se transformeraient en exponentielles réelles et croîtraient indéfiniment avec le temps; par suite les quantités ξ, η, ζ, ne resteraient pas très petites, ce qui est contraire aux conditions de la mise en équation. Si donc nous laissons s^2 pour désigner l'une quelconque des trois racines, nous aurons

$$(51) \qquad s = F(u, v, w),$$

et la fonction F prendra une valeur réelle pour toute valeur de u, v, w; par la transformation $v = pu$, $w = qu$, nous aurons

$$(52) \qquad s = \pm\, uF(1, p, q), \quad n = F(1, p, q);$$

donc

$$(53) \qquad nt = tF(1, p, q), \qquad nt = F(t, tp, tq).$$

Observons encore que si l'on regarde u, v, w, comme les coordonnées rectangulaires d'un même point de l'espace, et si l'on fait la quantité s constante, l'équation (51) représente une surface qu'un rayon vecteur mené de l'origine ne peut rencontrer qu'en un point; car si l'on prend $u = a\tau$, $v = b\tau$, $w = c\tau$, on aura

$$(54) \qquad s = \tau F(a, b, c), \quad \tau = \frac{s}{F(a, b, c)}.$$

Il n'y aura qu'une valeur de τ pour chaque système de valeurs de a, b, c.

Toutes les surfaces ainsi comprises dans l'équation (51) sont semblables entre elles; et en vertu de l'équation (54) il en peut passer une par chaque point de l'espace; car il existera toujours une valeur de s convenable pour que τ devienne le rayon vecteur de tel point qu'on voudra dans la direction déterminée par les cosinus a, b, c.

On peut remarquer aussi que s a une valeur finie pour des valeurs finies de u, v, w. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la forme de l'équation (17). Donc, $F(a, b, c)$ n'aura jamais une valeur infinie.

D'après ces considérations, les surfaces comprises dans l'équation (51) peuvent entrer dans un système de coordonnées et servir à transformer les intégrales. Nous pouvons concevoir que chaque point de l'espace soit déterminé : 1° par une surface comprise dans l'équation (51), pour une certaine valeur de s qui sera l'une des coordonnées; 2° par un plan perpendiculaire à l'axe des u; 3° par une coordonnée quelconque prise dans ce plan. En effet, la coordonnée s et la coordonnée u détermineront une ligne courbe, et la troisième coordonnée déterminera un point sur cette ligne courbe.

Entre quelles limites ces coordonnées devront-elles varier pour étendre une intégrale triple à tous les points de l'espace? Si l'on regarde d'abord comme constantes les coordonnées u et s, la troisième coordonnée, quelle qu'elle soit, devra varier entre des limites telles qu'elles donnent tous les points de la courbe d'intersection; si l'on fait varier ensuite la coordonnée u, on aura toutes les intersections de la surface par un plan perpendiculaire aux u, et cette coordonnée devra être comprise entre les valeurs qui déterminent parmi ces plans, les deux plans tangents extrêmes; on devrait encore partager l'intégrale pour toutes les valeurs de u qui rendraient le plan tangent à la surface des u, v, w. On aura ainsi tous les points de cette surface. Enfin, en faisant passer s de 0 à ∞, la surface passera par tous les points de l'espace [*].

On pourrait encore s'y prendre autrement. Après avoir obtenu tous les points de la courbe d'intersection par la variation de la troisième coordonnée, on pourrait faire varier s; alors la courbe s'agrandirait ou se rétrécirait dans son plan. Elle se réduirait en général à un point, si la valeur de s était une de celles qui correspondent au contact. Pour $s = \infty$, elle s'étendrait à l'infini; il faudrait donc faire varier s depuis la plus petite valeur qui donne un contact jusqu'à ∞; on devrait aussi, dans certains cas, partager l'intégrale pour les contacts intermédiaires s'il y avait solution de continuité. Enfin, il faudrait faire varier u de $-\infty$ à ∞ pour que le plan parcourût tout l'espace.

Si nous faisons $u = t$, nous aurons

$$(55) \qquad s = \mathrm{F}(t,\, v,\, w).$$

Si nous reprenons $v = tp$, $w = tq$, nous aurons

$$(56) \qquad nt = \mathrm{F}(t,\, tp,\, tq) = \mathrm{F}(t,\, v,\, w);$$

---

[*] Cette manière de prendre les limites se rapporterait à une autre méthode pour traiter la question. J'ai préféré la deuxième dans la suite du Mémoire, parce qu'elle mène un peu plus rapidement au même résultat que la première.

et si nous remplaçons nt par s, pour abréger, l'intégrale (50) deviendra

$$(57) \qquad -\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\chi(s)\,dv\,dw\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

s et ω sont composées comme précédemment, excepté que u est remplacé par t.

