JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MOIGNO

Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique, comprises entre les limites données. - Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 75-94.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__75_0>

NOTE

Sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique, comprises entre des limites données. Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy;

PAR M. L'ABBÉ MOIGNO.

Mon but, en rédigeant cette Note, a été de faire connaître une méthode très ingénieuse que M. Cauchy a exposée dans un Mémoire ayant pour titre : *Calcul des indices des fonctions*, et qui, lithographié d'abord en novembre 1831, a été imprimé depuis avec des additions importantes, dans le XXV^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique.* J'ai respecté autant que j'ai pu la marche de l'illustre géomètre; je me suis efforcé de reproduire, quant à la substance, ses démonstrations; mais j'ai cru, dans l'intérêt de la science, devoir renoncer à ses notations qui auraient certainement effrayé les élèves et souvent même les professeurs. La considération tout-à-fait neuve des indices ou des excès est aussi simple que féconde, mais cette simplicité disparaît quand on l'entoure de signes qui ont au moins l'inconvénient d'avoir trop d'analogie avec les notations ardues du calcul intégral. On n'a jamais plus besoin de notations et de démonstrations élémentaires pour le fond et pour la forme, que lorsqu'on expose une méthode nouvelle ou un calcul nouveau.

Pour arriver à me passer des notations de M. Cauchy, j'ai eu besoin de m'aider d'un Mémoire de M. Sturm, inséré dans le premier volume de ce recueil; je lui ai emprunté la démonstration très simple du rapport qui existe entre les excès de deux fractions inverses. De sorte que si ma Note a quelque mérite, la gloire en reviendra toute entière à M. Cauchy et à M. Sturm. On ne verra peut-être pas sans plaisir comment on peut déduire d'un principe unique et facile à saisir, un grand nombre de théorèmes qui jusqu'ici demandaient des démonstrations indépendantes, souvent pénibles, et dont le seul énoncé aurait effrayé, il y a trente ans, les plus habiles analystes. Lagrange et Legendre auraient en effet eu de la peine à croire qu'on arriverait par des procédés très élémentaires à déterminer, pour une équation de degré quelconque, le nombre des racines imaginaires dont la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sont compris entre des limites données.

1. *Définitions.* Lorsqu'une fonction rationnelle quelconque $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ change de signe en devenant infinie pour une valeur réelle $x=a$ propre à vérifier l'équation $\varphi(x)=0$, elle peut passer du négatif au positif, ou du positif au négatif. Dès lors si les deux nombres n et n' indiquent le premier combien de fois la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ en devenant infinie, passe du négatif au positif pendant que la variable x passe de la valeur $x=x_0$ à la valeur $x=\mathrm{X}$, le second combien de fois cette même fraction passe entre ces mêmes limites du positif au négatif, la différence $n-n'=\mathrm{E}$ sera ce que M. Cauchy a appelé l'indice intégral de la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ pris entre les limites réelles x_0, X, et ce que nous appellerons plus simplement l'*excès* E, à l'exemple de MM. Sturm et Liouville. Il peut arriver qu'en devenant infinie la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ passe toujours du négatif au positif, ou du positif au négatif; dans ce cas, l'un des deux nombres n, n' sera nul, et l'on aura $\mathrm{E}=n$ ou $\mathrm{E}=-n'$.

La considération de l'excès E ou de la différence $n-n'$ a déjà été féconde en résultats importants, et nous verrons bientôt qu'elle conduit à des démonstrations élégantes et faciles des plus beaux théorèmes relatifs à la résolution des équations. Mais avant d'arriver à ces applications, il faut nécessairement mettre en évidence les propriétés fondamentales de cet excès et apprendre à le calculer.

2. L'excès E relatif à une fraction dont le dénominateur ne devient infini pour aucune valeur réelle de la variable x, où dont le dénominateur divise exactement le numérateur, est évidemment nul, puisque l'existence de l'excès suppose avant tout la possibilité du passage par l'infini.

3. Les excès E, E_1 relatifs à deux fractions égales en valeur absolue, mais de signe contraire $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, -\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ sont égaux et de signes contraires.

