JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur module

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 441-464.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__441_0>

MÉMOIRE

SUR LES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES

DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE,

CONSIDÉRÉES COMME FONCTIONS DE LEUR MODULE;

PAR J. LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 6 janvier 1840.)

1. En désignant par E, F, les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce qui répondent à l'amplitude α et au module x, on a, d'après les définitions de Legendre,

$$E = \int_0^\alpha d\alpha \sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha}, \qquad F = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha}}.$$

Quand on donne au module x une valeur déterminée, E et F deviennent des fonctions de l'amplitude α seulement; et j'ai fait voir que ces fonctions sont des transcendantes d'espèce supérieure qui ne peuvent pas s'exprimer en termes finis à l'aide des signes algébriques, exponentiels et logarithmiques [*]. Le seul cas où $x = 0$ fait exception, puisque l'on a alors $E = \alpha$, $F = \alpha$.

Maintenant, au contraire, attribuons à l'amplitude α une valeur déterminée différente de zéro, en laissant quelconque le module x. Dans cette hypothèse, E, F seront des fonctions de x, et je me propose de prouver que ces quantités ne sont pas non plus des fonctions finies explicites de x. On peut même ajouter qu'elles ne s'exprimeraient pas davantage en termes finis si l'on joignait aux signes algébriques, expo-

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 23me cahier.

nentiels et logarithmiques, le signe $\int$, indiquant une intégrale indéfinie relative à la variable x, c'est-à-dire une intégrale dont la limite supérieure est x et dont la limite inférieure est une constante déterminée ou arbitraire. Ce nouveau théorème est par rapport au module x, ce que l'ancien est par rapport à l'amplitude α ; il était, si je ne me trompe, plus difficile à démontrer rigoureusement. Je n'y suis parvenu d'abord qu'en m'appuyant sur la forme particulière des séries auxquelles donnent naissance les fonctions algébriques d'une variable lorsqu'on les développe suivant les puissances ascendantes ou descendantes de cette variable. Mais en continuant mon travail j'ai réussi enfin à m'affranchir de toute considération relative aux suites infinies. C'est ce que l'on verra dans les numéros suivants.

2. Rappelons d'abord que la fonction F satisfait à une équation différentielle du second ordre dans laquelle x est la variable indépendante. En effet, si l'on différentie la valeur de E, on a

$$\frac{d\mathrm{E}}{dx} = -\int_0^\alpha \frac{x \sin^2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha}},$$

et par conséquent,

$$(1) \qquad x\frac{d\mathrm{E}}{dx} = \mathrm{E} - \mathrm{F}.$$

D'un autre côté, en différentiant la valeur de F, on obtient

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} = \int_0^\alpha \frac{x \sin^2\alpha\, d\alpha}{(1 - x^2 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

c'est-à-dire

$$x\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \mathrm{F} = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{(1 - x^2 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or il est aisé de vérifier que

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{(1 - x^2 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{E}}{1 - x^2} - \frac{x^2}{1 - x^2} \cdot \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha}}.$$

On a donc

$$(2) \qquad x\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \mathrm{F} = \frac{\mathrm{E}}{1 - x^2} - \frac{x^2}{1 - x^2} \cdot \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha}}.$$

L'équation (2) fournit la valeur de E, et par suite celle de $\frac{dE}{dx}$; en portant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve finalement

$$(3)\qquad (x-x^3)\frac{d^2F}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dF}{dx}-xF=-\frac{x\sin\alpha\cos\alpha}{(1-x^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Telle est l'équation différentielle du second ordre à laquelle F satisfait. Nous aurons prouvé que pour aucune valeur de α, différente de zéro, F n'est une fonction explicite finie de x, si nous faisons voir que, sauf l'intégrale insignifiante $z=0$ dont on doit toujours faire abstraction, l'équation

$$(4)\qquad (x-x^3)\frac{d^2z}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dz}{dx}-xz=-\frac{x\sin\alpha\cos\alpha}{(1-x^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

à laquelle satisfait évidemment l'intégrale $z=F$, n'est jamais vérifiée par une valeur de z exprimable en fonction finie explicite de x.

3. Le second membre de l'équation (4) disparaît lorsque l'amplitude α est un multiple de $\frac{\pi}{2}$. Examinons avec étendue ce cas particulier, auquel il sera facile de ramener ensuite le cas général, et discutons en conséquence l'équation

$$(x-x^3)\frac{d^2z}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dz}{dx}-xz=0,$$

ou plutôt l'équation plus simple

$$(5)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2}y,$$

que l'on en déduit en posant

$$z=\frac{y}{\sqrt{x-x^3}}.$$

Cette équation (5) est un cas particulier de l'équation

$$(6)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=Py,$$

où P est une fonction quelconque de x, et dont nous allons d'abord nous occuper d'une manière générale.

4. Désignons par μ un nombre entier positif, et par $y_1, y_2, \ldots, y_m$, des intégrales de l'équation (6) en nombre quelconque. Il est aisé de voir, et j'ai prouvé ailleurs [*] que si l'on pose

$$u = y_1^\mu + y_2^\mu + \ldots + y_m^\mu,$$

u dépendra d'une certaine équation différentielle linéaire de l'ordre $(\mu+1)$, que l'on obtiendrait en considérant les $(\mu+1)$ équations que voici

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dx} = u',\\ &\frac{du'}{dx} = \mu P u + u'',\\ &\frac{du''}{dx} = 2(\mu-1)Pu' + u''',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{du^{(i)}}{dx} = i(\mu-i+1)Pu^{(i-1)} + u^{(i+1)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu P u^{(\mu-1)}, \end{aligned}\right.$$

puis éliminant les μ quantités auxiliaires u', u'', ..., $u^{(\mu)}$.

