JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note de l'Éditeur

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 351-355.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__351_0>

Note de l'Éditeur.

On appréciera facilement la justesse et l'importance de la remarque de M. Jacobi. C'est dans son premier Mémoire sur la *variation des constantes* (*Journal de l'École Polytechnique*, XV^{me} cahier, page 280) que M. Poisson arrive à l'équation

$$\frac{db}{ds} \cdot \frac{da}{d\varphi} - \frac{da}{ds} \cdot \frac{db}{d\varphi} + \ldots = \textit{constante},$$

sur laquelle portent les réflexions du célèbre géomètre allemand. M. Poisson ajoute ensuite : « On conçoit que la constante qui fait le second membre de cette équation, sera » en général une fonction de a, b, et des constantes arbitraires contenues dans les au- » tres intégrales des équations du mouvement; quelquefois il pourra arriver que sa va- » leur ne renferme ni la constante a, ni la constante b; dans d'autres cas elle ne con- » tiendra aucune constante arbitraire, et se réduira à une constante déterminée. » Mais il ne parle nullement de l'utilité que son équation pourra présenter quelquefois en faisant connaître de nouvelles intégrales.

En général, l'équation

$$\frac{db}{ds} \cdot \frac{da}{d\varphi} - \frac{da}{ds} \cdot \frac{db}{d\varphi} + \ldots = \textit{constante}$$

conduit à une intégrale des équations différentielles dont on s'occupe. Mais il peut arriver aussi qu'elle soit identique ou qu'elle rentre dans les intégrales déjà connues. Par exemple, en partant de deux équations fournies par le principe des aires, on est conduit d'abord à la troisième; mais en continuant à appliquer le même procédé, on ne retombe plus que sur des résultats déjà obtenus.

Tous les géomètres verront avec plaisir M. Jacobi annoncer la publication prochaine du grand ouvrage qu'il prépare depuis plusieurs années sur la Mécanique analytique. Les fragments que l'auteur a laissé échapper à diverses reprises [*] montrent suffisamment que cet ouvrage soutiendra ou même augmentera encore la gloire de son illustre auteur.

Desireux de faire passer dans l'enseignement quelques-unes des belles découvertes de M. Jacobi, j'ai rédigé depuis long-temps la Note suivante, relative à l'un de ses théorèmes. Cette Note a servi de texte à une de mes leçons. Bien que le cas particulier auquel elle se rapporte ait été déjà traité par M. Poisson, dans ce Journal même (tome II, page 334), peut-être quelques lecteurs la verront encore avec intérêt. La marche que je suis n'est pas tout-à-fait la même, et les équations différentielles dont je m'occupe sont un peu plus générales. Je prends pour point de départ un théorème bien connu, savoir que si X, X', etc., sont des fonctions de t, x, x', etc., toute intégrale $\varphi(t, x, x', \ldots) =$ *constante* du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dx'}{dt} = X', \ldots$$

devra donner l'équation identique

$$\frac{d\varphi}{dt} + X\frac{d\varphi}{dx} + X'\frac{d\varphi}{dx'} + \ldots = 0.$$

Réciproquement si l'on a une fonction φ des variables t, x, x', ... satisfaisant à l'équation aux différentielles partielles que je viens d'écrire, $\varphi =$ *constante* sera une intégrale du système $\frac{dx}{dt} = X$, $\frac{dx'}{dt} = X'$,... De là naît une méthode d'intégration dont Laplace a donné un bel exemple dans la *Mécanique céleste*, et dont M. Cauchy a beaucoup étendu l'usage dans ces derniers temps.

J'entre en matière.

Soit t une variable indépendante. Désignons par x, x', y, y' quatre fonctions de t qui doivent satisfaire aux quatre équations différentielles du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \lambda\frac{dU}{dx'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\lambda\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda\frac{dU}{dy'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\lambda\frac{dU}{dy},$$

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome III, page 59, et tome V, page 61. — Tome III de ce Journal, pages 44 et 60.

dans lesquelles U est une fonction donnée de x, x', y, y', tandis que λ est une autre fonction donnée aussi de x, x', y, y' et t. $\mathrm{U} = constante = a$ sera évidemment une des intégrales du système des équations (1). Supposons que $\mathrm{V} = b$ soit une seconde intégrale du même système, V étant une fonction de x, x', y, y', et b une constante arbitraire, c'est-à-dire supposons que V satisfasse identiquement à l'équation aux différences partielles

$$(2) \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dx'} - \frac{d\mathrm{V}}{dx'}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dy'} - \frac{d\mathrm{V}}{dy'}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dy} = 0,$$

puis proposons de trouver les deux autres intégrales qu'il faut joindre aux deux précédentes pour déterminer complétement x, x', y, y', en fonction de t.

Pour cela observons d'abord que des deux équations $\mathrm{U} = a$, $\mathrm{V} = b$, on peut tirer les valeurs de deux des quatre quantités x, x', y, y', de x' et y' par exemple, en fonction des deux autres et des constantes arbitraires a, b. En portant ces valeurs de x' et y' dans la première et la troisième des équations (1), ces équations, savoir

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = \lambda\frac{d\mathrm{U}}{dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda\frac{d\mathrm{U}}{dy'},$$

ne seront plus qu'à trois variables, et pour que $\varphi = constante$ en soit une intégrale, il suffira que l'on ait

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{dt} + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dx'} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dy'}\right) = 0,$$

si φ contient x, y et t; il suffira même que l'on ait plus simplement

$$(5) \qquad \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dx'} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dy'} = 0,$$

si φ est une fonction de x et y, indépendante de t.