En effet, aussi souvent que l'une de ces fractions en devenant infinie passe du négatif au positif, l'autre passe du positif au négatif, de sorte que si l'un des excès est (n° 1) $n-n'$, l'autre sera $n'-n=-(n-n')$.

4. Il existe une liaison remarquable entre les excès E, E' relatifs aux deux fractions inverses $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$. En effet, ces deux fractions sont toujours de même signe, et passent par conséquent à la fois du négatif au positif, ou du positif au négatif. De plus, quand la seconde est infinie, la première est nulle, de sorte que l'excès E' exprime aussi la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois la première fraction en s'évanouissant passe du négatif au positif, et du positif au négatif; et puisque cette première fraction ne peut changer de signe qu'en devenant nulle ou infinie, la somme $E+E'$ exprimera évidemment la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois, en changeant de signe, la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ passera du négatif au positif, et du positif au négatif. Or : 1° si les valeurs extrêmes de cette fraction $\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi(x_0)}, \frac{\varphi_1(X)}{\varphi(X)}$ sont de même signe, elle passera dans l'intervalle de x_0 à X autant de fois du négatif au positif que du positif au négatif, $E+E'$ sera égal à o; 2° si la première de ces valeurs extrêmes est négative et la seconde positive, la fraction passera une fois de plus du négatif au positif que du positif au négatif, $E+E'$ sera égal à 1; 3° enfin si $\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi(x_0)}$ est positif, et $\frac{\varphi_1(X)}{\varphi(X)}$ négatif, la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ passera du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif, $E+E'$ sera égal à -1. On aura donc $E+E'=\varepsilon$, ε devant être égal à o ou à ± 1.

Nous dirons, en général, que l'ensemble de deux quantités $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$, offre une variation ou une permanence suivant qu'elles sont de signes contraires ou de même signe, suivant que leur rapport est négatif ou positif. Dès lors la quantité ε devra être égale à o, si les deux termes $\varphi(x_0)$, $\varphi_1(x_0)$ et les deux termes $\varphi(X)$, $\varphi_1(X)$ présentent à la fois une variation ou une permanence; elle sera égale à $+1$ si les deux premiers termes offrent une variation et les seconds une permanence, ou si dans le passage des premiers aux seconds la variation se changeant en permanence, il y a une variation de perdue. Enfin ε sera égal à -1, si les deux premiers termes offrent une permanence et les seconds une variation; ou si dans le passage des premiers aux seconds la permanence se changeant en variation, il y a une variation de gagnée. A l'aide de ces règles très simples, on calculera facilement l'excès E quand on connaîtra l'excès E', et réciproquement.

5. Si le degré du dénominateur $\varphi(x)$ est inférieur au degré du numérateur, on pourra effectuer la division, et en appelant Q le quotient et $\chi(x)$ le reste, on aura $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = Q + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$. Cette équation nous montre: 1° que les deux fractions $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, deviennent en même temps infinies; 2° que pour des valeurs de x voisines de celles qui les rendent infinies, ces deux fractions offrant des valeurs très considérables, supérieures par conséquent à la valeur toujours finie du quotient entier Q, seront des quantités de même signe et passeront à la fois, en devenant infinies, du négatif au positif ou du positif au négatif; leurs excès seront nécessairement égaux, et le calcul de l'excès E se trouve ramené à la recherche de l'excès relatif à une fraction proprement dite.

6. Supposons donc que le degré du numérateur soit inférieur au degré du dénominateur, et que E, E' soient toujours les excès des fractions inverses $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, on aura (n° 4) $E + E' = \varepsilon$, $E = -E' + \varepsilon$. On pourra d'ailleurs effectuer la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_1(x)$, et en appelant R le reste, E'', E_1, les deux excès relatifs aux fractions $\frac{R}{\varphi_1(x)}, -\frac{R}{\varphi_1(x)}$, on trouvera, n^{os} 5 et 3, $E' = E'' = -E_1$, $E = E_1 + \varepsilon$, de sorte que si $\varphi_2(x)$ exprimant non le reste R de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_1(x)$, mais ce reste pris en signe contraire, on appelle E_1 l'excès relatif à la fraction $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$, l'excès E de la fraction proposée sera égal à l'excès E_1 relatif à la fraction plus simple $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ augmenté de la quantité ε, ε ayant la valeur que nous lui avons assignée au n° 4. En d'autres termes, l'équation $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$, où $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont des fonctions quelconques, entraîne toujours l'équation $E = E_1 + \varepsilon$, E, E_1 étant les excès relatifs aux deux fractions $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$, et ε ce que nous avons dit.