Or, on peut concevoir que v et w soient deux coordonnées rectangulaires qui déterminent tous les points du plan dont l'équation est $u=t$. Pour transformer l'intégrale, on peut déterminer autrement la position de ces points. Nous imaginerons qu'on prenne s pour l'une des coordonnées. Chaque valeur de s déterminera une courbe dont l'équation sera $s=\mathrm{F}(t, v, w)$, et qui sera l'intersection du plan $u=t$ avec la surface $s=\mathrm{F}(u, v, w)$. La portion du plan $u=t$ comprise entre deux courbes correspondantes à s et à $s+ds$, sera la différentielle de l'aire de la courbe correspondante à la valeur de s que l'on considère. Soit cette aire représentée par σ, sa différentielle sera $\frac{d\sigma}{ds}ds$. Cette portion de surface infiniment petite sera partagée par la seconde coordonnée, quelle qu'elle soit, en parties que nous pouvons représenter par $\delta\frac{d\sigma}{ds}ds$. Tel sera l'élément différentiel de la surface du plan $u=t$. Cet élément devra remplacer $dv\,dw$. L'intégration relative à s devra s'étendre depuis la plus petite valeur de s pour laquelle la surface donnée par l'équation (51) touche le plan $u=t$, jusqu'à $s=\infty$. La plus petite valeur que l'on puisse donner à s satisfera en général aux conditions

$$(58) \qquad \frac{ds}{dv}=0, \quad \frac{ds}{dw}=0,$$

qui donneront pour v et w, et par suite pour s, des valeurs proportionnelles à t; on aura donc une expression de la forme $s=\mathrm{N}t$ pour la plus petite valeur de s. D'ailleurs l'intégration qui se rapporte à δ doit être étendue à tout le contour de la courbe dont l'équation est

$$(59) \qquad s=\mathrm{F}(t, v, w),$$

dans le plan $u=t$.

L'intégrale (57) deviendra ainsi

$$(60) \qquad -\frac{d^2}{dt^2}\,\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{N}t}^{\infty}\int\omega\chi(s)\,\delta\frac{d\sigma}{ds}\,ds\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta:$$

ω est maintenant une fonction homogène de degré nul de t, s, et de la coordonnée à laquelle se rapporte la caractéristique δ.

Soit maintenant l'intégrale définie

$$(61)\qquad \int \omega\delta\,\frac{d\sigma}{ds} = \varphi(t,\, s),$$

$\varphi\,(t,s)$ sera une fonction homogène du premier degré en t et en s. L'intégrale (60) deviendra

$$(62)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{Nt}^{\infty}\chi(s)\,\varphi(t,\,s)\,ds\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Si l'on effectue la double différentiation indiquée, et si, pour abréger, on pose

$$(63)\qquad \frac{d\varphi(t,s)}{dt} = \varphi(t,\,s),\qquad \frac{d^2\varphi\,(t,s)}{dt^2} = \varphi''(t,\,s);$$

si, de plus, on observe que les principes de l'homogénéité donnent

$$(64)\qquad \varphi(t,\,\mathrm{N}t) = t\,\varphi(1,\mathrm{N}),\ \ \varphi'(t,\,\mathrm{N}t) = \varphi'(1,\,\mathrm{N}),\ \ \varphi''(t,\,\mathrm{N}t) = \frac{1}{t}\,\varphi''(1,\,\mathrm{N}),$$

on trouvera, au lieu de l'intégrale (62), l'expression

$$(65)\ \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{N}\left[t\,\frac{d\chi(\mathrm{N}t)}{dt}\,\varphi(1,\mathrm{N})+\chi(\mathrm{N}t)\varphi(1,\mathrm{N})+\chi(\mathrm{N}t)\varphi'(1,\mathrm{N})-\int_{\mathrm{N}t}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{N}}\chi(s)\varphi''(t,s)\,ds\right]\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Si l'on fait $s = ts'$, on aura

$$(66)\qquad \int_{\mathrm{N}t}^{\infty}\chi(s)\varphi''(t,\,s)\,ds = \int_{\mathrm{N}}^{\infty}\chi\,(ts')\,\varphi''(1,\,s')\,\frac{ds'}{t},$$

et par suite l'intégrale (65) sera remplacée par la somme des quatre intégrales suivantes :

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{N}t\varphi(1,\,\mathrm{N})\,\frac{d.}{dt}\,\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\\
&+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{N}\ \varphi(1,\,\mathrm{N})\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\\
&+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{N}\,\varphi'(1,\,\mathrm{N})\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\\
&-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{N}}^{\infty}\frac{1}{t}\,\chi(ts')\,\varphi''(1,\,s')\,ds'\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.
\end{aligned}\right.$$

Telle est la réduction de l'intégrale (36).

9. L'intégrale (38) à laquelle se ramène l'intégrale (37), ne sera pas plus difficile à obtenir. On aura un résultat de même forme que l'intégrale (65) qu'il faudra multiplier par dt, et intégrer depuis o jusqu'à t. Il suffira donc de faire la même opération sur chacune des intégrales (67).

10. Nous allons maintenant examiner les intégrales dans le cas où l'ébranlement initial aurait été circonscrit dans une certaine portion de l'espace autour de l'origine des coordonnées, et où le temps t serait devenu très grand [*].

Pour introduire cette condition dans le calcul, nous concevrons que les fonctions arbitraires s'évanouissent toutes les fois que les variables se rapporteront à un point situé hors des limites de l'ébranlement primitif. Ainsi $f(x, y, z)$, par exemple, aura une valeur très petite entre ces limites et nulle au-delà.

Si pour savoir quels sont les points de l'espace en mouvement après le temps t, nous prenons les expressions de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, les intégrales de la forme (67) y donneront des intégrales de la forme

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}t\varphi(1, \mathrm{N})\,\frac{d^2}{dt^2}\,\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,\\
&\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}\varphi(1, \mathrm{N})\,\frac{d.}{dt}\,\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,\\
&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}\varphi'(1, \mathrm{N})\,\frac{d.}{dt}\,\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,\\
-\;&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{N}}^{\infty} \frac{1}{t}\frac{d.}{dt}\chi(ts')\,\varphi''(1, s')\,ds'\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,\\
+\;&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{N}}^{\infty} \frac{1}{t^2}\chi(ts')\,\varphi''(1, s')\,ds'\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.
\end{aligned}\right.$$

D'après la remarque du n° **9**, l'intégrale (37) ou (38) donnera des expressions analogues. Il y aura seulement une différentiation de moins par rapport au temps.