Soient Y_1, Y_2, deux intégrales de l'équation (6), distinctes entre elles, et g une constante arbitraire; $Y_1 + gY_2$ sera une intégrale de l'équation (6), de sorte que l'équation linéaire de l'ordre $(\mu+1)$ dont u dépend sera satisfaite si l'on pose

$$u = (Y_1 + gY_2)^\mu,$$

ou

$$u = Y_1^\mu + \frac{\mu}{1} g Y_1^{\mu-1} Y_2 + \ldots + g^\mu Y_2^\mu.$$

---

[*] Tome IV de ce Journal, page 429.

Or g étant une constante arbitraire, cette intégrale de l'équation linéaire en u entraîne les intégrales suivantes :

$$u = Y_1^\mu, \quad u = Y_1^{\mu-1} Y_2, \ldots, \quad u = Y_2^\mu.$$

Donc, en désignant par A, $A_1, \ldots, A_\mu$, des constantes arbitraires, on pourra encore poser

$$u = AY_1^\mu + A_1 Y_1^{\mu-1} Y_2 + \ldots + A_\mu Y_2^\mu.$$

Enfin si l'on observe que toute intégrale $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, de l'équation (6), peut s'exprimer par $aY_1 + bY_2$, a et b étant des constantes convenables, et que par suite le produit $y_1 y_2 \ldots y_\mu$, se réduit à la forme

$$AY_1^\mu + A_1 Y_1^{\mu-1} Y_2 + \ldots + A_\mu Y_2^\mu;$$

on en conclura que l'équation en u sera également satisfaite par $u = y_1 y_2 \ldots y_\mu$.

5. En appliquant les équations (7) au cas où P est un simple monome de la forme $\frac{a}{x^2}$, on est conduit à démontrer un théorème d'algèbre qui nous sera utile par la suite. Supposons la constante $4a + 1$ différente de zéro, afin que les racines β, γ, de l'équation $\theta(\theta - 1) = a$ soient inégales. L'intégrale de l'équation (6) est alors

$$y = Bx^\beta + Cx^\gamma.$$

On satisfera donc à l'équation linéaire dont u dépend en prenant

$$u = Ax^{\mu\beta} + A_1 x^{(\mu-1)\beta+\gamma} + \ldots + A_\mu x^{\mu\gamma}.$$

Il suit de là que si, après avoir posé $P = \frac{a}{x^2}$, on cherche à satisfaire aux équations (7) en prenant $u = x^r$, l'équation de condition dont l'exposant r dépendra, devra avoir les racines

$$r = \mu\beta, \quad r = (\mu - 1)\beta + \gamma, \ldots, \quad r = \mu\gamma.$$

Or quand on fait $u = x^r$ dans les équations (7), on trouve pour

u', u'',..., $u^{(i)}$,..., $u^{(\mu)}$, des valeurs monomes de la forme

$$u' = h_1 x^{r-1}, \quad u'' = h_2 x^{r-2}, \ldots, \quad u^{(i)} = h_i x^{r-i}, \ldots,$$

les coefficients h_1, h_2, ..., h_i, ..., étant liés entre eux par cette série d'égalités

$$\begin{aligned}
h_1 &= r,\\
h_2 &= (r-1)h_1 - a\mu,\\
h_3 &= (r-2)h_2 - a.2(\mu-1)h_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_{i+1} &= (r-i)h_i - a.i(\mu-i+1)h_{i-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_{\mu+1} &= (r-\mu)h_\mu - a.\mu h_{\mu-1}.
\end{aligned}$$

On a ajouté, pour la symétrie, le coefficient $h_{\mu+1}$, et c'est en posant $h_{\mu+1} = 0$, que l'on doit déterminer r. Cette équation $h_{\mu+1} = 0$ est évidemment de degré $\mu + 1$, et elle doit avoir les $(\mu + 1)$ racines $r = \mu\beta$, $r = (\mu - 1)\beta + \gamma$, ..., $r = \mu\gamma$. Par suite le polynome $h_{\mu+1}$ est décomposable dans le produit des facteurs

$$[r - \mu\beta]\,[r - (\mu - 1)\beta - \gamma]\ldots\ldots[r - \mu\gamma].$$

Cette décomposition ayant lieu en général, il est aisé de voir qu'elle subsistera même pour la valeur particulière de a qui rend égaux entre eux les facteurs simples écrits ci-dessus. En prenant donc $a = -\frac{1}{4}$, ce qui donne $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, il viendra

$$h_{\mu+1} = \left(r - \frac{\mu}{2}\right)^{\mu+1};$$

ainsi $h_{\mu+1}$ ne pourra s'évanouir que pour $r = \frac{\mu}{2}$. De là ce théorème, qui pourrait se démontrer par d'autres moyens : *les racines r de l'équation qu'on obtient en posant $h_{\mu+1} = 0$, après avoir déterminé $h_{\mu+1}$*

à l'aide des formules

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 &= r,\\ h_2 &= (r-1)\,h_1 + \frac{\mu}{4},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ h_{i+1} &= (r-i)\,h_i + \frac{i(\mu-i+1)}{4}\,h_{i-1},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ h_{\mu+1} &= (r-\mu)\,h_\mu + \frac{\mu}{4}\,h_{\mu-1}, \end{aligned}\right.$$

sont toutes égales entre elles et à $\frac{\mu}{2}$.