7. En partant des propriétés qui précèdent, il est facile de calculer l'excès E relatif à une fraction quelconque $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ dans laquelle nous supposerons désormais que le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur. En effet, effectuons sur la fraction $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ l'opération du plus grand commun diviseur; appelons $Q, Q_1, \ldots Q_m, \ldots Q_{n-1}$ les quotients; $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots \varphi_m(x), \ldots \varphi_{(n)}(x)$, les restes successifs pris en signe contraire et déterminés par les équations

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 - \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}, \ldots \quad \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)} = Q_m - \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$$
$$\ldots\ldots \frac{\varphi_{n-2}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = Q_{n-2} - \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}, \quad \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = Q_{n-1};$$

$\varphi_n(x)$ sera une fonction entière de x ou un nombre, suivant que les deux fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, admettront ou n'admettront pas de plus grand commun diviseur fonction de x. Désignons encore par $E, E_1, E_2, \ldots E_{n-2}, E_{n-1}, E_n$, les excès respectifs des fractions

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)} \cdots \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_{n-2}(x)}, \quad \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}, \quad \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)},$$

et par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-1}$ des quantités analogues à ε et dont nous fixerons bientôt la valeur; on aura évidemment, n^{os} **6** et **4**,

$$E = E_1 + \varepsilon, E_1 = E_2 + \varepsilon_1 \ldots E_m = E_{m+1} + \varepsilon_m \ldots E_{n-2} = E_{n-1} + \varepsilon_{n-2}, E_{n-1} = -E_n + \varepsilon_{n-1},$$

et, n° **2**, $$E_n = 0,$$

puisque $\varphi_n(x)$ divise exactement $\varphi_{n-1}(x)$. Si l'on ajoute membre à membre toutes ces équations, les excès $E_1, E_2, \ldots, E_n$ disparaissent, et l'on trouve

$$E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_m \ldots + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1}.$$

Pour calculer les nombres $\varepsilon, \varepsilon_1$, etc... et par suite E, écrivons sur deux lignes les valeurs que prennent les fonctions $\varphi(x), \varphi_1(x) \ldots$ quand on y fait tour à tour $x = x_0$, $x = X$, nous aurons les deux suites

(1) $\varphi(x_0), \ \varphi_1(x_0) \ldots \varphi_{m-1}(x_0), \ \varphi_m(x_0) \ldots \varphi_{n-1}(x_0), \ \varphi_n(x_0),$
(2) $\varphi(X), \ \varphi_1(X) \ldots \varphi_{m-1}(X), \ \varphi_m(X) \ldots \varphi_{n-1}(X), \ \varphi_n(X).$

Considérons l'un quelconque des nombres $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, etc., ε_m par exemple, il est déterminé par l'équation $E_m = E_{m+1} + \varepsilon_m$ dans laquelle E_m et E_{m+1} sont les excès relatifs aux fractions $\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)}$, $\frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$ liées entre elles par l'équation $\frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)} = Q_m - \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$; dès lors, n^{os} **6** et **4**, ε_m sera égal à o si les deux termes $\varphi_m(x_0)$, $\varphi_{m+1}(x_0)$ et les deux termes $\varphi_m(X)$, $\varphi_{m+1}(X)$ offrent à la fois une permanence ou une variation, et à $+1$ ou à -1 suivant que les deux premiers termes offriront une variation qui, dans le passage aux seconds, se changera en permanence, ou une permanence qui se changera en variation. Cette conclusion s'étend à tous les nombres ε, ε_1, etc., même au dernier ε_{n-1} donné par l'équation $E_{n-1} = -E_n + \varepsilon_{n-1}$, comme on le prouve facilement : en effet, ε_{n-1} est ce qu'il faut ajouter à $-E_n$, E_n étant l'excès de la fraction renversée $\frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}$, pour avoir l'excès E_{n-1} de la fraction $\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$: or, comme on l'a vu, ce qu'il faut ajouter doit être égal à o, si les deux termes $\varphi_{n-1}(x_0)$, $\varphi_n(x_0)$ et les deux termes $\varphi_{n-1}(X)$, $\varphi_n(X)$ offrent à la fois une permanence ou une variation; à $+1$ ou à -1, suivant que les deux premiers termes offrent une variation qui, dans le passage aux seconds, se change en permanence, ou une permanence qui se change en variation. Dès-lors il est évident qu'en appelant V_p le nombre des variations qui, dans le passage de la première suite à la seconde, se changent en permanences, et P_v le nombre de permanences qui se changent en variations, on aura

