JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur l'équation** $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 5 (1840), p. 360.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__360_0>

## *Sur l'équation* $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$;

### Par J. LIOUVILLE.

« Si l'équation $u^n + v^n = w^n$ est impossible en nombres entiers dif-
» férents de zéro, l'équation $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$ le sera également. »

En effet, l'impossibilité de l'équation $u^n + v^n = w^n$ entraîne, comme M. Lebesgue l'a fait voir (page 184 de ce volume), celle de l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$. Or si l'on avait $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$, en posant $Y^{2n} + x^n = z$, il viendrait $Z^{2n} - x^n = z$; on trouverait donc à la fois

$$z - x^n = Y^{2n}, \qquad z + x^n = Z^{2n},$$

d'où, en multipliant membre à membre et faisant pour abréger $YZ = y$, l'on tire

$$x^{2n} + y^{2n} = z^2,$$

résultat impossible. Donc l'équation proposée $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$ est impossible aussi. Elle l'est même pour $n = 2$, puisque alors elle conduit à la formule inadmissible $x^4 + y^4 = z^2$. Le théorème que je viens de démontrer est en lui-même très peu important; mais il se présente et paraît devoir être utile dans certaines questions relatives à la théorie des nombres : c'est ce qui m'a engagé à le donner ici.