JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Mémoire sur les coordonnées curvilignes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 313-347.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__313_0>

MÉMOIRE

SUR LES COORDONNÉES CURVILIGNES;

PAR G. LAMÉ.

Dans un travail publié par le *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai présenté les formules générales qui peuvent servir à transformer des équations aux différences partielles, en coordonnées curvilignes; mais comme le but que je me proposais alors était purement analytique, j'avais négligé d'interpréter géométriquement ces diverses formules. Cette interprétation complète est le sujet principal de ce nouveau Mémoire. Je vais essayer d'en donner ici le résumé succinct.

Une fonction de trois coordonnées linéaires, égalée à une constante, représente une infinité de surfaces de la même famille, qui ne diffèrent les unes des autres que par la valeur numérique de la constante, qu'on peut désigner sous le nom de *paramètre*. J'appelle *surfaces conjuguées orthogonales*, trois systèmes de surfaces semblables coexistant dans l'espace, et ayant entre eux cette relation de position, qu'une surface d'un des systèmes coupe à angle droit toutes les surfaces appartenant aux deux autres. L'ensemble de ces surfaces offre un genre particulier de coordonnées, car un point sera déterminé dans l'espace, si l'on connaît les trois surfaces conjuguées qui se coupent en ce point, ou les valeurs numériques des trois paramètres qui particularisent ces surfaces.

Le nombre de ces coordonnées curvilignes est sans doute illimité; mais la condition d'être orthogonales établit des relations constantes entre les éléments des surfaces conjuguées, dont la connaissance est nécessaire pour transformer et simplifier les formules analytiques exprimées dans chaque genre de coordonnées. Parmi ces relations, il en est une qui indique que les intersections des surfaces conjuguées ne sont autres que leurs lignes de courbure. Cette propriété remarquable a été démontrée pour la première fois sur les surfaces orthogonales du second degré par M. Binet, et ensuite d'une manière générale par M. Ch. Dupin. Quant aux autres relations, les seules qui puissent servir à la transformation des coordonnées, elles expriment les lois que suivent les courbures des surfaces conjuguées.

La courbure d'une ligne ou d'une surface en un point et dans un plan déterminé, étant totalement définie par la fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est le rayon du cercle osculateur, on peut appeler cette fraction *coefficient de courbure*, ou simplement *courbure*. D'après cela, à chaque point de l'espace, découpé par un système de surfaces orthogonales, correspondent six courbures, en général différentes, appartenant deux à deux aux trois surfaces conjuguées qui se coupent en ce point. Les trois lignes d'intersection de ces surfaces forment en quelque sorte trois axes courbes dont le point considéré est l'origine.

Chacune des surfaces coordonnées a pour ligne de courbure les deux axes qu'elle contient, et les centres de ses deux courbures sont situés sur la tangente au troisième axe. D'un autre côté, chaque axe étant une ligne de courbure pour chacune des deux surfaces coordonnées dont il est l'intersection, cet axe doit être considéré comme offrant deux courbures différentes mesurées dans les plans tangents à ces surfaces. Les six courbures réunies des trois axes sont d'ailleurs les mêmes que celles des surfaces coordonnées.

Les variations que les six courbures éprouvent lorsqu'on passe d'un point à un autre sur les axes courbes, sont soumises à des lois très simples. Pour les énoncer, quelques définitions sont nécessaires. J'emploie l'expression de *courbures conjuguées en axe ou en surface*, pour désigner les deux courbures d'un même axe ou d'une même surface coordonnée. J'appelle *plan d'une courbure*, celui de son cercle osculateur. Enfin je donne simplement le nom de *variation* d'une quantité, *suivant une certaine ligne*, à la limite du rapport de l'accroissement de cette quantité à l'arc parcouru sur la ligne.

D'après ces conventions, les lois qui régissent les six courbures expriment d'une part que *la variation d'une courbure, suivant l'axe normal à son plan, est égal au produit de sa conjuguée en axe, par son excès sur sa conjuguée en surface*, et d'autre part, que *le produit des deux courbures d'une même surface, augmenté de la somme des carrés* *de leurs conjuguées en axe est égale à la somme des variations de ces deux dernières courbures, suivant leurs arcs réciproques.* Ces lois principales conduisent à d'autres lois secondaires.

La classe des surfaces isothermes méritait d'être étudiée particulièrement. Lorsque les trois systèmes conjugués appartiennent à cette classe, *les six rayons de courbure, en chaque point de l'espace, ont des grandeurs telles, que le produit de trois d'entre eux, pris dans un certain ordre, est égal au produit des trois autres.* Cette loi, que j'avais trouvée pour les surfaces isothermes du second degré fait donc partie de la définition géométrique de tous les systèmes de surfaces orthogonales isothermes.

Ce Mémoire se compose de quatre parties. La première reproduit toutes les formules de transformation citées dans mon ancien travail, et un grand nombre d'autres dont j'ai reconnu l'utilité; elles sont ici groupées suivant un ordre méthodique, et de manière à en faciliter l'emploi. La seconde partie contient l'interprétation géométrique de ces formules, ou la démonstration des théorèmes qui viennent d'être énoncés. La troisième partie considère plusieurs systèmes particuliers de surfaces orthogonales, tant dans le but de vérifier les formules et les propriétés générales, qu'afin de donner une idée exacte du grand nombre de coordonnées entre lesquelles on peut choisir, pour atteindre un but spécial. Enfin la quatrième partie, qui formera un Mémoire séparé, transforme en coordonnées curvilignes les équations de l'équilibre d'élasticité des corps solides homogènes; cette application était nécessaire pour indiquer complétement l'usage des formules établies.

PREMIÈRE PARTIE.

Formules de transformation.

§ I.

Lorsqu'un système de surfaces est donné par l'équation générale $\rho = f(x, y, z)$, le paramètre ρ a, pour chaque surface individuelle, une valeur numérique indépendante des axes rectangulaires auxquels la surface est rapportée. En outre, les expressions

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2},\quad \left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}\right),$$

composées des coefficients différentiels du premier et du second ordre de la fonction ρ, conservent les mêmes valeurs numériques pour chaque point d'une des surfaces proposées, quels que soient les axes coordonnés. J'appellerai ces expressions les paramètres différentiels du premier et du second ordre de la surface ou de la fonction ρ; je désignerai le second par le symbole $\Delta_2\rho$, et le premier, à cause de sa fréquence dans les calculs qui vont suivre, par la simple lettre h; ainsi l'on aura

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2}=h,\qquad \frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}=\Delta_2\rho.$$

Par exemple, si les surfaces proposées formaient un système de surfaces isothermes, la fonction ρ devrait vérifier une équation de la forme

$$\left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}\right)-\left[\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]f(\rho)=0,$$

qui, d'après la notation introduite, pourra s'écrire ainsi :

$$\Delta_2\rho - h^2.f(\rho),\qquad \text{ou}\qquad \frac{\Delta_2\rho}{h^2}=\mathrm{f}(\rho).$$

Ainsi l'on pourra dire que pour les surfaces isothermes, le rapport du paramètre différentiel du second ordre, au carré du paramètre différentiel du premier, est constant sur chacune de ces surfaces.

§ II.

Il importe de remarquer qu'une même famille de surfaces pourrait être représentée par une infinité d'équations différentes, entre les mêmes coordonnées x, y, z. Car si le paramètre ρ est constant sur chaque surface individuelle, une fonction quelconque de ce paramètre le sera pareillement; et si l'on pose $\varepsilon = \mathrm{F}(\rho) = \mathrm{F}[f(x, y, z)]$, cette nouvelle équation, au paramètre ε, représente les mêmes surfaces, quelle que soit la forme de la fonction F.

Lorsqu'on change ainsi de paramètre intégral pour définir la même famille de surfaces, les valeurs numériques des deux paramètres différentiels éprouvent aussi pour chaque point des modifications correspondantes. Mais il existe entre leurs rapports et ceux de leurs différentielles, des relations constantes qui, comme le principe de l'homogénéité, servent de guide dans les calculs.

En effet, si l'on désigne par η et $\Delta_2\varepsilon$ les deux nouveaux paramètres différentiels et les deux fonctions $\frac{dF}{d\rho}$ et $\frac{d^2F}{d\rho^2}$ par F′ et F″, on aura successivement

$$\varepsilon = F, \qquad d\varepsilon = F'.d\rho, \qquad \eta = F'.h;$$

$$\frac{d\eta}{d\rho} = F'.\frac{dh}{d\rho} + F''.h, \quad \Delta_2\varepsilon = F'\Delta_2\rho + F''.h^2;$$

d'où il est aisé de conclure, par l'élimination de F′ et F″,

$$\frac{d\varepsilon}{\eta} = \frac{d\rho}{h}, \qquad \frac{d\eta}{d\varepsilon} - \frac{\Delta_2\varepsilon}{\eta} = \frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2\rho}{h}.$$

D'ailleurs, on verra ci-après que le rapport $\frac{d\rho}{h}$ est la distance normale de deux surfaces consécutives, et plus loin, que la différence $\left(\frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2\rho}{h}\right)$ est égale à la somme des deux courbures de la surface individuelle qui passe au point que l'on considère; ces deux expressions doivent donc conserver les mêmes formes et les mêmes valeurs numériques, en chaque point de l'espace, dans tous les changements qu'on peut faire subir au paramètre intégral, pour désigner la même famille de surfaces; et les deux relations précédentes ne font qu'exprimer cette constance de forme et de valeur.