$$\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_m + \ldots + \varepsilon_{n-1} = V_p - P_v,$$

et par suite
$$E = V_p - P_v.$$

Telle est donc la valeur générale et très simple de l'excès E. On peut lui donner une autre forme, car si V et V′ sont les nombres de variations que présentent les suites (1) et (2) quand on passe successivement de chaque terme au terme qui le suit; V′ sera égal au nombre V des variations de la première suite, diminué du nombre des variations de cette première suite qui se sont changées en permanences, et augmenté du nombre des permanences qui se sont changées en variations : donc

$$V' = V - V_p + P_v, \quad V_p - P_v = V - V', \quad E = V - V'.$$

On arrive ainsi à cette règle si féconde en applications remarquables :

8. Pour calculer l'excès E ou la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, en devenant infinie entre les limites x_0, X, passe du négatif au positif et du positif au négatif, effectuez sur la fraction renversée $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ l'opération du plus grand commun diviseur, et après avoir désigné par $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x) \ldots \varphi_n(x)$ les restes successifs, pris en signes contraires, écrivez les deux suites

$$(1) \qquad \varphi(x_0),\ \varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0), \ldots \varphi_{n-1}(x_0),\ \varphi_n(x_0),$$
$$(2) \qquad \varphi(\mathrm{X}),\ \varphi_1(\mathrm{X}),\ \varphi_2(\mathrm{X}), \ldots \varphi_{n-1}(\mathrm{X}),\ \varphi_n(\mathrm{X}),$$

et comptez les nombres V et V′ des variations de ces deux suites, la différence V — V′, c'est-à-dire l'excès du nombre des variations de la première suite sur le nombre des variations de la seconde, ou le nombre de variations perdues dans le passage de la première suite à la seconde, donnera précisément l'excès E.

Nota 1°. En calculant par l'opération du plus grand commun diviseur les fonctions $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots \varphi_n(x)$, on pourra toujours éviter les quotients numériques fractionnaires, si l'on a soin de multiplier les dividendes par des nombres convenablement choisis, car cette multiplication n'altérera en rien les signes des différents restes et la série des raisonnements qui nous ont conduit à la règle énoncée.

Nota 2°. On pourra arrêter l'opération du plus grand commun diviseur dès que l'on arrivera à un reste $\varphi_m(x)$ qui ne devienne nul pour aucune valeur réelle de x comprise entre les limites x_0, X. En effet, l'excès E_m relatif à la fraction $\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)}$, sera dans ce cas évidemment égal à o, l'on aura

$$\mathrm{E}_m = 0, \quad \mathrm{E} = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{m-1},$$

et pour déterminer l'excès E, il suffira évidemment de calculer les nombres de variations des deux suites

$$\varphi(x_0),\ \varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0) \ldots \varphi_m(x_0),$$
$$\varphi(\mathrm{X}),\ \varphi_1(\mathrm{X}),\ \varphi_2(\mathrm{X}) \ldots \varphi_m(\mathrm{X}).$$

Nota 3°. On prouve encore facilement que si quelques-uns des termes des deux suites (1) et (2) s'évanouissent, on pourra n'y faire aucune attention et compter les variations comme s'ils n'existaient pas.