---

[*] A proprement parler, c'est la quantité $\mathrm{N}t$ que l'on regarde comme très grande et comparable à une très grande distance r de l'origine à un point (x, y, z). Il sera aisé de s'en apercevoir.

Si nous nous bornons à la partie la plus considérable de ces expressions, à celle qui contient le temps en facteur, nous aurons à considérer seulement des expressions de la forme

$$(69)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}t\,\varphi(1,\mathrm{N})\,\frac{d^2}{dt^2}\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

ou

$$(70)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}t\,\varphi(1,\mathrm{N})\,\frac{d.}{dt}\,\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta;$$

or, d'après l'équation (41), la fonction

$$(71)\qquad \chi(\mathrm{N}t) = f(x-\alpha\mathrm{N}t,\ y-6\mathrm{N}t,\ z-\gamma\mathrm{N}t).$$

Elle n'aura de valeur qu'autant que les quantités $x-\alpha\mathrm{N}t$, $y-6\mathrm{N}t$, $z-\gamma\mathrm{N}t$, considérées comme trois coordonnées λ, μ, ν, seront comprises entre les limites de l'ébranlement primitif; mais après la transformation des λ, μ, ν en ρ, ϖ et θ, les valeurs de ρ, ϖ et θ doivent être comprises entre des limites qui se rapportent à la même partie de l'espace pour que la fonction $\chi(\rho)$ ne soit pas nulle. D'après cela, si pour des valeurs attribuées à ϖ et θ de manière à ce que le rayon vecteur traverse la partie de l'espace où s'est fait l'ébranlement primitif, la quantité $\mathrm{N}t$ ne se trouve pas égale au rayon vecteur ρ d'un point de cette partie de l'espace, l'expression $\chi(\mathrm{N}t)$ aura une valeur nulle; donc l'intégrale (69) sera nulle aussi si la surface dont l'équation est

$$(72)\qquad \rho = \mathrm{N}t$$

ne rencontre pas la partie de l'espace primitivement ébranlée.

Elle n'aura de valeur sensible que pour les éléments correspondants aux points de cette surface, compris dans le lieu de l'ébranlement initial.

Or, d'après la transformation, ρ exprime la distance du point x, y, z, au point λ, μ, ν; donc, réciproquement, pour tous les points de l'espace qui ne seront pas à une distance d'un des points λ, μ, ν, égale à $\mathrm{N}t$, l'élément de l'intégrale relatif aux valeurs correspondantes de ϖ et θ sera nul.

Il suit de là que pour connaître les points de l'espace en mouvement après le temps t, il faut déplacer la surface $\rho = Nt$ parallèlement à elle-même, de manière que l'origine du rayon vecteur ρ se promène dans toute la portion de l'espace où l'ébranlement initial a eu lieu. Il y aura une surface enveloppe extérieure et une surface enveloppe intérieure à la surface $\rho = Nt$, dans ses diverses positions, et les points de l'espace non compris entre ces deux surfaces enveloppes seront en repos, si, d'ailleurs, d'autres intégrales que l'intégrale (69) ne donnent rien pour ces points.

La propagation se fera donc suivant une onde et les dimensions des surfaces limites de cette onde croîtront évidemment avec le temps.

La vitesse de propagation de l'onde sera constante dans chaque direction, du moins tant qu'on ne considérera que l'intégrale (69). Elle changera, au contraire, avec la direction, à cause de la variabilité de N.

On pourra appliquer des raisonnements semblables à toutes les parties des expressions (28); ainsi la propagation du mouvement par une onde n'est pas douteuse.

11. Occupons-nous maintenant des coefficients $\varphi(1, N)$.

La fonction $\varphi(t, s)$ est donnée par l'équation (59),

$$\int \omega \delta \frac{d\sigma}{ds} = \varphi(t, s). \tag{73}$$

Quand le temps t est très grand, un point x, y, z où l'ébranlement est parvenu, est très loin de l'origine des coordonnées. Les valeurs de ϖ et θ diffèrent très peu des valeurs Π et Θ qui se rapportent à la direction du rayon vecteur r mené de l'origine au point x, y, z. Par suite, ω' diffère peu de la valeur Ω, qui est ce que devient ω quand on y remplace ϖ et θ par Π et Θ.

De plus, observons que nous voulons calculer $\varphi(t, s)$ pour y faire ensuite $s = Nt$. En vertu des équations (58), cette valeur répond en général au cas où le plan $u = t$ serait tangent à la surface $s = F(u, v, w)$; car, à cause des équations citées, $\frac{du}{dv}$ et $\frac{du}{dw}$ seraient nuls. Donc il nous suffit de considérer le cas où la surface s un peu différente, donnerait pourtant une section très petite. Les points de contact de cette section seraient très rapprochés les uns des autres [*], et par conséquent Ω varierait très peu pour ces différents points; donc on peut faire sortir Ω de l'intégrale qui se rapporte à la caractéristique δ en lui donnant la valeur qu'il prendrait à la limite $s = \mathrm{N}t$, l'équation (73) deviendra

$$(74) \qquad \varphi(t, s) = \Omega \int \delta \frac{d\sigma}{ds} = \Omega \frac{d\sigma}{ds}. \qquad [**]$$