Il suit de l'équation $\frac{d\varepsilon}{\eta} = \frac{d\rho}{h}$, que si dans une fonction φ de ρ et d'autres variables on passe du paramètre ρ à celui ε, on aura $\eta\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = h\frac{d\varphi}{d\rho}$. Il faut aussi remarquer que dans l'équation $\eta = F'.h$, les fonctions η et h peuvent varier d'un point à l'autre sur la même surface, tandis que $F'(\rho)$

reste constant; ainsi, dans ce genre de variation on aura $\delta\eta = F'.\delta h$; d'où l'on conclut, par l'élimination de F', $\frac{\delta\eta}{\eta} = \frac{\delta h}{h}$.

A l'aide de ces diverses conséquences, on pourra facilement vérifier l'homogénéité de toutes les formules établies dans cette première partie, ces formules devant nécessairement conserver les mêmes formes, lorsqu'on change les paramètres des surfaces coordonnées.

§ III.

Trois systèmes de surfaces représentées par les équations

$$(1)\qquad f(x, y, z) = \rho, \quad f_1(x, y, z) = \rho_1, \quad f_2(x, y, z) = \rho_2,$$

partagent l'espace en une infinité de parallélépipèdes rectangles infiniment petits, il s'agit de trouver les relations qui doivent exister entre leurs paramètres.

On a d'abord entre leurs coefficients différentiels du premier ordre les trois équations suivantes, qui expriment que ces surfaces se coupent orthogonalement :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dz} = 0,\\ &\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dy} + \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dz} = 0,\\ &\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dz} = 0. \end{aligned}\right.$$

D'où il suit que si l'on représente par h, h_1, h_2, leurs paramètres différentiels du premier ordre, ou si l'on pose

$$(2\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 = h^2,\\ &\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2 = h_1^2,\\ &\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2 = h_2^2, \end{aligned}\right.$$

on aura pareillement les six équations transformées :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 = 1,\\
&\frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2 = 1,\\
&\frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2 = 1,\\
&\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho}{dy} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho_2}{dy} = 0,\\
&\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_1}{dz} + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho_2}{dz} = 0,\\
&\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho_2}{dx} = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

et les neuf équations suivantes :

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\text{1}^{\text{re}}\text{ case}\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dx} &= \frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dz}\right),\\
\frac{d\rho}{dy} &= \frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dx}\right),\\
\frac{d\rho}{dz} &= \frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dx} - \frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dy}\right);
\end{aligned}\right.\\[1ex]
&\text{2}^{\text{e}}\text{ case}\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\rho_1}{dx} &= \frac{h_1}{h_2 h}\left(\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dy} - \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dz}\right),\\
\frac{d\rho_1}{dy} &= \frac{h_1}{h_2 h}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dx}\right),\\
\frac{d\rho_1}{dz} &= \frac{h_1}{h_2 h}\left(\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dx} - \frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dy}\right);
\end{aligned}\right.\\[1ex]
&\text{3}^{\text{e}}\text{ case}\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\rho_2}{dx} &= \frac{h_2}{h h_1}\left(\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dy} - \frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dz}\right),\\
\frac{d\rho_2}{dy} &= \frac{h_2}{h h_1}\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dz} - \frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dx}\right),\\
\frac{d\rho_2}{dz} &= \frac{h_2}{h h_1}\left(\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dx} - \frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dy}\right).
\end{aligned}\right.
\end{aligned}
\right.
$$

§ IV.

Si l'on déduisait des équations (1) les valeurs de x, y, z, en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, et qu'on les substituât dans

$$h,\ h_1,\ h_2;\quad \frac{d\rho}{dx},\ \frac{d\rho}{dy},\ \frac{d\rho}{dz};\quad \frac{d\rho_1}{dx},\ \frac{d\rho_1}{dy},\ \frac{d\rho_1}{dz};\quad \frac{d\rho_2}{dx},\ \frac{d\rho_2}{dy},\ \frac{d\rho_2}{dz};$$

on n'aurait plus à considérer que des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2. Si donc on désigne par ds, ds_1, ds_2, les premiers éléments des normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, sur lesquels un seul des trois paramètres varie, on aura évidemment

$$\frac{dx}{d\rho}\,d\rho = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}\,ds,\qquad \frac{dy}{d\rho}\,d\rho = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy}\,ds,\qquad \frac{dz}{d\rho}\,d\rho = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz}\,ds;$$

d'où, multipliant respectivement ces équations par dx, dy, dz, les ajoutant, observant que $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, et que

$$\frac{d\rho}{dx}\,dx + \frac{d\rho}{dy}\,dy + \frac{d\rho}{dz}\,dz = d\rho,$$

on conclut $ds = \frac{d\rho}{h}$. On démontre de même que $ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}$, $ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2}$; par suite, les équations précédentes se simplifient, et l'on a le groupe suivant :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dx} &= h^2\frac{dx}{d\rho}, & \frac{d\rho}{dy} &= h^2\frac{dy}{d\rho}, & \frac{d\rho}{dz} &= h^2\frac{dz}{d\rho},\\
\frac{d\rho_1}{dx} &= h_1^2\frac{dx}{d\rho_1}, & \frac{d\rho_1}{dy} &= h_1^2\frac{dy}{d\rho_1}, & \frac{d\rho_1}{dz} &= h_1^2\frac{dz}{d\rho_1},\\
\frac{d\rho_2}{dx} &= h_2^2\frac{dx}{d\rho_2}, & \frac{d\rho_2}{dy} &= h_2^2\frac{dy}{d\rho_2}, & \frac{d\rho_2}{dz} &= h_2^2\frac{dz}{d\rho_2},
\end{aligned}\right.$$

ou celui-ci

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{dx}{d\rho} &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}, & \frac{dx}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx}, & \frac{dx}{d\rho_2} &= \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx},\\
\frac{dy}{d\rho} &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy}, & \frac{dy}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy}, & \frac{dy}{d\rho_2} &= \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy},\\
\frac{dz}{d\rho} &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz}, & \frac{dz}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz}, & \frac{dz}{d\rho_2} &= \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz};
\end{aligned}\right.$$

qui donne, par la différentiation, les formules

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\,\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}=\frac{d\,\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho},\quad
\frac{d\,\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}=\frac{d\,\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho},\quad
\frac{d\,\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}=\frac{d\,\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho};\\
&\frac{d\,\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho}=\frac{d\,\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_2},\quad
\frac{d\,\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho}=\frac{d\,\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_2},\quad
\frac{d\,\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho}=\frac{d\,\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_2};\\
&\frac{d\,\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2}=\frac{d\,\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1},\quad
\frac{d\,\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2}=\frac{d\,\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1},\quad
\frac{d\,\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}=\frac{d\,\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}.
\end{aligned}\right.$$

Soit F une fonction de x, y, z, que l'on rapporte ensuite aux nouvelles coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, on aura, d'après le groupe (5),

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dF}{dx}\frac{d\rho}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{d\rho}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{d\rho}{dz}=h^2\frac{dF}{d\rho},\\
&\frac{dF}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{d\rho_1}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{d\rho_1}{dz}=h_1^2\frac{dF}{d\rho_1},\\
&\frac{dF}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{d\rho_2}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{d\rho_2}{dz}=h_2^2\frac{dF}{d\rho_2}.
\end{aligned}\right.$$

§ V.