Si, comme on l'a supposé implicitement dans tout ce qui précède, x_0 et X ne sont pas racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, deux termes consécutifs des suites (1) et (2) ne s'évanouiront jamais à la fois, car si deux termes consécutifs $\varphi_m(x_0)$ et $\varphi_{m+1}(x_0)$ par exemple, s'évanouissaient, il en serait de même de tous les autres, en vertu des équations

$$\varphi(x) = Q\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \ldots \varphi_{m-1}(x) = Q_{m-1}\ {}_m(x) - \varphi_{m+1}(x),$$
$$\varphi_m(x) = Q_m\varphi_{m+1}(x) - \varphi_{m+2}(x) \ldots \varphi_{n-2}(x) = Q_{n-2}\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x),$$

et l'on aurait $\varphi(x_0) = 0$ contrairement à l'hypothèse admise.

Quand donc un terme, $\varphi_m(x_0)$ par exemple, s'évanouira, le terme précédent $\varphi_{m-1}(x_0)$ et le terme suivant $\varphi_{m+1}(x_0)$ ne s'évanouiront pas, mais seront de signes contraires, puisque l'équation qui lie entre eux ces deux termes se réduit à $\varphi_{m-1}(x_0) = -\varphi_{m+1}(x_0)$. Dès lors si l'on représente par $x_1 = x_0 + i$ une valeur de x infiniment voisine de x_0 qui, sans faire évanouir le terme $\varphi_m(x)$, jouisse de la propriété de conserver aux fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$, quand on la substitue dans ces fonctions, le signe qu'elles avaient pour $x = x_0$, il faudra pour calculer l'excès E pris entre les limites x_1 et X, ou, ce qui revient au même, entre les limites x_0, X, retrancher le nombre V' des variations de la suite (2), du nombre $V^{(1)}$ des variations de la suite

$$(1\ bis)\quad \varphi(x_1),\quad \varphi_1(x_1),\quad \varphi_2(x_1) \ldots \varphi_{m-1}(x_1),\quad \varphi_m(x_1),\quad \varphi_{m+1}(x_1) \ldots \varphi_n(x_1);$$

mais le nombre $V^{(1)}$ des variations de cette suite est évidemment égal au nombre V des variations de la suite (1) dans laquelle on omet le terme nul $\varphi_m(x_0)$, car, 1° en faisant abstraction du terme $\varphi_m(x_1)$, tous les autres termes de la suite (1 *bis*) ont par hypothèse le signe des termes correspondants de la suite (1); 2° quel que soit le signe de $\varphi_m(x_1)$, l'ensemble des trois termes $\varphi_{m-1}(x_1)$, $\varphi_m(x_1)$, $\varphi_{m+1}(x_1)$ ne présentera qu'une variation comme l'ensemble des deux termes $\varphi_{m-1}(x_0)$, $\varphi_{m+1}(x_0)$, parce que les deux termes $\varphi_{m-1}(x_1)$ et $\varphi_{m+1}(x_1)$ sont de signes contraires, ainsi que $\varphi_{m-1}(x_0)$ et $\varphi_{m+1}(x_0)$; on pourra donc substituer V à $V^{(1)}$, et pour calculer l'excès E pris entre les limites x_0, X, il suffira encore de prendre la différence V — V' des nombres de variations des suites (1 et 2). Ce que nous venons de dire du cas où dans une de ces suites un terme s'évanouirait, s'étend évidemment au cas où plusieurs termes de l'une des suites ou de toutes les deux deviendraient nuls à la fois.

9. Appliquons ces principes à la détermination du nombre des racines réelles des équations algébriques.

Lemme fondamental. Soit $F(x)=0$ une équation du degré n, et $F'(x)$ le polynome dérivé de $F(x)$; si a est une racine de cette équation et h une quantité positive très petite, le rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$ deviendra infini pour $x=a$ et passera en devenant infini du négatif au positif, pendant que x passera de la valeur $a-h$ à la valeur $a+h$.