σ s'évanouit pour $s = \mathrm{N}t$, mais sa différentielle $\frac{d\sigma}{ds}$ ne s'évanouit pas dans la même hypothèse. Il serait facile de faire voir en vertu des équations (58), que c'est, en général, le quotient que l'on obtient en divisant par ds l'aire de l'ellipse caractéristique [***] de la surface $s = \mathrm{F}(u, v, w)$. Quand le plan tangent devient perpendiculaire à la direction de l'axe des u, ou plutôt à la direction du rayon vecteur r qui diffère très peu de la première, le calcul de $\frac{d\sigma}{ds}$ n'offrira donc aucune difficulté, et la valeur de cette quantité s'exprimera au moyen des coefficients différentiels du deuxième ordre de la surface des u, v, w. Soit donc $\frac{d\sigma}{ds} = \psi(t, s)$ à la limite, on aura

$$(75) \qquad \varphi(1, \mathrm{N}) = \Omega \psi(1, \mathrm{N}),$$

et l'intégrale (69) deviendra

$$(76) \qquad \frac{1}{8\pi^2} \Omega t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{N}\psi(1, \mathrm{N}) \frac{d^2}{dt^2} \chi(\mathrm{N}t) \sin \varpi \, d\varpi \, d\theta.$$

On pourrait même écrire $\mathrm{N}\psi(1, \mathrm{N})$ hors des intégrations en y remplaçant ϖ et θ par Π et Θ.

D'après la forme des intégrales (36) et (37) comparées aux intégrales (28), ω représente des quantités telles que $a\mathcal{A}$, $a\mathcal{B}$, etc. Ces quantités sortiront donc des intégrales.

Si maintenant on considère une nappe particulière de la surface s,

---

[*] Ainsi que du point qui répondrait au contact.

[**] Ω devient aussi indépendant de t à cause de l'homogénéité.

La position du point de contact de la surface s avec le plan $u = t$ est indépendante de la direction arbitraire des axes des nouveaux v et w; par suite la valeur de Ω en est aussi indépendante. Il est aisé de s'en assurer.

[***] M. Charles Dupin.

celle qui, par exemple, répond à s' des intégrales (28), pour que les valeurs des parties correspondantes de $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, déduites de ces intégrales ne soient pas nulles, on devra avoir $\rho = \mathrm{N}'t$ en désignant par $\mathrm{N}'t$ ce que nous avions représenté par $\mathrm{N}t$. Comme, en général, s'' et s''' sont différents de s', les valeurs correspondantes $\mathrm{N}''t$, $\mathrm{N}'''t$ différeront sensiblement de $\mathrm{N}'t$, en sorte que les parties des intégrales où entrent s'' et s''' disparaîtront si les parties où entre s' subsistent, et les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ déduites des intégrales (28) seront proportionnelles à a', b', c' qui seront sortis des signes $\int$ en vertu de la réduction exposée précédemment. Par conséquent, la vitesse de vibration aux points x, y, z de l'onde dans la direction déterminée par Π et Θ sera parallèle à la droite déterminée par les cosinus a', b', c', quand on a remplacé ϖ et θ par Π et Θ. Pour la même direction déterminée par Π et Θ, la nappe s'' de la surface s donnera aussi un mouvement vibratoire pour d'autres points x, y, z donnés par la rencontre de la surface $\rho = \mathrm{N}''t$ avec le rayon vecteur indéfini mené dans la direction Π, Θ; et les vibrations seront parallèles à la direction constante a'', b'', c''; on raisonnera de même pour s''' et a''', b''', c'''. Ainsi l'onde aura trois nappes. En général les points situés sur un même rayon vecteur auront des vitesses de vibration parallèles entre elles dans la même nappe, et parallèles respectivement pour les trois nappes à trois directions a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c'''; fonctions de la direction du rayon vecteur. C'est ainsi que le mouvement se trouve polarisé quand le temps est devenu considérable par rapport aux dimensions de la partie de l'espace dans laquelle le mouvement initial a eu lieu.

12. Les résultats ne sont pas toujours aussi simples. Il peut se faire que la surface des u, v, w devienne plusieurs fois tangente au plan $u = t$ pendant que s passe de o à $+\infty$. Alors la fonction σ changera plusieurs fois de forme sans cesser d'être continue. Mais on doit la différentier par rapport à s; sa différentielle ne sera pas continue; il faudra donc partager l'intégrale relative à s toutes les fois que cette circonstance se présentera. Ainsi dans l'expression (62), au lieu d'une seule somme de la forme $\int_{\mathrm{N}t}^{\infty}$, on aura, par rapport à s, plusieurs sommes telles que $\int_{N_1 t}^{N_2 t} + \int_{N_2 t}^{N_3 t} + \int_{N_3 t}^{\infty}$ et après les intégrations, la partie du résultat qui se rapportera à la limite supérieure de l'une, ne sera pas détruite par la partie qui viendra de la limite inférieure de la suivante, à cause de la discontinuité. On aura donc pour $N_1 t$, $N_2 t\ldots$, des résultats semblables à ceux qu'on a trouvés pour Nt. Il peut donc arriver que l'onde ait plus de nappes que la surface des u, v, w.

13. Lorsque le temps t est devenu très considérable, les points de l'espace ébranlés sont sur l'une des surfaces comprises dans l'équation $\rho = Nt$ dans laquelle le rayon vecteur ρ part du point dont les coordonnées sont λ, μ, ν. Nous allons chercher l'équation de ces surfaces par rapport aux coordonnées primitives.