6. Revenons maintenant à l'équation (5), laquelle répond au cas de

$$P = -\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2},$$

et prouvons que cette équation (5) n'a pas d'intégrale algébrique. Par une méthode identique avec celle du n° **5** de mon Mémoire *sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies* [*], on démontrera d'abord que si l'équation (5) avait une intégrale algébrique, le système des équations (7), où l'on doit prendre désormais

$$P = -\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2},$$

devrait, pour des valeurs convenables de μ, être vérifiée par une valeur de u rationnelle et différente de zéro. Prouvons qu'une telle valeur de u est impossible.

Si la valeur de u était une fraction rationnelle, son dénominateur réduit à sa plus simple expression, ne pourrait contenir aucun facteur $(x-p)$, différent des facteurs x, $x-1$, $x+1$, qui se trouvent déjà dans le dénominateur de P. En effet, si $x-p$ se trouvait dans le dé-

[*] Voyez tome IV de ce Journal, page 431.

nominateur de u avec l'exposant ρ, la théorie connue de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples et la considération attentive des équations (7) nous montrent que ce même facteur entrerait dans les dénominateurs de u', u'',..., $u^{(\mu-1)}$, $u^{(\mu)}$, $\frac{du^{(\mu)}}{dx}$, avec les exposants respectifs $\rho+1$, $\rho+2$,..., $\rho+\mu-1$, $\rho+\mu$, $\rho+\mu+1$; or cela est absurde puisqu'on a $\frac{du^{(\mu)}}{dx}=\mu P u^{(\mu-1)}$.

Je dis, de plus, que le dénominateur de u ne peut pas contenir les facteurs x, $x-1$, $x+1$. La démonstration est la même pour ces trois facteurs, et il nous suffira de considérer le premier d'entre eux.

Décomposons en fractions simples les fractions rationnelles qui représentent par hypothèse les valeurs de u, u', etc., et désignons par

$$\frac{B}{x^\rho} \quad \text{ou} \quad Bx^r,$$

le terme de u où x entre en dénominateur avec le plus grand exposant possible. Il y aura dans P un terme semblable, et ce terme sera

$$-\frac{1}{4x^2} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{4}x^{-2}.$$

L'équation $\frac{du}{dx}=u'$, nous montre que u' en contiendra aussi un, savoir :

$$-\frac{\rho B}{x^{\rho+1}} \quad \text{ou} \quad rBx^{r-1}.$$

Nous le représenterons par $B_1 x^{r-1}$, et nous aurons

$$B_1 = rB.$$

L'équation

$$\frac{du'}{dx}=\mu P u + u''$$

nous montre de même que la fraction simple provenant de la décomposition de u'', où x se trouve en dénominateur avec le plus grand exposant possible, est

$$B_2 x^{r-2},$$

B_2 étant lié à B et B_1 par la formule

$$B_2 = (r-1) B_1 + \frac{\mu B}{4}.$$

En général, le plus grand exposant de x dans le dénominateur de $u^{(i)}$ ne peut pas surpasser $\rho + i$ ou $i - r$, et l'on peut toujours supposer qu'il existe une fraction simple correspondante, savoir,

$$\frac{B_i}{x^{\rho+i}} \quad \text{ou} \quad B_i x^{r-i};$$

seulement nous ne pouvons pas affirmer *à priori* que B_i aura une valeur différente de zéro. Ajoutons que l'équation

$$\frac{du^{(i)}}{dx} = i(\mu - i + 1) P u^{(i-1)} + u^{(i+1)}$$

entraînera dans tous les cas celle-ci :

$$B_{i+1} = (r - i) B_i + \frac{i(\mu - i + 1)}{4} B_{i-1}.$$

La formule que je viens d'écrire s'étendra même au cas où $i = \mu$, si l'on a soin de remplacer la dernière équation du système (7) par ces deux autres

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu P u^{(\mu-1)} + u^{(\mu+1)}, \quad u^{(\mu+1)} = 0,$$

dont la seconde exige que $B_{\mu+1} = 0$. Maintenant si l'on divise par B toutes les équations trouvées entre B, $B_1, \ldots, B_{\mu+1}$, et si l'on fait en général

$$\frac{B_i}{B} = h_i,$$

on devra avoir, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
h_1 &= r,\\
h_2 &= (r-1)\,h_1 + \frac{\mu}{4},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
h_{i+1} &= (r-i)\,h_i + \frac{i(\mu-i+1)}{4}\,h_{i-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
h_{\mu+1} &= (r-\mu)\,h_\mu + \frac{\mu}{4}\,h_{\mu-1},
\end{aligned}$$

puis

$$h_{\mu+1} = 0.$$

Or cela est impossible, la valeur de r étant négative, car les formules que nous trouvons sont précisément celles du système (8), et nous avons vu, n° 5, que les racines de l'équation $h_{\mu+1} = 0$ sont toutes positives et égales à $\frac{\mu}{2}$.