Si l'on différentie successivement, par rapport à x, y, z, les trois équations (2), il est facile de voir que les résultats de cette opération pourront, d'après les formules (8), être mis sous la forme

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&h_1^2\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}+h^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho}=0,\quad
h_1^2\frac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}+h^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho}=0,\quad
h_1^2\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}+h^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho}=0,\\
&h^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho}+h_2^2\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_2}=0,\quad
h^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho}+h_2^2\frac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_2}=0,\quad
h^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho}+h_2^2\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_2}=0,\\
&h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2}+h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}=0,\quad
h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2}+h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}=0,\quad
h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}+h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}=0
\end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue, dans les premières équations de ces trois lignes, les valeurs de $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$, données par le groupe (5), et si l'on combine la première ligne d'équations (6) avec la première équation (3), on obtient le système suivant :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&h_1^2\,\frac{dh^2\,\frac{dx}{d\rho}}{d\rho_1}+h^2\,\frac{dh_1^2\,\frac{dx}{d\rho_1}}{d\rho}=0,\\
&h^2\,\frac{dh_2^2\,\frac{dx}{d\rho_2}}{d\rho}+h_2^2\,\frac{dh^2\,\frac{dx}{d\rho}}{d\rho_2}=0,\\
&h_2^2\,\frac{dh_1^2\,\frac{dx}{d\rho_1}}{d\rho_2}+h_1^2\,\frac{dh_2^2\,\frac{dx}{d\rho_2}}{d\rho_1}=0,\\
&\left(h\,\frac{dx}{d\rho}\right)^2+\left(h_1\,\frac{dx}{d\rho_1}\right)^2+\left(h_2\,\frac{dx}{d\rho_2}\right)^2=1.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations différentielles doivent être satisfaites par la fonction x, de ρ, ρ_1, ρ_2, ainsi que par les fonctions y et z. Or le système des axes rectilignes peut être changé, sans que ρ, ρ_1, ρ_2, h, h_1, h_2 prennent d'autres valeurs; la distance variable x d'un point de l'espace à un plan fixe quelconque, exprimée en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, devra donc vérifier les quatre équations (10), ou les suivantes qui ne sont que le développement des premières :

$$(10\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{d\rho\,d\rho_1}+\frac{1}{h}\,\frac{dh}{d\rho_1}\,\frac{dx}{d\rho}+\frac{1}{h_1}\,\frac{dh_1}{d\rho}\,\frac{dx}{d\rho_1}=0,\\
&\frac{d^2x}{d\rho_2\,d\rho}+\frac{1}{h_2}\,\frac{dh_2}{d\rho}\,\frac{dx}{d\rho_2}+\frac{1}{h}\,\frac{dh}{d\rho_2}\,\frac{dx}{d\rho}=0,\\
&\frac{d^2x}{d\rho_1\,d\rho_2}+\frac{1}{h_1}\,\frac{dh_1}{d\rho_2}\,\frac{dx}{d\rho_1}+\frac{1}{h_2}\,\frac{dh_2}{d\rho_1}\,\frac{dx}{d\rho_2}=0,\\
&h^2\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2+h_1^2\left(\frac{dx}{d\rho_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{dx}{d\rho_2}\right)^2=1.
\end{aligned}\right.$$

§ VI.

Le développement des équations (7) donne, en ayant égard au groupe (9), les formules suivantes, qui sont très utiles dans la transformation des équations aux différences partielles :

$$
(11)\left\{
\begin{array}{ll}
\text{1}^{\text{re}}\text{ case.} & \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dx} - \dfrac{h^2}{h_1^3}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dx}, & \dfrac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dx} - \dfrac{h^2}{h_2^3}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dx}, \\[2ex]
\dfrac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dy} - \dfrac{h^2}{h_1^3}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dy}, & \dfrac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dy} - \dfrac{h^2}{h_2^3}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dy}, \\[2ex]
\dfrac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dz} - \dfrac{h^2}{h_1^3}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dz}, & \dfrac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dz} - \dfrac{h^2}{h_2^3}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dz}.
\end{array}\right. \\[8ex]
\text{2}^{\text{me}}\text{ case.} & \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_1}{dx} - \dfrac{h_1^2}{h_2^3}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dx}, & \dfrac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dx} - \dfrac{h_1^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dx}, \\[2ex]
\dfrac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_1}{dy} - \dfrac{h_1^2}{h_2^3}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dy}, & \dfrac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dy} - \dfrac{h_1^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dy}, \\[2ex]
\dfrac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_1}{dz} - \dfrac{h_1^2}{h_2^3}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dz}, & \dfrac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dz} - \dfrac{h_1^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dz}.
\end{array}\right. \\[8ex]
\text{3}^{\text{me}}\text{ case.} & \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dx} - \dfrac{h_2^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dx}, & \dfrac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dx} - \dfrac{h_2^2}{h_1^3}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_1}{dx}, \\[2ex]
\dfrac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dy} - \dfrac{h_2^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dy}, & \dfrac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dy} - \dfrac{h_2^2}{h_1^3}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_1}{dy}, \\[2ex]
\dfrac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dz} - \dfrac{h_2^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dz}, & \dfrac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dz} - \dfrac{h_2^2}{h_1^3}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_1}{dz}.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

On déduit immédiatement de ces formules et des équations (2), le groupe suivant :

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dx}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}=0,\\
&\frac{d\rho}{dx}\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}=0;\\
&\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho}=0,\\
&\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_2}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_2}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_2}=0;\\
&\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}=0,\\
&\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho}+\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho}+\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho}=0;
\end{aligned}\right.$$

lequel ne comprend, à proprement parler, qu'une seule équation distincte et nouvelle; car les cinq autres se déduiraient de la première, en différentiant par rapport à ρ, ρ_1 ou ρ_2, les équations (2), et en ayant égard aux formules (9). Ce groupe est fort important par la conséquence géométrique qui en sera déduite (deuxième partie), sur la nature des courbes d'intersection des surfaces orthogonales.

§ VII.

On déduit encore des formules (11) des équations de la forme

$$\frac{d\rho}{dx}\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}=h\frac{dh}{d\rho_1},$$

qui ne sont que des conséquences des équations (2 *bis*); et d'autres telles que celles-ci

$$(13)\qquad \frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}=-\frac{h^2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho},$$

qui se déduiraient aussi fort simplement des formules (9). A cette équation (13) correspond donc un nouveau groupe de six formules, qu'il serait facile de composer.

Enfin le groupe (13), en vertu des équations (2), en donne un autre comprenant six équations de la forme

$$(14)\qquad \frac{d\rho}{dx}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_1}=\frac{h^2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho},$$

qu'on peut établir directement d'une autre manière. On a, en effet, d'après les formules générales (8),

$$\begin{aligned}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_1}&=\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{dx}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{dy}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{dz}\right)\\&=\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{dx}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{dx}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dx}\right)=\frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{dx};\end{aligned}$$

d'où il est facile d'établir les équations suivantes

$$(14\ bis)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_1}&=\frac{1}{h_1}\left(\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}+\frac{dh_1}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{dh_1}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx}\right),\\\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_1}&=\frac{1}{h_1}\left(\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\rho}{dy}+\frac{dh_1}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dy}+\frac{dh_1}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dy}\right),\\\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_1}&=\frac{1}{h_1}\left(\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\rho}{dz}+\frac{dh_1}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dz}+\frac{dh_1}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dz}\right),\end{aligned}\right.$$

et d'autres analogues, qui conduisent facilement au groupe (14).

§ VIII.

Si l'on rapproche, dans les groupes (11) et (14 *bis*), les équations qui donnent les valeurs des trois coefficients de la fonction $\left(\frac{d\rho}{dx}\right)$ en ρ, ρ_1, ρ_2, ces trois équations pourront s'écrire ainsi :

$$\frac{d\,\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1} = \frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dx}\, h\, \frac{d\,\frac{1}{h_1}}{d\rho},$$

$$\frac{d\,\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_2} = \frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dx}.h\, \frac{d\,\frac{1}{h_2}}{d\rho},$$

$$\frac{d\,\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}}{d\rho} = -\frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dx}.h_1\, \frac{d\,\frac{1}{h}}{d\rho_1} - \frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dx}.h_2\, \frac{d\,\frac{1}{h}}{d\rho_2}.$$

Soit maintenant posé, pour simplifier,

$$\frac{1}{h} = \mathrm{H}, \quad \mathrm{H}\frac{d\rho}{dx} = \mathrm{X}, \quad \mathrm{H}\frac{d\rho}{dy} = \mathrm{Y}, \quad \mathrm{H}\frac{d\rho}{dz} = \mathrm{Z};$$

$$\frac{1}{h_1} = \mathrm{H}_1, \quad \mathrm{H}_1\frac{d\rho_1}{dx} = \mathrm{X}_1, \quad \mathrm{H}_1\frac{d\rho_1}{dy} = \mathrm{Y}_1, \quad \mathrm{H}_1\frac{d\rho_1}{dz} = \mathrm{Z}_1;$$

$$\frac{1}{h_2} = \mathrm{H}_2, \quad \mathrm{H}_2\frac{d\rho_2}{dx} = \mathrm{X}_2, \quad \mathrm{H}_2\frac{d\rho_2}{dy} = \mathrm{Y}_2, \quad \mathrm{H}_2\frac{d\rho_2}{dz} = \mathrm{Z}_2;$$

il sera aisé de conclure des équations précédentes, et d'autres semblables que l'on obtiendrait d'une manière analogue, le système d'équations

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\mathrm{X}}{d\rho_1} = \mathrm{X}_1\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho}, && \frac{d\mathrm{X}}{d\rho_2} = \mathrm{X}_2\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho}, && \frac{d\mathrm{X}}{d\rho} = -\mathrm{X}_1\frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_1} - \mathrm{X}_2\frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_2};\\
&\frac{d\mathrm{X}_1}{d\rho_2} = \mathrm{X}_2\frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho_1}, && \frac{d\mathrm{X}_1}{d\rho} = \mathrm{X}\frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_1}, && \frac{d\mathrm{X}_1}{d\rho_1} = -\mathrm{X}_2\frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho_2} - \mathrm{X}\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho};\\
&\frac{d\mathrm{X}_2}{d\rho} = \mathrm{X}\frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_2}, && \frac{d\mathrm{X}_2}{d\rho_1} = \mathrm{X}_1\frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho_2}, && \frac{d\mathrm{X}_2}{d\rho_2} = -\mathrm{X}\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho} - \mathrm{X}_1\frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho_1};
\end{aligned}\right.$$

lequel aurait encore lieu en y substituant $\mathrm{Y}, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2$, ou $\mathrm{Z}, \mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2$, à $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$.