Reprenons les équations (39), la transformation (40), les conditions (58) et la relation qui en résulte entre s et t; joignons-y l'équation (72); accentuons les nouveaux u, v, w pour les distinguer des anciens et remplaçons u' par t; nous aurons

$$(77)\qquad \begin{cases} x - \lambda = \alpha\rho, \\ y - \mu = \beta\rho, \\ z - \nu = \gamma\rho, \end{cases}$$

$$(78)\qquad \begin{cases} u = \alpha t + \alpha' v' + \alpha'' w', \\ v = \beta t + \beta' v' + \beta'' w', \\ w = \gamma t + \gamma' v' + \gamma'' w'; \end{cases}$$

$$(79)\qquad \frac{ds}{dv'} = 0, \quad \frac{ds}{dw'} = 0, \quad s = N't, \quad \rho = Nt.$$

Nous aurons

$$(80)\qquad t\frac{ds}{dt} + v'\frac{ds}{dv'} + w'\frac{ds}{dw'} = s = Nt, \qquad \frac{ds}{dt} = N.$$

$$(81)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = \alpha\dfrac{ds}{du} + \beta\dfrac{ds}{dv} + \gamma\dfrac{ds}{dw} = N, \\ \dfrac{ds}{dv'} = \alpha'\dfrac{ds}{du} + \beta'\dfrac{ds}{dv} + \gamma'\dfrac{ds}{dw} = 0, \\ \dfrac{ds}{dw'} = \alpha''\dfrac{ds}{du} + \beta''\dfrac{ds}{dv} + \gamma''\dfrac{ds}{dw} = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie les trois dernières équations respectivement par α, β, γ, puis par α', β', γ', par α'', β'', γ'', et qu'on les ajoute chaque fois, il viendra

$$\frac{ds}{du} = \alpha N, \quad \frac{ds}{dv} = \beta N, \quad \frac{ds}{dw} = \gamma N. \tag{82}$$

Si l'on met pour α, β, γ, leurs valeurs tirées des équations (77), et si l'on a égard à la dernière des équations (79), on aura les équations

$$t\frac{ds}{du} = x - \lambda, \quad t\frac{ds}{dv} = y - \mu, \quad t\frac{ds}{dw} = z - \nu, \tag{83}$$

auxquelles on pourra joindre l'équation

$$u(x-\lambda) + v(y-\mu) + w(z-\nu) = st, \tag{84}$$

qui en est la conséquence, et que l'on obtient en ajoutant les équations (83) après les avoir multipliées respectivement par u, v, w. Pour avoir le lieu géométrique du point x, y, z en regardant λ, μ, ν comme constants, il suffit d'éliminer u, v, w entre les équations (84) et (85). Si l'on suppose de grandes valeurs au temps t et aux coordonnées x, y, z, et que l'on néglige λ, μ, ν, on aura par l'élimination, une équation en x, y, z rapportée à l'origine primitive des axes coordonnés. Ce sera, dans l'onde, comme une surface moyenne de laquelle les surfaces limites extérieure et intérieure différeront très peu. Elle indiquera donc la forme générale de l'onde.

14. Il y a une autre manière d'amener la réduction de l'intégrale (36). Après lui avoir fait prendre la forme (42), on peut transformer les u, v, w en coordonnées polaires, en posant

$$\left\{\begin{aligned} u &= \iota\cos p \\ v &= \iota\sin p\cos q \\ w &= \iota\sin p\,\sin q \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad s = \iota n, \quad \omega = \iota m; \tag{85}$$

on trouvera que l'intégrale (42) devient

$$\frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{\iota\rho\cos p\sqrt{-1}}\, m\cos(\iota n t)\,\chi(\rho)\,\rho^2\iota^2\sin p\sin\varpi\, d\iota\, dp\, dq\, d\rho\, d\varpi\, d\theta. \tag{86}$$

ou

$$-\frac{1}{8\pi^3}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{\iota\rho\cos p\sqrt{-1}}\, m\cos(\iota n t)\,\chi(\rho)\,\frac{\rho^2}{n^2}\sin\varpi\, d\iota\, dp\, dq\, d\rho\, d\varpi\, d\theta, \tag{87}$$

en la traitant comme l'intégrale (46) on peut la ramener à la somme des deux intégrales suivantes :

$$(88)\quad -\frac{1}{16\pi^3}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\cos\iota(\rho\cos p-nt)\frac{m\varrho^2}{n^2}\chi(\rho)\sin p\sin\varpi\, d\iota\, dp\, dq\, d\rho\, d\varpi\, d\theta,$$

$$(89)\quad -\frac{1}{16\pi^3}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\cos\iota(\rho\cos p+nt)\frac{m\varrho^2}{n^2}\chi(\rho)\sin p\sin\varpi\, d\iota\, dp\, dq\, d\rho\, d\varpi\, d\theta.$$

Nous négligeons la partie imaginaire qui renfermerait le facteur $\frac{m}{n^2}\sin(\iota\rho\cos p)\cos(\iota nt)$, parce que ce facteur, entre les limites de l'intégration, reprend la même valeur au signe près quand on y remplace p par $\pi-p$ et q par $q\pm\pi$. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, les fonctions s et ω ne changent pas quand on y change à la fois le signe de u, v, w; donc les fonctions n et m ne changeront pas non plus quand on y remplacera $\cos p$, $\sin p\cos q$, $\sin p\sin q$ par $-\cos p$, $-\sin p\cos q$, $-\sin p\sin q$, tandis que le facteur $\sin(\iota\rho\cos p)$ changera de signe sans changer de valeur. Donc les éléments imaginaires se détruiront deux à deux.