7. La même démonstration s'appliquant aux facteurs $x-1$, $x+1$ [*], il en résulte que u ne peut être rationnelle sans se réduire à un polynome entier. Mais cette réduction n'a pas lieu nécessairement pour les autres inconnues $u^{(\mu)}$, $u^{(\mu-1)}$, etc., qui entrent dans le système des équations (7). Cela étant, désignons par X un polynome tel, qu'en multipliant par X ou par sa dérivée une quelconque des quantités $u^{(i)}$, $\mathrm{P}u^{(i)}$, le produit obtenu soit toujours entier. Les équations (7) multipliées par X peuvent se mettre sous la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d.\mathrm{X}u}{dx} - u\,\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \mathrm{X}u',\\
&\frac{d.\mathrm{X}u'}{dx} - u'\,\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \mu\mathrm{P}\mathrm{X}u + \mathrm{X}u'',\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d.\mathrm{X}u^{(i)}}{dx} - u^{(i)}\,\frac{d\mathrm{X}}{dx} = i(\mu-i+1)\,\mathrm{P}\mathrm{X}u^{(i-1)} + \mathrm{X}u^{(i+1)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d.\mathrm{X}u^{(\mu)}}{dx} - u^{(\mu)}\,\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \mu\mathrm{P}\mathrm{X}u^{(\mu-1)}.
\end{aligned}\right.$$

[*] Il faut, bien entendu, considérer alors d'une manière spéciale les fractions simples ayant pour dénominateurs les puissances les plus élevées de $x-1$ ou de $x+1$.

Désignons par ax^r le premier terme du polynome u ordonné suivant les puissances descendantes de x; désignons de même par Ax^m le premier terme de X, en sorte que l'on ait

$$Xu = Aax^{m+r} + \text{etc.}$$

La première des équations (9) nous fournira

$$Xu' = Aarx^{m+r-1} + \text{etc.},$$

c'est-à-dire

$$Xu' = Aah_1x^{m+r-1} + \text{etc.},$$

en posant $h_1 = r$. L'équation

$$\frac{d.Xu'}{dx} - u'\frac{dX}{dx} = \mu PXu + Xu''$$

nous fournira ensuite

$$Xu'' = \frac{d.Xu'}{dx} - u'\frac{dX}{dx} - \mu PXu.$$

Or le produit μPXu doit se réduire à une fonction entière, et (d'après la composition de P, X et u) il est aisé de voir que le premier terme de cette fonction entière sera

$$-\frac{\mu}{4}.Aax^{m+r-2};$$

on aura donc

$$Xu'' = Aa\left[(r-1)h_1 + \frac{\mu}{4}\right]x^{m+r-2} + \text{etc.},$$

ou

$$Xu'' = Aah_2x^{m+r-2} + \text{etc.},$$

en posant

$$h_2 = (r-1)h_1 + \frac{\mu}{4}.$$

En continuant ainsi on s'assurera que le degré du polynome $Xu^{(i)}$ ne peut pas surpasser $m+r-i$, et que par suite on a le droit de poser

$$Xu^{(i)} = Aah_ix^{m+r-i} + \text{etc.},$$

57..

h_i se réduisant à zéro si le terme en x^{m+r-i} manque dans $\mathrm{X}u^{(i)}$. En vertu de l'équation

$$\frac{d.\mathrm{X}u^{(i)}}{dx} - u^{(i)}\frac{d\mathrm{X}}{dx} = i(\mu - i + 1)\,\mathrm{PX}u^{(i-1)} + \mathrm{X}u^{(i+1)},$$

on trouvera d'ailleurs

$$h_{i+1} = (r-i)\,h_i + \frac{i(\mu - i + 1)}{4}\,h_{i-1},$$

relation qui s'étendra même à la valeur $i = \mu$ si l'on remplace la dernière des équations (9) par ces deux autres

$$\frac{d.\mathrm{X}u^{(\mu)}}{dx} - u^{(\mu)}\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \mu\mathrm{PX}u^{(\mu-1)} + \mathrm{X}u^{(\mu+1)}, \quad \mathrm{X}u^{(\mu+1)} = 0,$$

dont la seconde exige que $h_{\mu+1} = 0$. L'exposant r se trouve ainsi déterminé, et nous voyons qu'il est égal à $\frac{\mu}{2}$, puisque les relations établies entre h_1, h_2, etc., coïncident avec celles du système (8).

8. Le premier terme du polynome u, ordonné suivant les puissances descendantes de x, a donc pour exposant $\frac{\mu}{2}$. Mais si l'on recommence les calculs précédents en ordonnant ce même polynome u et tous les autres polynomes $\mathrm{X}u^{(i)}$, $u^{(i)}\frac{d\mathrm{X}}{dx}$, suivant les puissances ascendantes de x, on trouvera précisément les mêmes équations pour déterminer le degré du premier terme de u, et l'on conclura de nouveau que ce degré $= \frac{\mu}{2}$. Cela tient à la forme particulière de la fraction

$$\mathrm{P} = -\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2}.$$

Cette forme est en effet telle que si U et PU sont des polynomes entiers, le premier terme de PU s'obtiendra toujours en divisant par $-4x^2$ le premier terme de U, soit qu'on ait ordonné par rapport aux puissances descendantes de x, soit qu'on ait ordonné par rapport aux puissances ascendantes. Il suit de là que le terme de u du degré le plus élevé et le terme de u du degré le moins élevé ont les mêmes exposants $\frac{\mu}{2}$.