Démonstration. Supposons pour plus de généralité que a soit m fois racine de l'équation $F(x)=0$, m se réduira à l'unité quand a sera une racine simple, et désignons par $F'(x)$, $F''(x) \ldots F^{(n)}(x) \ldots$ les dérivées successives de $F(x)$, on aura, comme on sait,

$$F'(a)=0, \quad F''(a)=0 \ldots\ldots F^{(m-1)}(a)=0,$$

$$F(a+i)=\frac{i^m}{1.2.3\ldots m}F^{(m)}(a)+\frac{i^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)}F^{(m+1)}(a)+\text{etc.},$$

$$F'(a+i)=\frac{i^{m-1}}{1.2.3..(m-1)}F^{(m)}(a)+\frac{i^m}{1.2.3..\ (m+1)}F^{(m+1)}(a)+\text{etc.}[*]$$

---

[*] Afin de ne rien supposer qu'on ne trouve dans tous les Traités élémentaires d'algèbre, j'ajouterai ici la démonstration la plus simple des équations qui précèdent. Si l'on pose d'abord $x=a$, puis $h=x-a$ dans l'équation

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots+\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}F^{(m)}(x)+\text{etc.},$$

à l'aide de laquelle on définit les polynomes dérivés successifs, il viendra

$$F(x)=F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a)+\frac{(x-a)^m}{1.2.3\ldots m}F^{(m)}(a)+\text{etc.}$$

Si la fonction $F(x)$ s'évanouit avec toutes ses dérivées jusqu'à celles de l'ordre $(m-1)$ inclusivement pour $x=a$, c'est-à-dire si l'on a

$$F(a)=0, \quad F'(a)=0, \quad F''(a)=0\ldots F^{(m-1)}(a)=0,$$

$F(x)$ deviendra divisible par $(x-a)^m$ et l'équation $F(x)=0$ aura m racines égales à a. Réciproquement si l'équation $F(x)=0$ a m racines égales à a, $F(x)$ devra être divisible

Pour des valeurs très petites de i les deux quantités $F(a+i)$, $F'(a+i)$ prendront le signe de leur premier terme, et par suite, le rapport

---

par $(x-a)^m$, et l'on aura nécessairement

$$F(a)=0,\quad F'(a)=0,\quad F''(a)=0\ldots F^{(m-1)}(a)=0,$$

$$F(x)=\frac{(x-a)^m}{1.2.3\ldots m}F^{(m)}(a)+\frac{(x-a)^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)}F^{(m+1)}(a)+\text{etc.},$$

et en posant $x=a+i$,

$$F(a+i)=\frac{i^m}{1.2.3\ldots m}F^m(a)+\frac{i^{m+1}}{1.2.3\ldots m}F^{(m+1)}(a)+\text{etc.}$$

En opérant sur $F'(x)$ comme on l'a fait sur $F(x)$, on trouvera

$$F'(x)=F'(a)+\frac{(x-a)}{1}F''(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}F'''(a)\ldots+\frac{(x-a)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}F^m(a)+\text{etc.}$$

Dans le cas où l'équation $F(x)=0$ a m racines égales à a, on a

$$F'(a)=0,\quad F''(a)=0\ldots F^{(m-1)}(a)=0,$$

et par suite

$$F'(x)=\frac{(x-a)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}F^{(m)}(a)+\frac{(x-a)^m}{1.2\ldots m}F^{(m+1)}(a)+\ldots,$$

ou en faisant $x=a+i$

$$F'(a+i)=\frac{i^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}F^{(m)}(a)+\frac{i^m}{1.2.3\ldots m}F^{(m+1)}(a)+\text{etc.}$$

Dans cette même hypothèse la dérivée $F'(x)$ sera divisible par $(x-a)^{m-1}$, et l'équation $F'(x)=0$ aura $m-1$ racines égales à a.

Réciproquement, si l'équation $F'(x)=0$ a $m-1$ racines égales à a, $F'(x)$ devra être divisible par $(x-a)^{m-1}$, on aura

$$F'(a)=0,\quad F''(a)=0,\ldots F^{m-1}(a)=0,$$

et aussi

$$F(x)-F(a)=\frac{(x-a)^m}{1.2\ldots m}F^{(m)}(a)+\text{etc.};$$

et si de plus $F(a)=0$, l'équation $F(x)=0$ aura m racines égales à a.

Ainsi, pour qu'une équation $F(x)=0$ ait m racines égales à a, il faut et il suffit que a étant racine de cette équation, la dérivée $F'(x)$ ait $m-1$ racines égales à a, ou soit divisible par $(x-a)^{m-1}$: et réciproquement.