L'intégrale

$$(90)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos\iota(\rho\cos p-nt)\frac{\varrho^2}{n^2}\chi(\rho)\,d\iota\,d\rho,$$

se réduit à

$$(91)\qquad \frac{t^2}{\cos^3 p}\chi\left(\frac{nt}{\cos p}\right),$$

pour toutes les valeurs positives de $\cos p$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de p comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$. Elle est nulle pour les valeurs de p comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

Pour le démontrer, on peut poser pour un instant $\rho\cos p=\rho'$, ce qui donne $\rho=\frac{\varrho'}{\cos p}$, $d\rho=\frac{d\varrho'}{\cos p}$, et ensuite faire l'intégration par la méthode de De Flers, comme pour l'intégrale (49), ou, si on l'aime mieux, on peut, comme M. Poisson en a donné l'exemple, introduire en facteur une exponentielle $e^{-g\iota}$, dans laquelle g désigne une quantité infiniment petite que l'on fera nulle après les intégrations. Cette exponentielle doit même, à la rigueur, être introduite dans les intégrales (28). Elle serait alors sous la forme $e^{-g\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$. Il convient de faire voir que les intégrales (28) ainsi modifiées ne cessent pas de remplir toutes les conditions de la question.

Il est visible d'abord qu'elles satisfont toujours aux équations différentielles. Si pour vérifier aussi les conditions initiales on fait $t = 0$, la valeur de ξ par exemple, devient d'après les remarques du n° **6**,

$$(92)\quad \xi = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-g\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\, e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}} f_1(\lambda,\mu,\nu)\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Par la transformation déjà indiquée, en observant que les imaginaires se détruisent, on trouve

$$(93)\quad \xi = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-g\tau}\cos(\tau\rho\cos p)\,\tau^2\rho^2 f_1(x-\alpha\rho,\, y-\beta\rho,\, z-\gamma\rho)\, d\tau\, d\rho \sin p\, dp\, dq \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta;$$

or

$$\int_0^{\pi} \cos(\tau\rho\cos p)\,\tau\rho\, \sin p\, dp = 2\sin(\tau\rho).$$

L'intégration par partie donne, à cause de la petitesse de g,

$$(94)\qquad \int_0^{\infty} e^{-g\tau}\sin(\tau\rho)\,\tau\rho\, d\tau = \int_0^{\infty} e^{-g\tau}\cos(\tau\rho)\, d\tau = \frac{g}{g^2+\rho^2}.$$

Cette quantité n'a de valeur sensible qu'autant que ρ est très petit; on peut donc négliger les termes $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\gamma\rho$, dans la fonction f_1. En effectuant toutes les intégrations, on a

$$\xi = f_1(x, y, z);$$

ainsi l'introduction de l'exponentielle n'a aucun inconvénient.

Cela posé, d'après la valeur de l'intégrale (90), la première des intégrales (88) et (89) devient

$$(95)\quad -\frac{1}{16\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 m\,\chi\left(\frac{nt}{\cos p}\right)\frac{\sin p\, dp}{\cos^3 p}\, dq \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

la seconde deviendrait

$$(96)\quad +\frac{1}{16\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^2 m\,\chi\left(\frac{-nt}{\cos p}\right)\frac{\sin p\, dp}{\cos^3 p}\, dq \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta;$$

or $$s = \mathrm{F}(u, v, w);$$

donc $$n = \mathrm{F}(\cos p,\ \sin p\cos q,\ \sin p\sin q);$$

par suite, pour $\cos p > 0$,

$$(97) \qquad \frac{nt}{\cos p} = \mathrm{F}(t, t \operatorname{tang} p \cos q, t \operatorname{tang} p \sin q).$$

Soit $t \operatorname{tang} p = \mathrm{R}$, on en tire $\frac{t dp}{\cos^2 p} = d\mathrm{R}$, et, en désignant pour abréger par s le deuxième membre de l'équation (97), et par ω ce que devient m, on aura, au lieu de l'intégrale (95),

$$(98) \qquad -\frac{1}{16\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\omega\chi(s)\mathrm{R}\, d\mathrm{R}\, dq \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.$$

Si l'on pose $\qquad \mathrm{R}\cos q = w, \quad \mathrm{R}\sin q = v,$

on aura

$$(99) \qquad -\frac{1}{16\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\chi(s)\, dv\, dw \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.$$

Quant à l'intégrale (96), on observera que

$$\frac{nt}{-\cos p} = \mathrm{F}(-t, -t \operatorname{tang} p \cos q, -t \operatorname{tang} p \sin q),$$

de même comme ω est une fonction homogène de degré nul,

$$\omega = \mathrm{f}(u, v, w)$$

donne $\qquad m = \mathrm{f}(\cos p, \sin p \cos q, \sin p \sin q),$

qui conduit à $\qquad m = \mathrm{f}(-1, -\operatorname{tang} p \cos q, -\operatorname{tang} p \sin q).$

Si l'on pose $\qquad -t \operatorname{tang} p = \mathrm{R},$

on aura

$$\frac{nt}{-\cos p} = \mathrm{F}(-t, \mathrm{R}\cos q, \mathrm{R}\sin q), \quad m = \mathrm{f}(-1, \mathrm{R}\cos q, \mathrm{R}\sin q), \frac{t dp}{\cos^2 p} = -d\mathrm{R}.$$