Or, pour que la fonction X de ρ, ρ_1, ρ_2, existe, il faut que ses coefficients différentiels $\frac{d^2\mathrm{X}}{d\rho_1 d\rho_2}$, $\frac{d^2\mathrm{X}}{d\rho_2 d\rho}$, $\frac{d^2\mathrm{X}}{d\rho d\rho_1}$ aient les mêmes valeurs, de quelque manière qu'on les obtienne par la différentiation des équations (15). Ces conditions d'intégrabilité conduisent à des équations différentielles, que doivent vérifier les fonctions H, H_1, H_2, $\left(\text{ou } \frac{1}{h}, \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}\right)$ et qu'il importe d'établir.

§ IX.

Si l'on égale l'une à l'autre, les deux valeurs de $\frac{d^2X}{d\rho_1 d\rho_2}$, déduites par la différentiation des deux premières équations (15), et qu'on substitue dans le résultat les valeurs (15) de $\frac{dX_1}{d\rho_2}$ et $\frac{dX_2}{d\rho_1}$, il vient

$$X_2 \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho} + X_1 \frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}}{d\rho_2} = X_1 \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho} + X_2 \frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}}{d\rho_1};$$

or cette équation doit avoir lieu quelle que soit la position de l'axe aux cosinus X, X_1, X_2, sans que les fonctions H, H_1, H_2, participent de cette indétermination; il faut donc que les coefficients de X_1 et de X_2, dans les deux membres de l'équation précédente, soient égaux; ce qui conduit au groupe suivant, facile à compléter :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\,\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}}{d\rho_2} = \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}, &\quad& \frac{d\,\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}}{d\rho_1} = \frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2};\\
&\frac{d\,\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}}{d\rho} = \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}, && \frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}}{d\rho_2} = \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho};\\
&\frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}}{d\rho_1} = \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}, && \frac{d\,\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}}{d\rho} = \frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}.
\end{aligned}\right.$$

Ces six équations n'en comportent que trois distinctes, car les deux situées sur une même ligne horizontale sont respectivement identiques à l'une des suivantes :

$$(16\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2H}{d\rho_1 d\rho_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho_2} + \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_2}{d\rho_1},\\ \frac{d^2H_1}{d\rho_2 d\rho} &= \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}\frac{dH_2}{d\rho} + \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH}{d\rho_2},\\ \frac{dH_2}{d\rho\, d\rho_1} &= \frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho}. \end{aligned}\right.$$

Il est à remarquer que ces équations peuvent se mettre sous une autre forme, car en y remplaçant H, H_1, H_2, par $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$, elles deviennent

$$(16\ ter)\quad \left\{\begin{aligned} h_2^2\,\frac{dh_1^2\,\frac{d\frac{1}{h}}{d\rho_1}}{d\rho_2} + h_1^2\,\frac{dh_2^2\,\frac{d\frac{1}{h}}{d\rho_2}}{d\rho_1} &= 0,\\ h^2\,\frac{dh_2^2\,\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\rho_2}}{d\rho} + h_2^2\,\frac{dh^2\,\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\rho}}{d\rho_2} &= 0,\\ h_1^2\,\frac{dh^2\,\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\rho}}{d\rho_1} + h^2\,\frac{dh_1^2\,\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\rho_1}}{d\rho} &= 0; \end{aligned}\right.$$

d'où il suit que les fonctions $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$, vérifient respectivement l'une des trois équations différentielles du second ordre (10), auxquelles satisfont toutes les fonctions du premier degré en x, y, z.

§ X.

Si l'on égale l'une à l'autre les deux valeurs de $\frac{d^2X}{d\rho_1 d\rho}$ données par les équations (15), et qu'on substitue dans le résultat les valeurs de $\frac{dX_1}{d\rho}$, $\frac{dX_1}{d\rho_1}$, $\frac{dX_2}{d\rho_1}$ (15), $\frac{d\,\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}}{d\rho_1}$ (16), on obtient une nouvelle relation en H,

H_1, H_2, et des calculs semblables forment le nouveau groupe

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\,\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}}{d\rho} + \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2} = 0,\\
&\frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}}{d\rho} + \frac{d\,\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}}{d\rho_2} + \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1} = 0,\\
&\frac{d\,\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}}{d\rho_2} = \frac{d\,\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (16) combinées deux à deux conduisent au résultat suivant :

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\left(\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\right)}{d\rho_2} = \frac{d\left(\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\right)}{d\rho_1} = \frac{d\left(\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\right)}{d\rho}\\
&\qquad = \frac{1}{HH_1H_2}\left(\frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH_2}{d\rho_1} + \frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho_2}\frac{dH_2}{d\rho}\right);
\end{aligned}
\right.
$$

d'où il suit que, R désignant une certaine fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, on a

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho} = \frac{d^2R}{d\rho d\rho_1},\quad \frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2} = \frac{d^2R}{d\rho_2 d\rho},\quad \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1} = \frac{d^2R}{d\rho_1 d\rho_2},\\
&\frac{1}{HH_1H_2}\left(\frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH_2}{d\rho_1} + \frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho_2}\frac{dH_2}{d\rho}\right) = \frac{d^3R}{d\rho\, d\rho_1 d\rho_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (17) ajoutées, après avoir été multipliées respectivement par H_2, H_1, H, donnent

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_1H_2}{d\rho}}{d\rho} + \frac{d\,\frac{1}{H_1}\frac{dH_2H}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d\,\frac{1}{H_2}\frac{dHH_1}{d\rho_2}}{d\rho_2}\\
&\qquad = \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH_2}{d\rho} + \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

§ XI.

Les équations (15) donnent, en prenant celles qui ne contiennent que deux termes,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho} = \frac{1}{X_1}\frac{dX}{d\rho_1}, \quad \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1} = \frac{1}{X_2}\frac{dX_1}{d\rho_2}, \quad \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2} = \frac{1}{X}\frac{dX_2}{d\rho},\\ &\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho} = \frac{1}{X_2}\frac{dX}{d\rho_2}, \quad \frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1} = \frac{1}{X}\frac{dX_1}{d\rho}, \quad \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2} = \frac{1}{X_1}\frac{dX_2}{d\rho_1}.\end{aligned}\right.$$

Ces valeurs substituées dans les trois équations (15) expriment que la somme $(X^2 + X_1^2 + X_2^2)$ est indépendante de ρ, ρ_1, ρ_2, ce que l'on savait déjà, car cette somme est l'unité, d'après les formules (3).

Si l'on substitue les valeurs (21) dans les équations (16), elles ne contiendront plus que les fonctions X, X_1, X_2, qui peuvent représenter les cosinus des angles qu'une droite quelconque fixe fait avec les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2; et l'on aura

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\,\dfrac{1}{X}\dfrac{dX_1}{d\rho}}{d\rho_2} = \frac{1}{X}\frac{dX_2}{d\rho}\cdot\frac{1}{X_2}\frac{dX_1}{d\rho_2}, \qquad \frac{d\,\dfrac{1}{X}\dfrac{dX_2}{d\rho}}{d\rho_1} = \frac{1}{X}\frac{dX_1}{d\rho}\,\frac{1}{X_1}\frac{dX_2}{d\rho_1};\\ &\frac{d\,\dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX_2}{d\rho_1}}{d\rho} = \frac{1}{X_1}\frac{dX}{d\rho_1}\cdot\frac{1}{X}\frac{dX_2}{d\rho}, \qquad \frac{d\,\dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX}{d\rho_1}}{d\rho_2} = \frac{1}{X_1}\frac{dX_2}{d\rho_1}\,\frac{1}{X_2}\frac{dX}{d\rho_2};\\ &\frac{d\,\dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX}{d\rho_2}}{d\rho_1} = \frac{1}{X_2}\frac{dX_1}{d\rho_2}\cdot\frac{1}{X_1}\frac{dX}{d\rho_1}, \qquad \frac{d\,\dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX_1}{d\rho_2}}{d\rho} = \frac{1}{X_2}\frac{dX}{d\rho_2}\,\frac{1}{X}\frac{dX_1}{d\rho};\end{aligned}\right.$$

ou bien les trois suivantes, seules distinctes les unes des autres,

$$(22\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2X}{d\rho_1 d\rho_2} = \frac{1}{X_1}\frac{dX}{d\rho_1}\frac{dX_1}{d\rho_2} + \frac{1}{X_2}\frac{dX}{d\rho_2}\frac{dX_2}{d\rho_1},\\ &\frac{d^2X_1}{d\rho_2 d\rho} = \frac{1}{X_2}\frac{dX_1}{d\rho_2}\frac{dX_2}{d\rho} + \frac{1}{X}\frac{dX_1}{d\rho}\frac{dX}{d\rho_2},\\ &\frac{d^2X_2}{d\rho\, d\rho_1} = \frac{1}{X}\frac{dX_2}{d\rho}\frac{dX}{d\rho_1} + \frac{1}{X_1}\frac{dX_2}{d\rho_1}\frac{dX_1}{d\rho}.\end{aligned}\right.$$

Les mêmes substitutions faites dans les équations (17) conduisent à des équations que l'on retrouverait en combinant entre elles les relations (22 *bis*) et celle-ci :

$$X^2 + X_1^2 + X_2^2 = 1. \tag{22 ter}$$

Ainsi les quatre équations précédentes sont les seules auxquelles doivent satisfaire les cosinus des angles que les normales aux surfaces orthogonales font avec un axe fixe, pris arbitrairement.