Par conséquent u ne peut être qu'un monome de la forme $ax^{\frac{\mu}{2}}$. Examinons si cette valeur de u s'accorde avec les équations (7). De la première de ces équations on tire

$$u' = \frac{\mu}{2}.ax^{\frac{\mu}{2}-1};$$

la seconde donne ensuite

$$u'' = \frac{\mu(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2}.ax^{\frac{\mu}{2}} + \frac{a\mu(\mu-2)}{4}x^{\frac{\mu}{2}-2};$$

le facteur $x-1$ se trouve ici en dénominateur avec l'exposant 2, et la fraction simple qui le contient ainsi à la seconde puissance est

$$\frac{a\mu}{4(x-1)^2}:$$

en posant

$$h_2 = \frac{\mu}{4},$$

on peut la représenter par

$$\frac{ah_2}{(x-1)^2}.$$

En se servant des équations successives (7), on verra de même aisément que le facteur $x-1$ entre tout au plus à la puissance i dans le dénominateur de $u^{(i)}$, et que par conséquent on a le droit d'y supposer représentée par

$$\frac{ah_i}{(x-1)^i}$$

la fraction simple pour laquelle l'exposant de $x-1$ est le plus grand possible. De plus on trouve $h_3 = -2h_2$, puis, pour $i>2$,

$$h_{i+1} = -ih_i + \frac{i(\mu-i+1)}{4}h_{i-1},$$

relation que l'on peut étendre même au cas de $i=\mu$, en remplaçant, comme au n° **6**, la dernière des équations (7) par les deux autres

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu P u^{(\mu-1)} + u^{(\mu+1)}, \quad u^{(\mu+1)} = 0,$$

dont la seconde exige que $h_{\mu+1} = 0$. Mais les équations

$$h_2 = \frac{\mu}{4}, \ldots, \; h_{i+1} = -ih_i + \frac{i(\mu - i + 1)}{4} h_{i-1}, \ldots, \; h_{\mu+1} = 0,$$

que nous venons de former, sont incompatibles, puisqu'elles se déduisent du système (8) en donnant à r la valeur o qui ne peut annuler $h_{\mu+1}$, comme on l'a vu n° 5. Donc la valeur de u ne peut pas être exprimée par un monome; donc cette valeur de u n'est pas rationnelle; donc aussi les intégrales $y_1, y_2, \ldots$, de l'équation (5) ne s'expriment jamais algébriquement. Notre analyse prouve en même temps que les produits formés d'un nombre μ quelconque de ces intégrales ne se réduisent jamais à une fonction algébrique et rationnelle de x : on a vu en effet (n° 4) que ces produits satisfont à la même équation que u.

9. Cherchons à présent s'il y a une intégrale de l'équation (5) qui puisse s'exprimer en joignant aux signes algébriques les signes exponentiels et logarithmiques. Or, quelle que soit la fonction *algébrique* P, j'ai prouvé dans un autre Mémoire [*] que pour que l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Py,$$

dont l'équation (5) n'est qu'un cas particulier, ait une intégrale du genre de celle dont nous venons de parler, il faut que l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = P$$

puisse être vérifiée par une valeur algébrique de t. J'ajouterai ici, que ce théorème subsisterait encore lors même que pour obtenir la valeur

[*] Voyez les n^os 9, 10 et 11 de mon *Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites*, tome IV de ce Journal, page 435. A la vérité dans ce Mémoire j'ai eu surtout en vue le cas où P est un simple polynome entier; mais cela n'empêche pas l'analyse dont j'ai fait usage de s'étendre à une fonction algébrique quelconque.

de y on serait obligé de joindre le signe $\int$ d'intégration indéfinie aux signes algébriques, exponentiels et logarithmiques; cela tient à ce que les fonctions qui naissent de l'emploi du signe $\int$ jouissent, dans ce genre de recherches, de propriétés toutes semblables à celles des logarithmes [*]. Ce théorème fondamental étant admis, je dis que toutes les fois qu'il est impossible d'obtenir une fonction rationnelle de x en multipliant entre elles des intégrales de l'équation (6) [ce qui arrive en effet, comme on l'a vu tout-à-l'heure, pour la valeur particulière de P qui répond à l'équation (5)], l'équation algébrique irréductible dont t dépend ne peut être que du premier degré. En effet, si cette équation était d'un degré $i > 1$, ses racines $t_1, t_2, \ldots, t_i$ donneraient naissance à une suite de fonctions

$$y_1 = e^{\int t_1 dx},\quad y_2 = e^{\int t_2 dx}, \ldots, y_i = e^{\int t_i dx},$$

qui toutes seraient des intégrales particulières de l'équation (6). Cela est démontré dans le n° **12** du Mémoire cité en tête de ce numéro, et l'on y fait voir de plus que le produit de deux quelconques des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_i$, est de la forme

$$y_m y_n = \frac{C}{t_m - t_n},$$

[*] C'est ce que j'ai déjà remarqué à la fin du Mémoire dont il est question dans la Note précédente. Au reste, dès qu'on admet le signe $\int$ d'intégration relative à x dans les fonctions dont on s'occupe, on peut renoncer aux signes logarithmiques que le signe $\int$ remplace immédiatement, puisque l'on a

$$\log f(x) = \int_a^x \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} + \log f(a).$$