Admettons maintenant (ce qui sera démontré plus bas) que $x'dx + y'dy$ est une différentielle exacte, en sorte que l'on a

$$\int(x'\,dx + y'\,dy) = \theta, \quad \text{ou} \quad x' = \frac{d\theta}{dx}, \quad y' = \frac{d\theta}{dy},$$

θ étant une certaine fonction de x et y; en différentiant l'équation $\mathrm{U} = a$ par rapport à la constante arbitraire b dont x' et y' dépendent, il nous viendra

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx'}\cdot\frac{dx'}{db} + \frac{d\mathrm{U}}{dy'}\cdot\frac{dy'}{db} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\left(\frac{d\theta}{db}\right)}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dx'} + \frac{d\left(\frac{d\theta}{db}\right)}{dy}\cdot\frac{d\mathrm{U}}{dy'} = 0;$$

donc l'équation (5) sera satisfaite par $\varphi = \frac{d\theta}{db}$; donc aussi $\frac{d\theta}{db} =$ *constante* $= \beta$ sera une intégrale des équations (3) et par suite des équations (1).

Si λ est une fonction de t seulement, on trouvera aisément une quatrième intégrale. Différentions en effet par rapport à a l'équation $U = a$; nous aurons, en multipliant par λ,

$$- \lambda + \lambda \left(\frac{dU}{dx'} \cdot \frac{dx'}{da} + \frac{dU}{dy'} \cdot \frac{dy'}{da} \right) = 0,$$

ou

$$- \lambda + \lambda \left\{ \frac{d\left(\frac{d\theta}{da}\right)}{dx} \cdot \frac{dU}{dx'} + \frac{d\left(\frac{d\theta}{da}\right)}{dy} \cdot \frac{dU}{dy'} \right\} = 0,$$

d'où il suit que l'équation (4) sera satisfaite par $\varphi = \frac{d\theta}{da} - \int \lambda dt$, et que par conséquent, α étant une constante arbitraire, la dernière intégrale cherchée des équations (3) et (1) sera

$$\frac{d\theta}{da} = \int \lambda\, dt + \alpha.$$

Mais lorsque λ ne se réduit pas à une simple fonction de t, on doit se borner à tirer des trois intégrales connues les valeurs de trois des quantités x, x', y, y', des trois dernières par exemple, pour les reporter dans la première des équations (1) qui ne sera plus qu'à deux variables et dont il restera à trouver l'intégrale complète.

Il faut maintenant prouver le théorème admis plus haut, savoir que $x'dx + y'dy$ est une différentielle exacte, ou que $\frac{dx'}{dy} = \frac{dy'}{dx}$. Or les équations $U = a$, $V = b$, ayant fourni par hypothèse les valeurs de x', y', en fonction de x et y, devront fournir aussi celles de $\frac{dx'}{dy}$ et de $\frac{dy'}{dx}$; pour avoir $\frac{dy'}{dx}$, il faut différentier, par rapport à x, les deux équations $U = a$, $V = b$, puis résoudre par la règle ordinaire les deux équations nouvelles

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx} + \frac{dU}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0,$$
$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx} + \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0,$$

que cette différentiation produit. On trouve ainsi

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dV}{dx} \cdot \frac{dU}{dx'} - \frac{dV}{dx'} \cdot \frac{dU}{dx}}{\frac{dV}{dx'} \cdot \frac{dU}{dy'} - \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dU}{dx'}}.$$

En différentiant par rapport à y, on obtient de même

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{\frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dU}{dy'}}{\frac{dV}{dx'} \cdot \frac{dU}{dy'} - \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dU}{dx'}}.$$

Or, en vertu de l'équation (2), ces deux valeurs sont égales entre elles; ce qu'il fallait démontrer.

On prouverait de la même manière qu'en supposant x et y déterminés en fonction de x' et y' par les équations $U = a$, $V = b$, la quantité $xdx' + ydy'$ est une différentielle exacte, et ce nouveau théorème pourrait remplacer l'ancien dans la recherche des intégrales du système (1).

On peut, comme l'a observé M. Jacobi, appliquer les formules précédentes au cas d'un mobile qui se meut dans un plan, et qui est soumis à des actions fonctions des distances, émanant de deux centres fixes situés dans ce plan. En représentant par $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dQ}{dq}$, les fonctions des distances r et q par lesquelles ces actions sont exprimées, on a ici les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dR}{dx} - \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy},$$

que l'on remplacera, si l'on veut, par les quatre suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{d(R+Q)}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{d(R+Q)}{dy};$$

ces dernières se déduisent du système (1) en posant $\lambda = 1$, $U = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + R + Q$. Or on voit dans la *Mécanique analytique* (tome II, page 108), qu'outre l'intégrale $U = a$ des forces vives, il est très facile de trouver une seconde intégrale $V = b$; les deux autres intégrales cherchées se déduiront donc des formules de M. Jacobi.