Il est à remarquer que ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{X_2^2}\,\frac{d\,\frac{1}{X_1^2}\frac{dX}{d\rho_1}}{d\rho_2} + \frac{1}{X_1^2}\,\frac{d\,\frac{1}{X_2^2}\frac{dX}{d\rho_2}}{d\rho_1} = 0,\\
&\frac{1}{X^2}\,\frac{d\,\frac{1}{X_2^2}\frac{dX_1}{d\rho_2}}{d\rho} + \frac{1}{X_2^2}\,\frac{d\,\frac{1}{X^2}\frac{dX_1}{d\rho}}{d\rho_2} = 0,\\
&\frac{1}{X_1^2}\,\frac{d\,\frac{1}{X^2}\frac{dX_2}{d\rho}}{d\rho_1} + \frac{1}{X^2}\,\frac{d\,\frac{1}{X_1^2}\frac{dX_2}{d\rho_1}}{d\rho} = 0,\\
&X^2 + X_1^2 + X_2^2 = 1.
\end{aligned}\right.$$

§ XII.

Le groupe d'équations (4) conduit à des formules qui donnent les paramètres différentiels du second ordre des surfaces orthogonales, en fonction de ceux du premier ordre et de leurs variations. Si l'on égale le coefficient de $\frac{d\rho}{dy}$ en x à celui de $\frac{d\rho}{dx}$ en y, ces deux fonctions étant données par les équations (4) (1re case), on aura

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d^2\rho_1}{dz\,dy}\frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d^2\rho_1}{dy^2}\frac{d\rho_2}{dz} + \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d^2\rho_2}{dy^2} - \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d^2\rho_2}{dz\,dy}\right) + \frac{d\,\frac{h}{h_1 h_2}}{dy}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dz}\right)$$

$$= \frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2}\frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d^2\rho_1}{dz\,dx}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\rho_1}{dx}\frac{d^2\rho_2}{dz\,dx} - \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d^2\rho_2}{dx^2}\right) + \frac{d\,\frac{h}{h_1 h_2}}{dx}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dx}\right),$$

ou bien

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\Delta_2\rho_2 - \frac{d\rho_2}{dz}\Delta_2\rho_1\right) +$$

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left[\left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dy} + \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dz}\right) - \left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{dy} + \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{dz}\right)\right]$$

$$\left[\frac{d\rho_1}{dz}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dy} + \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dz}\right) - \frac{d\rho_2}{dz}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dy} + \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dz}\right)\right] = 0.$$

D'après les formules (5), cette dernière équation donne la première du groupe suivant, qui se complète en égalant successivement les deux valeurs de $\frac{d^2\rho}{dz\,dx}$ et de $\frac{d^2\rho}{dy\,dz}$ fournies par les formules (4).

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\Delta_2\rho_2 - \frac{d\rho_2}{dz}\Delta_2\rho_1 + h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2} - h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}\right) + \left(\frac{d\rho_1}{dz}h_2^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dz}h_2^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho}\right) = 0,$$

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dy}\Delta_2\rho_2 - \frac{d\rho_2}{dy}\Delta_2\rho_1 + h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2} - h_2^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}\right) + \left(\frac{d\rho_1}{dy}h_1^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dy}h_1^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_1}\right) = 0,$$

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\Delta_2\rho_2 - \frac{d\rho_2}{dx}\Delta_2\rho_1 + h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} - h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}\right) + \left(\frac{d\rho_1}{dx}h_2^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dx}h_1^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_1}\right) = 0.$$

Si l'on ajoute les trois équations précédentes, après les avoir respectivement multipliées par $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dy}$, $\frac{d\rho_1}{dx}$, on aura, toute réduction faite, et en ayant égard aux formules (2) et au groupe (13),

$$\frac{\Delta_2\rho_2}{h_2^2} + \frac{d.\log\frac{h_1 h}{h_2}}{d\rho_2} = 0,$$

Si, au contraire, on ajoute les mêmes équations, respectivement multipliées par $\frac{d\rho_2}{dz}$, $\frac{d\rho_2}{dy}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$, on trouvera

$$\frac{\Delta_2\rho_1}{h_1^2}+\frac{d.\log\frac{h_2 h}{h_1}}{d\rho_1}=0.$$

Enfin si on les ajoute, respectivement multipliées par $\frac{d\rho}{dz}$, $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho}{dx}$, leur somme donnera, d'après les équations (2),

$$h_2^2\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}\right)=h_1^2\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}\right),$$

équation qui est identique d'après le groupe (11).

§ XIII.

Il suit de là que les équations (4) ne donneront, en agissant sur la deuxième et la troisième case, comme il vient d'être fait sur la première, que les trois formules nouvelles

$$(24)\qquad \frac{\Delta_2\rho}{h^2}=\frac{d.\log\frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho},\qquad \frac{\Delta_2\rho_1}{h_1^2}=\frac{d.\log\frac{h_1}{h_2 h}}{d\rho_1},\qquad \frac{\Delta_2\rho_2}{h_2^2}=\frac{d.\log\frac{h_2}{h h_1}}{d\rho_2}.$$

lesquelles peuvent se mettre sous la forme

$$(24\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dh}{d\rho}-\frac{\Delta_2\rho}{h}=\frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}+\frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho},\\
&\frac{dh_1}{d\rho_1}-\frac{\Delta_2\rho_1}{h_1}=\frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}+\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1},\\
&\frac{dh_2}{d\rho_2}-\frac{\Delta_2\rho_2}{h_2}=\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}+\frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (24) sont utiles, en ce qu'elles permettent de simplifier l'expression transformée du paramètre différentiel du second ordre d'une fonction quelconque; car si φ représente une fonction de x, y, z, que l'on rapporte ensuite aux nouvelles coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, on aura successivement

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\varphi}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{d\varphi}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{d^2\varphi}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\frac{d^2\varphi}{d\rho_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2+\frac{d^2\varphi}{d\rho_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2+$$

$$2\,\frac{d^2\varphi}{d\rho_1 d\rho_2}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}+2\,\frac{d^2\varphi}{d\rho_2 d\rho}\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dx}+2\,\frac{d^2\varphi}{d\rho d\rho_1}\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d\varphi}{d\rho_1}\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+\frac{d\rho}{d\rho_2}\frac{d^2\rho_2}{dx^2};$$

et il est facile de voir que si l'on calcule de la même manière les deux autres coefficients différentiels $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$, la somme des trois donnera

$$\Delta_2\varphi=h^2\frac{d^2\varphi}{d\rho^2}+h_1^2\frac{d^2\varphi}{d\rho_1^2}+h_2^2\frac{d^2\varphi}{d\rho_2^2}+\frac{d\varphi}{d\rho}\Delta_2\rho+\frac{d\varphi}{d\rho_1}\Delta_2\rho_1+\frac{d\varphi}{d\rho_2}\Delta_2\rho_2,$$

en ayant égard aux formules (2) et (2 *bis*). Or les équations (24) transforment cette expression comme il suit :

$$\Delta_2\varphi=h^2\left(\frac{d^2\varphi}{d\rho^2}+\frac{h_1h_2}{h}\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho}\right)+h_1^2\left(\frac{d^2\varphi}{d\rho_1^2}+\frac{h_2h}{h_1}\frac{d\frac{h_1}{h_2h}}{d\rho_1}\right)+h_2^2\left(\frac{d^2\varphi}{d\rho_2^2}+\frac{hh_1}{h_2}\frac{d\frac{h_2}{hh_1}}{d\rho_2}\right),$$

ou plus simplement,

$$(25)\qquad \Delta_2\varphi=hh_1h_2\left(\frac{d\,\frac{h}{h_1h_2}\frac{d\varphi}{d\rho}}{d\rho}+\frac{d\,\frac{h_1}{h_2h}\frac{d\varphi}{d\rho_1}}{d\rho_1}+\frac{d\,\frac{h_2}{hh_1}\frac{d\varphi}{d\rho_2}}{d\rho_2}\right).$$

On observera aussi que le carré du premier paramètre différentiel de la fonction φ, d'après les valeurs de $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, calculées ci-dessus, et par les formules (2) et (2 *bis*), a pour expression

$$(26)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2=h^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2+h_1^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho_2}\right)^2.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Courbure des surfaces orthogonales.