Les nouvelles fonctions finies explicites auxquelles donnera lieu le signe $\int$ combiné un nombre limité de fois avec les signes algébriques et les signes exponentiels se partageront en espèces, comme les anciennes, d'après le nombre des signes transcendants qui portent les uns sur les autres. Enfin, pour bien comprendre quelle est, dans ce genre de recherches, l'analogie des fonctions intégrales avec les fonctions logarithmiques, il suffit d'observer que si l'on a $\theta = \int v dx$, la différentielle de la fonction $\varphi(x, \mu + \theta)$, où μ est une constante, se déduira de celle de $\varphi(x, \theta)$, savoir $\varphi'x(x, \theta) + \varphi'\theta(x, \theta)v$, en y remplaçant simplement θ par $\mu + \theta$, ce qui est précisément (voyez la note au bas de la page 527, tome III de ce Journal) la propriété fondamentale qui nous sert en général pour traiter les fonctions logarithmiques.

C étant une constante différente de zéro. Multipliant entre elles les $\frac{i(i-1)}{2}$ équations qui se déduisent de celle que nous venons d'écrire, puis élevant au carré le résultat final, on aura donc

$$(y_1 y_2 \ldots y_i)^2 = \frac{B}{(t_2-t_1)^2 (t_3-t_1)^2 \ldots (t_{i-1}-t_i)^2},$$

B étant une nouvelle constante différente de zéro, et

$$(t_2 - t_1)^2 \ (t_3 - t_1)^2 \ldots \ (t_{i-1} - t_i)^2$$

étant au signe près le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines $t_1, t_2, \ldots, t_i$. Ce dernier terme étant nécessairement rationnel, il faudrait que $(y_1 y_2 \ldots y_i)^2$ le fût aussi; or cela est absurde, car $(y_1 y_2 \ldots y_i)^2$ est le produit de $2i$ intégrales de l'équation (6), et, par hypothèse, un tel produit ne peut pas s'exprimer en fonction rationnelle de x.

10. Pour compléter notre démonstration et prouver que l'équation (5) n'a aucune intégrale de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x, il nous reste encore à montrer que l'équation

$$(10) \qquad \frac{dt}{dx} + t^2 = -\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2}$$

ne peut pas être vérifiée par une valeur rationnelle de t.

Cette valeur rationnelle, si elle existait, se composerait d'une partie entière exprimée par un polynome d'un certain degré m et d'une partie fractionnaire. Or si la partie entière de t est de degré m, celles de t^2, $\frac{dt}{dx}$ et $\frac{dt}{dx} + t^2$ seront respectivement de degré $2m$, $m-1$, $2m$, ce qu'on ne peut admettre, puisque le second membre de l'équation (10) est une fraction proprement dite. Cette conclusion subsiste même dans le cas où $m = 0$, comme il est aisé de s'en assurer. Il suit de là que la partie entière de t est identiquement nulle ou que t est une fraction proprement dite. Décomposons cette fraction rationnelle en fractions simples, et il y aura au moins une de ces fractions qui sera de la forme

$$\frac{\mathrm{A}}{x^n},$$

A ne se réduisant pas à zéro. En effet, si t ne contenait pas le facteur x en dénominateur, $\frac{dt}{dx}$ ne le contiendrait pas non plus, ce qui est absurde, puisque x entre en diviseur dans le second membre. Cela posé, parmi les fractions de la forme

$$\frac{\mathrm{A}}{x^n}$$

qui peuvent résulter de la décomposition de t, je considère spécialement celle pour laquelle l'exposant n est le plus grand possible, puis je mets la valeur de t sous la forme

$$t = \frac{\mathrm{A}}{x^n} + \Psi,$$

Ψ étant une nouvelle fraction dans le dénominateur de laquelle x ne peut pas entrer plus de $n - 1$ fois. On en tirera

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{n\mathrm{A}}{x^{n+1}} + \Psi',$$

$$t^2 = \frac{\mathrm{A}^2}{x^{2n}} + \Psi'',$$

Ψ' et Ψ'' étant des fractions dont les dénominateurs ne peuvent contenir x à des puissances plus grandes que n et $2n - 1$. L'équation (10) nous donne

$$\frac{\mathrm{A}^2}{x^{2n}} - \frac{n\mathrm{A}}{x^{n+1}} + \Psi' + \Psi'' = -\frac{(1 + x^2)^2}{4(x - x^3)^2}:$$

si n est > 1, on arrive donc à une absurdité, car on obtient pour valeur de $\frac{\mathrm{A}^2}{x^{2n}}$ une fraction dans laquelle x n'entre en dénominateur qu'avec un exposant $< 2n$; si $n = 1$, cette absurdité disparaît et l'on a

$$\frac{A^2 - A}{x^2} + \Psi' + \Psi'' = -\frac{(1 + x^2)^2}{4(x - x^3)^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A^2 - A}{x^2} = -\Psi' - \Psi'' - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)},$$