Si l'on fait $\qquad \mathrm{R}\cos q = v,\ \mathrm{R}\sin q = w,\ \mathrm{R}\, d\mathrm{R}\, dq = dv\, dw,$

on aura une intégrale pareille à l'intégrale (99), excepté que t sera remplacé par $-t$ dans ω et s. Mais on pourra changer v en $-v$ et w en $-w$ à cause des limites $-\infty$ et $+\infty$ de ces variables. Alors on aura $\omega = \mathrm{f}(-t, -v, -w)$, $s = \mathrm{F}(-t, -v, -w)$; mais s d'après son origine est une fonction de polynomes homogènes du second degré en u, v, w, qui ne change pas quand on remplace u, v, w par $-u$,

$-v$, $-w$. Il en est de même de ω qui représente des quantités de la forme $a\mathcal{A}$, $a\mathcal{B}$..., d'après la comparaison de l'intégrale (36) avec les diverses parties des formules (28). Donc $\mathrm{F}(-t, -v, -w) = \mathrm{F}(t, v, w)$ et $\mathrm{f}(-t, -v, -w) = \mathrm{f}(t, v, w)$, ce qui ramène complétement l'intégrale que nous considérons à la forme de l'intégrale (99) qui par conséquent sera doublée.

On aura donc, toutes réductions faites, l'intégrale

$$(100) \qquad -\frac{1}{8\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\chi(s)\, dv\, dw \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

au lieu de l'intégrale (87), comme on l'a déjà trouvé au n° **8**, formule (57).

15. Quelle que soit celle des deux méthodes que l'on adopte, on peut mettre sous une forme plus simple la fonction $\chi(\rho)$ de l'équation (41). Pour y parvenir, considérons dans $f(\lambda, \mu, \nu)$ les variables comme des coordonnées rectangulaires, et transformons-les d'abord en d'autres coordonnées rectangulaires λ', μ', ν', en prenant pour axes des λ' la droite qui va de l'origine O au point $\mathrm{M}(x, y, z)$, et deux autres droites perpendiculaires entre elles et à celle-là, menées par l'origine O. On aura une autre fonction que je désignerai cependant par $f(\lambda', \mu', \nu')$. Les variables λ', μ', ν' pourront se rapporter à tous les points de la portion de l'espace primitivement ébranlée. D'une autre part, imaginons que l'on transforme les coordonnées ϖ et θ, et qu'on les remplace par d'autres coordonnées polaires que je désignerai encore par ϖ et θ. Le nouveau ϖ sera maintenant l'angle que fait le rayon vecteur ρ avec l'axe mené du point M au point O, et le nouveau θ sera l'angle que fait le plan mené par cet axe et par le rayon vecteur avec un plan quelconque passant par MO. Il est facile d'exprimer λ', μ', ν' en fonctions de ϖ et θ. En effet, ϖ est maintenant très petit si la distance MO est très grande. Désignons cette distance par r. λ' est égal à r diminuée de la projection de ρ sur r, et à cause de la petitesse de ϖ, cette projection ne diffère de ρ que d'un infiniment petit du deuxième ordre par rapport à ϖ. Donc on aura $\lambda' = r - \rho$, de même la perpendiculaire abaissée du point (λ', μ', ν') sur le rayon vecteur r, aura pour expression ϖr. On aura donc $\sqrt{\mu'^2 + \nu'^2} = \varpi r$. On pourra, aux coordonnées μ' et ν', substituer ce rayon vecteur dont la valeur est ϖr et l'angle qu'il fait avec un plan mené par OM. On peut même prendre le nouveau θ pour cet angle, et ainsi $f(\lambda', \mu', \nu')$ sera remplacé par une autre fonction

$$f(r-\rho,\ \varpi r,\ \theta), \tag{101}$$

qui sera le $\chi(\rho)$ de nos formules.

On aura donc aussi

$$\chi(s) = f(r-s,\ \varpi r,\ \theta). \tag{102}$$

16. On pourra, à l'aide de ces remarques, présenter l'intégrale (62) sous la forme

$$-\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{Nt}^{\infty} f(r-s,\ \varpi r,\ \theta)\varphi(t,s)\,ds.\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

on écrit $\varpi d\varpi$ à cause de la petitesse de ϖ.

Si l'on pose $r - s = s'$, $\varpi r = r'$, on aura

$$-\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi r}\int_{-\infty}^{r-Nt} f(s', r', \theta)\varphi(t, r-s')ds'\frac{r'dr'}{r^2}\,d\theta\ ;$$

la fonction $f(s', r', \theta)$ n'aura de valeur sensible que pour les valeurs de s', r', θ, qui se rapporteront à des points compris dans la partie de l'espace primitivement ébranlée. Si $r - Nt$ n'était pas compris entre les limites de s', on pourrait écrire pour l'intégration par rapport à s' des limites indépendantes du temps. En effectuant la double différentiation on aurait une seule intégrale, et comme $\frac{d^2\varphi(t, r-s')}{dt^2}$ serait une fonction homogène par rapport à t et à $r-s'$ de l'ordre -1. Cette intégrale, quand le temps serait très grand, deviendrait très petite par rapport aux quantités que nous avons conservées : on devrait donc la négliger. On voit donc que l'on parviendrait encore par cette route aux conséquences déjà trouvées.