La plupart des formules établies dans la première partie de ce Mémoire signalent des propriétés géométriques qui appartiennent à tous les systèmes de surfaces orthogonales. Cette seconde partie a pour objet de démêler ces propriétés. (Pour éviter toute confusion, et pour faciliter les renvois, les chiffres entre parenthèses continueront à désigner exclusivement les équations de la première partie; celles de la seconde seront marquées par des lettres.)

§ I.

Le groupe des équations (12) indique que chacune des trois surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, est coupée suivant ses lignes de courbure par toutes les surfaces des deux autres systèmes.

En effet, considérons une des surfaces ρ; sa normale, rapportée aux coordonnées courantes x', y', z', aura pour équations

$$\frac{d\rho}{dz}(x'-x)=(z'-z)\frac{d\rho}{dx}, \quad \frac{d\rho}{dz}(y'-y)=(z'-z)\frac{d\rho}{dy};$$

si x', y', z' représentent les coordonnées d'un des centres de courbure, et δ_1 l'indice de la variation des coordonnées du point (x, y, z) de la surface, lorsqu'on le quitte pour marcher sur la ligne de courbure correspondante à ce centre, on aura

$$(x'-x)\,\delta_1\frac{d\rho}{dz}-\frac{d\rho}{dz}\delta_1 x=(z'-z)\,\delta_1\frac{d\rho}{dx}-\frac{d\rho}{dx}\delta_1 z,$$
$$(y'-y)\,\delta_1\frac{d\rho}{dz}-\frac{d\rho}{dz}\delta_1 y=(z'-z)\,\delta_1\frac{d\rho}{dy}-\frac{d\rho}{dy}\delta_1 z;$$

et l'élimination de $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$, entre les quatre équations précédentes, conduit à la suivante, en observant que, par hypothèse, $\frac{d\rho}{dx}\delta_1 x+\frac{d\rho}{dy}\delta_1 y+\frac{d\rho}{dz}\delta_1 z=0$:

$$(a)\ \left(\frac{d\rho}{dz}\delta_1 y-\frac{d\rho}{dy}\delta_1 z\right)\delta_1\frac{d\rho}{dx}+\left(\frac{d\rho}{dx}\delta_1 z-\frac{d\rho}{dz}\delta_1 x\right)\delta_1\frac{d\rho}{dy}+\left(\frac{d\rho}{dy}\delta_1 x-\frac{d\rho}{dx}\delta_1 y\right)\delta_1\frac{d\rho}{dz}=0.$$

Si l'on pose

$$\frac{d\rho}{dz}\delta_1 y-\frac{d\rho}{dy}\delta_1 z=k\delta_2 x,\quad \frac{d\rho}{dx}\delta_1 z-\frac{d\rho}{dz}\delta_1 x=k\delta_2 y,\quad \frac{d\rho}{dy}\delta_1 x-\frac{d\rho}{dx}\delta_1 y=k\delta_2 z,$$

on en déduira

$$\frac{d\rho}{dx}\delta_2 x+\frac{d\rho}{dy}\delta_2 y+\frac{d\rho}{dz}\delta_2 z=0,$$
$$\delta_1 x\,\delta_2 x+\delta_1 y\,\delta_2 y+\delta_1 z\,\delta_2 z=0;$$

ce qui indique que le point de la surface, aux coordonnées $x+\delta_2 x$, $y+\delta_2 y$, $z+\delta_2 z$, se trouve sur la surface ρ et sur la seconde ligne de courbure.

L'équation de condition (a) se réduira alors à

$$\delta_1\frac{d\rho}{dx}.\delta_2 x+\delta_1\frac{d\rho}{dy}.\delta_2 y+\delta_1\frac{d\rho}{dz}.\delta_2 z=0,$$

ou, en supposant que ρ_1 et ρ_2 soient les paramètres de deux surfaces coupant la proposée ρ rectangulairement, et suivant les deux lignes de courbure

$$\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}=0,$$

équation qui reproduirait toutes les équations (12).

Ainsi, *trois systèmes conjugués de surfaces orthogonales sont toujours tels, que deux quelconques d'entre eux tracent sur une surface du troisième toutes ses lignes de courbure.*

§ II.

La courbure d'une ligne ou d'une surface, en un point et dans un plan déterminé, étant totalement définie par la fraction dont le numérateur est l'unité, et le dénominateur le rayon du cercle osculateur, on peut appeler cette fraction *coefficient de courbure*, ou simplement *courbure*. D'après cela, à chaque point de l'espace, découpé par un système de surfaces orthogonales, correspondent six courbures, en général différentes, appartenant deux à deux aux trois surfaces conjuguées qui se coupent en ce point.

Les trois lignes d'intersection de ces surfaces forment en quelque sorte trois axes coordonnés courbes, dont le point considéré est l'origine. Pour fixer les idées, je désigne ces axes courbes par les noms d'axes des s, des s_1, des s_2, et par surfaces des $s_1 s_2$, des $s_2 s$, des $s s_1$, les surfaces conjuguées ρ, ρ_1, ρ_2; je suppose en outre que la première tangente à l'axe courbe des s soit verticale, et que l'observateur, placé sur le plan horizontal tangent à la surface $s_1 s_2$, et regardant l'axe des s, ait l'axe des s_1 à sa gauche, celui des s_2 à sa droite.

Dans cette représentation géométrique, chacune des surfaces coordonnées a pour lignes de courbure les deux axes qu'elle contient, et les centres de ses deux courbures sont situés sur la tangente au troisième axe. D'un autre côté, chaque axe étant une ligne de courbure, pour chacune des deux surfaces coordonnées dont il est l'intersection, cet axe doit être considéré comme offrant deux courbures différentes, mesurées dans les plans tangents à ces surfaces. Les six courbures réunies des trois axes sont d'ailleurs les mêmes que celles des surfaces coordonnées.

Le paramètre de chaque surface coordonnée ne varie que sur l'axe qui lui est normal; il reste constant sur les deux autres. Quant aux paramètres différentiels d'une même surface, ils varient en général sur les trois axes, et ce sont les grandeurs de ces variations elles-mêmes qui déterminent celles des six courbures (§ III). Lorsqu'on marche infiniment peu sur l'axe des s, par exemple, le paramètre intégral ρ de la surface des $s_1 s_2$ change, et le rapport de sa variation à l'arc parcouru donne précisément son paramètre différentiel du premier ordre (§ IV, première partie). Il suit de là que dans tous les changements d'équations, pour représenter une même famille de surfaces, le rapport de la différentielle du paramètre intégral au paramètre différentiel du premier ordre conserve la même valeur en chaque point (§ II, première partie).

§ III.

Soient ds, ds_1, ds_2, les arcs à parcourir sur les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, pour passer aux surfaces de même espèce infiniment voisines; da et $d\alpha$ les angles de contingence de l'arc ds dans deux plans tangents aux surfaces ρ_2 et ρ_1; da_1 et $d\alpha_1$ ceux de ds_1 dans les plans tangents aux surfaces ρ et ρ_2; da_2 et $d\alpha_2$, ceux de ds_2 dans les plans tangents aux surfaces ρ_1 et ρ; et soit posé

$$\begin{aligned} ds &= c.da = \gamma.d\alpha, \\ ds_1 &= c_1.da_1 = \gamma_1.d\alpha_1, \\ ds_2 &= c_2.da_2 = \gamma_2.d\alpha_2; \end{aligned}$$

(γ_1, c_2), (γ_2, c), (γ, c_1), seront les rayons de plus grande et de plus petite courbure des surfaces ρ, ρ_1, ρ_2.