d'où résulte nécessairement

$$A^2 - A = -\frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi la fraction $\frac{1}{2x}$ est la seule fraction de la forme

$$\frac{A}{x^n}$$

qui puisse résulter de la décomposition de t. On verra de la même manière que

$$\frac{1}{2(x-1)}, \quad \frac{1}{2(x+1)},$$

sont aussi les seules fractions de la forme

$$\frac{A}{(x-1)^n}, \quad \frac{A}{(x+1)^n},$$

auxquelles on puisse être conduit. Mais il peut en outre exister dans la valeur de t décomposée des fractions de la forme

$$\frac{A}{(x-p)^n},$$

p étant une constante qui ne se réduit ni à zéro, ni à l'unité prise positivement ou négativement. En suivant la même marche que ci-dessus on trouvera que pour ces fractions $n = 1$ et $A = 1$. La valeur de t doit donc être de la forme

$$t = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x-p} + \ldots + \frac{1}{x-q}.$$

Mais il suivrait de là que l'équation (5) serait satisfaite en posant

$$y = e^{\int t\,dx} = (x-p)\ldots(x-q)\sqrt{x-x^3},$$

c'est-à-dire

$$y = \textit{une fonction algébrique de } x,$$

ce qui est absurde. Donc t n'a pas de valeur rationnelle. Donc aussi y n'est pas une fonction finie explicite de x; ce qu'il fallait démontrer.

11. Ayant ainsi traité complétement le cas où l'équation (4) n'a pas de second membre, je vais maintenant y ramener le cas général. Et d'abord je vais prouver que si l'équation (4) a une intégrale exprimable en fonction finie explicite de x, l'intégrale dont il s'agit sera purement algébrique. Car si l'on nie cela, soit m l'indice de la fonction finie explicite vérifiant l'équation (4), et réduisons à son *minimum* le nombre des transcendantes monomes de $m^{ième}$ espèce contenues dans cette fonction. Je dis qu'aucune d'elles ne sera de la forme e^v. Dans l'hypothèse contraire posons en effet $e^v = \theta$ et

$$z = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes de $m^{ième}$ espèce. En différentiant on aura

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\,\theta\,\frac{dv}{dx} = f(x, \theta),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f'_x(x, \theta) + f'_\theta(x, \theta)\,\theta\,\frac{dv}{dx} = F(x, \theta),$$

et $f(x, \theta)$, $F(x, \theta)$ seront des fonctions du même genre que $\varphi(x, \theta)$, c'est-à-dire des fonctions algébriques par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes de $m^{ième}$ espèce. Pour que l'équation (4) soit satisfaite, il faudra donc que l'on ait

$$(x-x^3)F(x, \theta) + (1-3x^2)f(x, \theta) - x\varphi(x, \theta) = -\frac{x \sin\alpha \cos\alpha}{(1-x^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

équation dans laquelle on aura le droit de remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une constante quelconque [*]. Ainsi, quel que soit μ, il viendra

$$(x-x^3)\,\mathrm{F}(x,\mu\theta)+(1-3x^2)f(x,\mu\theta)-x\varphi(x,\mu\theta)=-\frac{x\sin\alpha\cos\alpha}{(1-x^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais c'est là précisément le résultat qu'on aurait obtenu en posant

$$z=\varphi(x,\mu\theta),$$

puisque la différentiation aurait donné

$$\frac{dz}{dx}=\varphi'_x(x,\mu\theta)+\varphi'_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\,\mu\theta\,\frac{dv}{dx}=f(x,\mu\theta),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f'_x(x,\mu\theta)+f'_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\,\mu\theta\,\frac{dv}{dx}=\mathrm{F}(x,\mu\theta).$$

Donc on satisfera à l'équation (4) en posant $z=\varphi(x,\mu\theta)$, d'où il suit que l'équation qui s'en déduit en supprimant le second membre aura cette intégrale

$$\varphi(x,\mu\theta)-\varphi(x,\theta);$$

or cela est absurde, puisque aucune des intégrales de l'équation dont il s'agit ne peut être une fonction finie explicite de x.

On arrivera à une absurdité du même genre si l'on suppose que z puisse contenir un logarithme de $m^{ième}$ espèce tel que $\theta=\log v$; seulement, dans les calculs qui précèdent, on devra remplacer θ par $\mu+\theta$ et non plus par $\mu\theta$. Je ferai observer que les mêmes raisonnements s'appliqueraient aux fonctions produites par l'emploi du signe d'intégration indéfinie $\int$. Ces fonctions ne peuvent être admises dans la valeur de z sans conduire à une absurdité. Les transcendantes étant ainsi exclues de la valeur de z, il reste à examiner si cette valeur peut être algébrique; dès qu'il sera prouvé qu'elle ne peut pas l'être, on aura le droit de conclure qu'elle n'est exprimable explicitement par aucune formule renfermant un nombre limité de fois les signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et le signe $\int$ d'intégration indéfinie.

---

[*] Voyez tome II de ce Journal, page 76.

12. Désignons par λ une fonction algébrique irrationnelle quelconque, et par L, M,..., N, des fonctions rationnelles de x, puis considérons l'équation linéaire

$$L\frac{d^m z}{dx^m} + M\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \ldots + Nz = T, \tag{11}$$

où le second membre est supposé fonction rationnelle de x et de λ. Si l'équation (11) est satisfaite en prenant pour z une fonction algébrique de x, elle le sera aussi en prenant pour z une certaine fonction rationnelle de x et de λ.