17. On peut, si l'on veut, développer, dans l'expression (102), s suivant les puissances ascendantes de ϖ, et négliger tout ce qui sera d'un degré plus élevé que la première puissance. Il n'en résultera pas d'erreur sensible, car ϖ est moindre qu'une fraction de la forme $\frac{\varepsilon}{r}$ dans laquelle ε désigne l'une des dimensions du lieu de l'ébranlement primitif. Si r est très grand, cette fraction est très petite ; ϖr peut cependant être comparable à ε et ne peut être négligé puisqu'il est de l'ordre des quantités qui donnent à la fonction f toutes ses valeurs. Mais toute quantité très petite par rapport à ε, et à plus forte raison, toute quantité très petite par rapport à ϖr peut être négligée, si l'on admet la continuité de la fonction f et de ceux de ses coefficients différentiels que l'on a à considérer.

Il faut que s soit du même ordre de grandeur que r. Dans le développement de s par rapport à ϖ, à cause de l'homogénéité, les coefficients des puissances de ϖ seront de même ordre que s en général. Un terme de la forme $k\varpi^{1+i} = k\varpi.\varpi^i$ sera de même ordre que $r\varpi.\varpi^i$, et par conséquent, négligeable.

En général, on pourra réduire s à la forme $s + s'\varpi$; l'expression de Nt prendra la forme $Nt + N't\varpi$. $\varphi(1, N)$ gardera la forme $\varphi(1, N)$, mais N (comme N′) sera maintenant indépendant de ϖ, et par suite de θ, car partout où entre ϖ, on a des quantités de la forme $\sin\varpi\cos\theta$, $\sin\varpi\sin\theta$, ou plutôt $\varpi\cos\theta$, $\varpi\sin\theta$, à cause de la nature de la transformation supposée. On peut même remarquer que $r - Nt - N't\varpi = \varepsilon$ (ε désignant toujours une quantité comparable à l'une des dimensions de l'ébranlement primitif). On en tire $t = \frac{r}{N} - \frac{N'r\varpi}{N^2} - \frac{\varepsilon}{N}$. Donc on peut écrire approximativement $\frac{r}{N}$ au lieu de t dans le terme $N't\varpi$, et la quantité $Nt + N't\varpi$ sera remplacée à très peu près par $Nt + \frac{N'r\varpi}{N}$. Toutes ces notions nous seront utiles plus tard; mais nous ne nous arrêterons pas davantage à ces diverses transformations.

18. Ce serait ici le lieu de montrer comment la propagation sphérique dans un milieu homogène non cristallisé est un cas particulier de notre solution. Le succès de la méthode employée par M. Poisson, à laquelle on peut remener encore le cas où l'on aurait une valeur de s de la forme $Au^2 + Bv^2 + Cw^2$ ou même de la forme

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Dvw + Ewu + Fuv,$$

tient à une propriété des surfaces du deuxième ordre. Si l'on a une surface du deuxième ordre toujours semblable à elle-même parce que son équation est homogène et ne renferme qu'un paramètre variable, la différentielle de l'aire d'une section plane prise par rapport à ce paramètre est constante tant que le plan sécant reste parallèle à lui-même. Cette propriété est facile à démontrer.

Il y a aussi des conséquences particulières curieuses dans les cas de décomposition de l'équation des *u*, *v*, *w*.

Il faudra surtout examiner l'influence des singularités de la surface des *u*, *v*, *w*. Cet examen se rattache davantage à la généralité de la question; par exemple, si le plan $u = t$ a avec la surface un contact du troisième ordre ou un contact du premier suivant une courbe, la fonction $\varphi(1, N)$ devient infinie. Le développement donné dans la formule (67) ne peut plus servir. Nous ferons voir comment on peut y suppléer pour traiter ces diverses singularités dont nous avons découvert les conséquences et d'autres de même genre, qui ne seront pas plus difficiles à traiter. Ce sera l'objet d'un prochain Mémoire.

Nous nous contenterons aujourd'hui d'avoir démontré les principes généraux que l'on peut résumer de la manière suivante :

1°. Dans un milieu élastique, homogène, indéfini, cristallisé d'une manière quelconque, le mouvement produit par un ébranlement central se propage par une onde plus ou moins compliquée dans sa forme.

2°. Pour chaque nappe de l'onde, la vitesse de propagation est constante dans une même direction, variable avec la direction suivant une loi qui dépend de la forme de l'onde.

3°. Pour une même direction, les vitesses de vibration sont constamment parallèles entre elles dans une même nappe de l'onde pendant la durée du mouvement, et parallèles à des droites différentes pour les différentes nappes, ce qui constitue une véritable polarisation du mouvement.

NOTA. Ce Mémoire est imprimé tel qu'il a été présenté à l'Académie des Sciences de l'Institut. On reconnaîtra sans peine la possibilité de simplifier quelques parties du calcul et de supprimer quelques longueurs.

Dans un second Mémoire [*], nous avons appliqué les formules générales du premier au cas traité par M. Poisson [**]; nous avons retrouvé, avec une grande rapidité, les formules obtenues par ce grand géomètre, et les conséquences remarquables qu'il en a déduites.

Nous publierons bientôt les autres développements indiqués dans le premier Mémoire, nous expliquerons les propriétés qui en résultent pour les différents cristaux, et surtout pour les cristaux à un axe. On verra ainsi avec quelle facilité la forme générale de nos calculs se prête aux applications particulières.

[*] Voyez le Rapport de M. Sturm, *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de l'Institut*, t. VII, p. 1143.

[**] *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut*, tome X, page 578.