Les équations du § I donnent, en désignant par x', y', z', les coordonnées du centre de courbure au rayon γ_1, de la ligne s_1 prise sur la surface ρ,

$$\frac{d\rho}{dz}\gamma_1 = h(z'-z),$$

$$(z'-z)\left(\frac{d\rho}{dx}\,\delta_1\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho}{dz}\,\delta_1\frac{d\rho}{dx}\right) = \frac{d\rho}{dz}\left(\frac{d\rho}{dz}\,\delta_1 x - \frac{d\rho}{dx}\,\delta_1 z\right),$$

δ_1 indiquant la variation par rapport à ρ_1 seul. On déduit de là

$$\gamma_1\left(\frac{d\rho}{dx}\,\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1} - \frac{d\rho}{dz}\,\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}\right) = h\left(\frac{d\rho}{dz}\frac{dx}{d\rho_1} - \frac{d\rho}{dx}\frac{dz}{d\rho_1}\right),$$

ou, d'après les formules (6) et (11),

$$\gamma_1\left[\frac{d\rho}{dx}\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dz} - \frac{h^2}{h_1^3}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dz}\right) - \frac{d\rho}{dz}\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dx} - \frac{h^2}{h_1^3}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dx}\right)\right] = \frac{h}{h_1^2}\left(\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dx} - \frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dz}\right),$$

ou enfin, en réduisant,

$$\frac{1}{\gamma_1} = \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}.$$

Des calculs analogues au précédent conduiraient aux six équations :

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}=\frac{1}{c}, \quad \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}=\frac{1}{c_1}, \quad \frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}=\frac{1}{c_2},\\ &\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}=\frac{1}{\gamma}, \quad \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}=\frac{1}{\gamma_1}, \quad \frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}=\frac{1}{\gamma_2}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on a égard aux formules $ds=\frac{d\rho}{h}$, $ds_1=\frac{d\rho_1}{h_1}$, $ds_2=\frac{d\rho_2}{h_2}$, les six équations précédentes pourront s'écrire ainsi :

$$(b')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dh}{ds_1}=\frac{h}{c}, \quad \frac{dh_1}{ds_2}=\frac{h_1}{c_1}, \quad \frac{dh_2}{ds}=\frac{h_2}{c_2},\\ &\frac{dh}{ds_2}=\frac{h}{\gamma}, \quad \frac{dh_1}{ds}=\frac{h_1}{\gamma_1}, \quad \frac{dh_2}{ds_1}=\frac{h_2}{\gamma_2}.\end{aligned}\right.$$

Elles indiquent que les six rayons de courbure sont liés, par de simples proportions, aux premiers paramètres différentiels des surfaces conjuguées et à leurs variations. Il faut remarquer que les rayons de courbure déduits des équations (b) seront tantôt positifs, tantôt négatifs, suivant les signes des variations dont ils dépendent.

Les formules (24 *bis*) peuvent, d'après les équations (b), se mettre sous la forme

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dh}{d\rho}-\frac{\Delta_2\rho}{h}=\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{c_2},\\ &\frac{dh_1}{d\rho_1}-\frac{\Delta_2\rho_1}{h_1}=\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{c},\\ &\frac{dh_2}{d\rho_2}-\frac{\Delta_2\rho_2}{h_2}=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{c_1}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations expriment que la différence $\left(\frac{dh}{d\rho}-\frac{\Delta_2\rho}{h}\right)$, qui conserve la même valeur pour tous les paramètres de la même famille de surfaces (§ II, première partie), est égale à la somme des deux courbures de la surface individuelle passant au point que l'on considère.

§ IV.

Toutes les équations (16), (17), .. en H, H_1, H_2, peuvent être exprimées au moyen des six courbures et des arcs ds, ds_1, ds_2; elles sont alors complétement dégagées des paramètres différentiels, et énoncent autant de propriétés géométriques, communes à tous les systèmes conjugués de surfaces orthogonales. Pour démontrer ces propriétés, il faut transformer les équations (b) en H, H_1, H_2, ce qui donne

$$(b'')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{H_1}\dfrac{dH}{d\rho_1} = -\dfrac{H}{c}, & \dfrac{1}{H_2}\dfrac{dH_1}{d\rho_2} = -\dfrac{H_1}{c_1}, \quad \dfrac{1}{H}\dfrac{dH_2}{d\rho} = -\dfrac{H_2}{c_2}, \\ \dfrac{1}{H_2}\dfrac{dH}{d\rho_2} = -\dfrac{H}{\gamma}, & \dfrac{1}{H}\dfrac{dH_1}{d\rho} = -\dfrac{H_1}{\gamma_1}, \quad \dfrac{1}{H_1}\dfrac{dH_2}{d\rho_1} = -\dfrac{H_2}{\gamma_2}. \end{cases}$$

La première des équations (16) [première ligne] devient alors successivement

$$\frac{d\frac{H}{c}}{d\rho_2} + \frac{H}{\gamma}\frac{H_2}{\gamma_2} = 0, \quad H\frac{d\frac{1}{c}}{d\rho_2} + \frac{1}{c}\frac{dH}{d\rho_2} + \frac{HH_2}{\gamma\gamma_2} = 0, \quad \frac{1}{H_2}\frac{d\frac{1}{c}}{d\rho_2} - \frac{1}{\gamma c} + \frac{1}{\gamma\gamma_2} = 0,$$

ou, en observant que $H_2\, d\rho_2 = \frac{d\rho_2}{h_2} = ds_2$,

$$\frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma_2}\right).$$

En répétant les mêmes calculs sur les autres équations (16), elles prennent une forme analogue, et l'on a pour les remplacer le groupe suivant :

$$(d)\quad \begin{cases} \dfrac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{\gamma_2}\right), & \dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{1}{c_1}\right), \\ \dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \dfrac{1}{\gamma_1}\left(\dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{\gamma}\right), & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \dfrac{1}{c_1}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} - \dfrac{1}{c_2}\right), \\ \dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \dfrac{1}{\gamma_2}\left(\dfrac{1}{c_2} - \dfrac{1}{\gamma_1}\right), & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \dfrac{1}{c_2}\left(\dfrac{1}{\gamma_2} - \dfrac{1}{c}\right). \end{cases}$$

De ces formules on déduit plusieurs autres qui méritent d'être citées, telles sont les suivantes :

$$
(e)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma_1}\,\frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1}+\frac{1}{c}\,\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds}=0,\\
&\frac{1}{\gamma_2}\,\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2}+\frac{1}{c_1}\,\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1}=0,\\
&\frac{1}{\gamma}\,\frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds}+\frac{1}{c_2}\,\frac{d\frac{1}{c}}{ds_2}=0,\\
&\frac{d\frac{1}{\gamma^2}}{ds_1}\cdot\frac{d\frac{1}{\gamma_1^2}}{ds_2}\cdot\frac{d\frac{1}{\gamma_2^2}}{ds}=\frac{d\frac{1}{c^2}}{ds_2}\cdot\frac{d\frac{1}{c_1^2}}{ds}\cdot\frac{d\frac{1}{c_2^2}}{ds_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

§ V.

Il faut remarquer que les six courbures semblent se partager en deux groupes distincts, le premier $\left(\frac{1}{c},\ \frac{1}{c_1},\ \frac{1}{c_2}\right)$, le second $\left(\frac{1}{\gamma},\ \frac{1}{\gamma_1},\ \frac{1}{\gamma_2}\right)$. Il importe de définir ces groupes pour bien concevoir les propriétés exprimées par les formules (d) et (e), et par celles qui vont suivre. Si l'on se reporte à la représentation géométrique adoptée au § II, on voit que chaque groupe comprend l'une des deux courbures de chaque axe, et aussi l'une des deux courbures de chaque surface coordonnée. Les plans des cercles osculateurs de chaque groupe se coupent tous les trois à angle droit, et il est facile de voir qu'en séparant d'une autre manière les six courbures, on formerait des groupes qui ne jouiraient pas de cette propriété; car deux des cercles osculateurs de chacun d'eux auraient le même plan.

Ainsi il n'y a qu'une seule manière de séparer les six courbures en deux groupes, de telle manière que les plans des cercles osculateurs de chacun d'eux soient orthogonaux. Dans le groupe $\left(\frac{1}{c},\ \frac{1}{c_1},\ \frac{1}{c_2}\right)$, la courbure de l'axe des s est mesurée tangentiellement à la surface des $s_2 s$, et son centre est sur la tangente à l'axe s_2, placé par hypothèse à la droite de l'observateur; par cette raison, on peut donner à ce groupe la qualification de *groupe de droite*. Dans le groupe $\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}\right)$, la courbure de l'axe des s est mesurée tangentiellement à la surface des ss_1, et son centre est sur la tangente à l'axe s_1, placé à gauche de l'observateur; ce groupe sera désigné sous le nom de *groupe de gauche*.

§ VI.

J'emploierai l'expression de *courbures conjuguées en axe* ou *en surface*, pour désigner les deux courbures d'un même axe, ou celles d'une même surface coordonnée. Par exemple, $\frac{1}{\gamma}$ est la courbure conjuguée en axe de $\frac{1}{c}$, et $\frac{1}{\gamma_2}$ est sa courbure conjuguée en surface. Il est en outre permis d'appeler *plan d'une courbure*, celui de son cercle osculateur. Enfin je donnerai simplement le nom de *variation d'une quantité suivant une certaine ligne*, à la limite du rapport de l'accroissement de cette quantité à l'arc parcouru sur la ligne. Ces conventions établies :

Les six relations (d) sont toutes comprises dans cette loi : *la variation d'une courbure, suivant l'axe normal à son plan, est égale au produit de sa conjuguée en axe, par son excès sur sa conjuguée en surface.*

Les trois premières relations (e) sont réunies dans cette loi : *la somme algébrique des variations, des deux courbures d'une même surface coordonnée, prises normalement à leurs plans, et respectivement divisées par leurs conjuguées en axe, est toujours nulle.*

Enfin la dernière des relations (e) démontre que *si l'on prend séparément les variations, normales à leurs plans, des carrés des courbures formant le groupe de droite, et de celles composant le groupe de gauche, le produit des trois premières variations sera égal au produit des trois autres.*

§ VII.