En effet, la valeur de z algébrique en x qui satisfait par hypothèse à l'équation (11), peut être regardée comme une fonction algébrique de x et de λ déterminée par une équation irréductible de la forme

$$z^\mu + Kz^{\mu-1} + \text{etc.} = 0, \tag{12}$$

dont les coefficients K, etc., sont rationnels en x et λ Les dérivées successives de z s'obtiendront aisément en différentiant l'équation (12), et elles seront toutes fonctions rationnelles de x, λ et z: en les substituant dans le premier membre de l'équation (11) et désignant par f une fonction rationnelle, on aura donc

$$f(x, \lambda, z) = T. \tag{13}$$

Mais l'équation (12) étant irréductible, si une de ses racines z_1 satisfait à l'équation (13), les autres $z_2, \ldots, z_\mu$, devront y satisfaire aussi. En d'autres termes l'équation (11) ne peut avoir l'intégrale $z = z_1$ sans avoir en même temps les intégrales $z = z_2, \ldots, z = z_\mu$, et par suite l'intégrale

$$z = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_\mu}{\mu} = -\frac{K}{\mu},$$

c'est-à-dire

$$z = \textit{fonction rationnelle de } x \text{ et } \lambda,$$

ce qu'il fallait démontrer.

En appliquant ce théorème à l'équation

$$(4)\qquad (x-x^3)\frac{d^2z}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dz}{dx}-xz=-\frac{x\sin\alpha\cos\alpha}{(1-x^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

on voit que l'existence d'une intégrale algébrique entraîne celle d'une intégrale de la forme

$$z=u+v\sqrt{1-x^2\sin^2\alpha},$$

u et v étant des fonctions rationnelles de x; d'ailleurs si une telle intégrale existe, il faudra qu'après la substitution de z dans l'équation (4) la partie rationnelle soit nulle, indépendamment de la partie irrationnelle, ce qui donnera

$$(x-x^3)\frac{d^2u}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{du}{dx}-xu=0,$$

et par suite $u=0$, puisque $u=0$ est la seule intégrale algébrique que puisse posséder l'équation en u, équation qui n'est autre que l'équation (4) privée du second membre. La valeur de z sera donc simplement

$$z=v\sqrt{1-x^2\sin^2\alpha}.$$

13. La fonction rationnelle v peut être regardée en général comme composée d'une partie entière et d'une partie fractionnaire contenant un certain nombre de fractions de la forme

$$\frac{a}{(x-p)^i}.$$

Désignant par n le degré de la partie entière, ne mettant d'ailleurs en évidence qu'une des fractions simples, et supposant que la fraction simple ainsi indiquée explicitement soit parmi les fractions qui ont $x-p$ en diviseur celle pour laquelle l'exposant i est le plus grand, nous écrirons

$$z=\left[Ax^n+\ldots+\frac{a}{(x-p)^i}+\ldots\right]\sqrt{1-x^2\sin^2\alpha}.$$

Or, si nous différencions cette expression deux fois de suite pour en tirer $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, puis si nous portons ces valeurs dans l'équation (4), il faudra qu'après avoir tout multiplié par $(1 - x^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}$, les deux membres de cette équation (4) soient égaux entre eux. Il faudra donc :

1°. Que la partie entière du premier membre se réduise à

$$- x \sin \alpha \cos \alpha;$$

or, en formant (ce qui est très facile) le premier terme de cette partie entière, on le trouve égal à

$$- \mathrm{A}\, (n + 2)^2 \sin^4 \alpha \; x^{n+3};$$

il faut donc que A soit zéro et ν purement fractionnaire ;

2°. Que la partie fractionnaire se réduise d'elle-même à zéro, d'où il est aisé de conclure d'abord que les seules valeurs possibles de p sont

$$p = 0, \quad p = \pm 1, \quad p = \pm \frac{1}{\sin \alpha};$$

en effet (on le voit de suite) pour toute autre valeur de p il y aurait une fraction de la forme

$$\frac{ag}{(x-p)^{i+2}},$$

dans laquelle g serait essentiellement différent de zéro, et qui ne pourrait être détruite par aucune autre. Et quand on donne à p une des cinq valeurs écrites ci-dessus, un calcul un peu plus long, mais fort simple encore, suffit pour constater de même que la fraction contenant en dénominateur la plus haute puissance de $x - p$, ne peut pas disparaître. Dès lors il est prouvé qu'en attribuant à z une valeur de la forme indiquée tout-à-l'heure, on ne peut jamais satisfaire à l'équation (4). Cette équation (4) n'a donc aucune intégrale algébrique; par suite elle n'a aucune intégrale exprimable à l'aide d'un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, auxquels on peut même joindre le signe $\int$ d'intégration indéfinie. Donc enfin un nombre limité des signes dont il s'agit ne peut pas non plus fournir en fonction du module les valeurs des fonctions elliptiques de première espèce. L'équation

$$F = E - x \frac{dE}{dx}$$

montre ensuite que le même théorème a lieu pour les fonctions elliptiques de seconde espèce; car si E pouvait s'exprimer en quantités finies, cette équation conduirait à une valeur finie de F, ce qui est absurde.