Les equations (17) conduisent à d'autres propriétés géométriques. Les formules (h'') transforment ainsi la première :

$$\frac{d\frac{\mathrm{H}}{c}}{d\rho_1}+\frac{d\frac{\mathrm{H}}{\gamma_1}}{d\rho}=\frac{\mathrm{H}}{\gamma}\frac{\mathrm{H}_1}{c_1},\quad \mathrm{H}\frac{d\frac{1}{c}}{d\rho_1}+\mathrm{H}_1\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{d\rho}+\frac{1}{c}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_1}+\frac{1}{\gamma_1}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho}=\frac{\mathrm{H}}{\gamma}\frac{\mathrm{H}_1}{c_1};$$

et si l'on observe que $H_1\, d\rho_1 = ds_1$, $H d\rho = ds$, on a simplement :

$$\frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma c_1}.$$

Ainsi les équations (17) peuvent être remplacées par le groupe suivant :

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma c_1}, \\ &\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} + \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} = \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma_2 c}, \\ &\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_1 c_2}, \end{aligned} \right.$$

compris dans une même loi qu'on peut énoncer ainsi :

Le produit des deux courbures d'une même surface, augmenté de la somme des carrés de leurs conjuguées en axe, est égal à la somme des variations de ces deux dernières courbures, suivant leurs arcs réciproques.

§ VIII.

Si l'on multiplie la première des relations (b), première ligne, par $\frac{1}{\gamma_1}$, la seconde de la deuxième ligne par $\frac{1}{c}$, qu'on les ajoute ensuite, et qu'on opère d'une manière analogue sur les autres équations du même groupe, on obtient les nouvelles formules

$$(g) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{c_1}\right)\frac{1}{c\gamma_1} - \frac{d\frac{1}{c\gamma_1}}{ds_2} = \left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{c_2\gamma} - \frac{d\frac{1}{c_2\gamma}}{ds_1} \\ &= \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{c_2}\right)\frac{1}{c_1\gamma_2} - \frac{d\frac{1}{c_1\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{c c_1 c_2} + \frac{1}{\gamma\gamma_1\gamma_2}, \end{aligned} \right.$$

lesquelles remplacent celles (18).

D'après ces formules, *si l'on multiplie la somme des courbures de chaque surface coordonnée par le produit de leurs conjuguées en axe, et qu'on retranche ensuite la variation de ce dernier produit suivant l'axe normal à la surface, on aura trois différences, lesquelles seront égales entre elles*. De plus, *si l'on forme le produit des trois courbures de chaque groupe de droite et de gauche, la somme des deux produits obtenus sera la valeur commune de ces différences*.

§ IX.

Lorsque les surfaces conjuguées orthogonales sont toutes dans la classe des surfaces isothermes, les lois exprimées par les formules (g) sont remplacées par d'autres plus simples. Pour faire voir en quoi consiste cette simplification, il faut revenir d'abord aux formules de la première partie.

Une famille de surfaces, au paramètre ρ, est dite *isotherme*, lorsque le rapport $\left(\frac{\Delta_2\rho}{h^2}\right)$ du second paramètre différentiel au carré du premier est une fonction du paramètre intégral ρ (§ I, première partie). Or il est facile de voir, d'après les considérations du § II (première partie), que si l'on met cette fonction sous la forme $\frac{d^2.F(\rho)}{d\rho^2} : \frac{d.F(\rho)}{d\rho}$, et qu'on prenne pour nouveau paramètre de la même famille $\varepsilon = F(\rho)$, le second paramètre différentiel $\Delta_2\varepsilon$ sera nul.

On peut donc dire qu'une famille de surfaces isothermes est telle, qu'en choisissant convenablement son paramètre intégral, son second paramètre différentiel est nul. D'après cela, si les trois systèmes conjugués sont isothermes, on pourra supposer que leurs paramètres ρ, ρ_1, ρ_2, ont été choisis de telle manière que

$$\Delta_2\rho = 0, \qquad \Delta_2\rho_1 = 0, \qquad \Delta_2\rho_2 = 0;$$

les équations (24) donneront alors

$$\frac{d\,\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho} = 0, \qquad \frac{d\,\frac{h_1}{h_2h}}{d\rho_1} = 0, \qquad \frac{d\,\frac{h_2}{hh_1}}{d\rho_2} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\frac{H_1H_2}{H}}{d\rho} = 0, \qquad \frac{d\frac{H_2H}{H_1}}{d\rho_1} = 0, \qquad \frac{d\frac{HH_1}{H_2}}{d\rho_2} = 0;$$

de telle sorte que si l'on pose

$$H_1H_2 = HQ^2, \qquad H_2H = H_1Q_1^2, \qquad HH_1 = H_2Q_2^2,$$

d'où il est facile de conclure

$$H = Q_1Q_2, \qquad H_1 = Q_2Q, \qquad H_2 = QQ_1;$$

la fonction Q sera indépendante de ρ, Q_1 de ρ_1, Q_2 de ρ_2.

§ X.

Or il suit des valeurs précédentes de H, H_1, H_2, que, par exemple,

$$\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho} = \frac{1}{Q_2^2}\frac{dQ_2}{d\rho_1}\frac{dQ_2}{d\rho},$$

c'est-à-dire que le résultat est indépendant de ρ_2, ou que

$$\frac{d\,\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}}{d\rho_2} = 0.$$

D'où l'on conclut, d'après les formules (18),

$$\frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH_2}{d\rho_1} + \frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho_2}\frac{dH_2}{d\rho} = 0,$$

et par suite, d'après les formules (b''),

$$(i) \qquad \frac{1}{cc_1c_2} + \frac{1}{\gamma\gamma_1\gamma_2} = 0.$$

Ainsi, dans le cas où les surfaces conjuguées appartiennent toutes à la classe des surfaces isothermes les relations (g) donnent

$$(j)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{1}{cc_1c_2} + \dfrac{1}{\gamma\gamma_1\gamma_2} = 0, \\ \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{c_1} = \dfrac{d.\log\dfrac{1}{c\gamma_1}}{ds_2},\quad \dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{d.\log\dfrac{1}{c_2\gamma}}{ds_1},\quad \dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{c_2} = \dfrac{d.\log\dfrac{1}{c_1\gamma_2}}{ds}. \end{array}\right.$$

C'est-à-dire qu'abstraction faite de leurs signes, *le produit de trois des six rayons de courbure, pris dans un certain ordre, est égal au produit des trois autres*. De plus, les trois différences définies à la fin du § VIII sont nulles, ou autrement : *la somme des deux courbures de chaque surface est égale à la variation du logarithme népérien du produit de leurs conjuguées en axe, prise normalement à la surface.*

§ XI.

Dans le cas particulier où l'un des trois systèmes conjugués, que nous ne supposerons plus isothermes, serait une famille de plans parallèles, les deux autres systèmes seraient des surfaces cylindriques orthogonales. Il n'y aurait plus alors que deux courbures à considérer en chaque point, les quatre autres étant nulles, ou leurs rayons infinis. Les surfaces cylindriques, conjuguées entre elles et aux plans parallèles, traceraient sur chacun de ces plans des courbes orthogonales, dont le système serait d'ailleurs identique d'un plan à l'autre.

Dans ce cas particulier, toutes les relations des paragraphes précédents deviennent identiques, à l'exception d'une seule qui exprime une propriété commune à tous les systèmes de courbes planes, conjuguées et orthogonales.

En effet, supposons que ce soient les surfaces au paramètre ρ_2 qui deviennent des plans parallèles. On a alors $H_2 = 1$; H et H_1 sont indépendants de ρ_2; les formules (b'') donnent

$$\frac{1}{c_1} = 0,\quad \frac{1}{c_2} = 0,\quad \frac{1}{\gamma} = 0,\quad \frac{1}{\gamma_2} = 0,$$

et

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{HH_1}\frac{dH}{d\rho_1},\quad \frac{1}{\gamma_1} = -\frac{1}{HH_1}\frac{dH_1}{d\rho};$$

toutes les équations (d), (e), (g) sont identiquement satisfaites, ainsi que les deux dernières du groupe (f); il ne reste plus que la première de ce groupe, qui devient

$$(k)\qquad \frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \left(\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma_1}\right)^2.$$

C'est-à-dire que *dans tout système de lignes planes orthogonales, la somme des variations des courbures des deux lignes, suivant leurs arcs réciproques, est égale à la somme des carrés de ces courbures mêmes.*