On en conclut immédiatement que pour qu'une équation $F(x)=0$ ait des racines égales, il faut et il suffit que le premier membre et son polynome dérivé aient un diviseur commun qui sera le produit des facteurs égaux de $F(x)$ élevés chacun à une puissance moindre d'une unité; ce diviseur sera le plus grand diviseur commun des deux polynomes.

$$\frac{F'(a+i)}{F(a+i)} = \frac{F'(x)}{F(x)},$$

aura le signe de la fraction

$$\frac{i^{m-1}F^m(a)}{1.2.3\ldots(m-1)} \times \frac{1.2.3\ldots m}{i^m F^{(m)}(a)} = \frac{m}{i}$$

ou le signe de i, et deviendra infini pour $i=0$, ou pour $x=a$: le rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$ changera donc de signe avec i, et passera en devenant infini du négatif au positif, quand i passera de la valeur $-h$ à la valeur $+h$ ou x de la valeur $a-h$ à la valeur $a+h$; ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Cette démonstration s'étendant à toutes les racines de l'équation $F(x)=0$, il en résultera que si cette équation a m racines réelles distinctes a_1, a_2,...a_m comprises entre deux limites réelles x_0, X, le rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$, en devenant infini pour chacune de ces valeurs, passera m fois par l'infini du négatif au positif, pendant que x passera de la valeur x_0 à la valeur X. D'ailleurs, puisque ce même rapport ne devient infini entre les limites x_0, X, pour aucune valeur réelle différente de a_1, a_2,... a_m, et passe par conséquent toujours, en devenant infini entre ces limites, du négatif au positif, l'excès E ou la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois en devenant infini, il passe du négatif au positif et du positif au négatif, sera dans ce cas particulier égal à m; on aura donc $m=E$, et l'on arrive au théorème suivant.

10. 1^er^ *Théorème*. Le nombre des racines réelles distinctes d'une équation algébrique quelconque $F(x)=0$ comprises entre deux limites réelles x_0, X, est toujours égal à l'excès E ou à la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois le rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$ en devenant infini entre ces limites, passe du négatif au positif et du positif au négatif.

On déduit facilement de cette proposition unique tous les théorèmes connus sur la détermination du nombre des racines réelles des équations algébriques : et d'abord jointe à la règle à l'aide de laquelle on calcule l'excès E, elle donne immédiatement naissance au beau théorème de M. Sturm.

11. 2^me^ *Théorème*. Pour trouver le nombre des racines réelles de l'équation $F(x) = o$ comprises entre deux limites données x_0, X, après avoir calculé les restes successifs $-F_2(x)$, $-F_3(x) \ldots -F_r(x)$ que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur de la fonction $F(x)$ et de sa dérivée $F'(x)$, on écrira sur deux lignes les suites

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ F_2(x_0),\ F_3(x_0) \ldots F_r(x_0),$$
$$F(X),\ F'(X),\ F_2(X),\ F_3(X) \ldots F_r(X),$$

ou seulement les signes de ces diverses quantités, et l'on comptera le nombre des variations de ces deux suites; autant la seconde suite aura de variations de moins que la première, autant il y aura de racines réelles comprises entre x_0, X.

Nota. En effectuant l'opération du plus grand commun diviseur, on pourra éviter les quotients fractionnaires, et s'arrêter dès que l'on arrivera à un reste $-F_p(x)$ qui ne devienne nul pour aucune valeur réelle de x comprise entre les limites x_0, X. Si quelqu'un des restes s'évanouissait pour $x = x_0$ ou $x = X$, on pourra n'y faire aucune attention et compter les variations comme s'ils n'existaient pas.

12. 3^me *Théorème* (*théorème de Rolle*). Le nombre des racines réelles de l'équation $F(x) = o$ comprises entre deux limites données x_0, X, ne peut jamais surpasser de plus d'une unité le nombre des racines réelles de l'équation dérivée $F'(x) = o$ comprises entre les mêmes limites.

Démonstration. Représentons par E, E' les excès relatifs aux deux fractions inverses $\frac{F'(x)}{F(x)}, \frac{F(x)}{F'(x)}$, et soit toujours m le nombre des racines réelles de l'équation $F(x) = o$ comprises entre les limites x_0, X; on aura, comme nous l'avons vu n^os **10** et **4**, $m = E$, $E = -E' + \varepsilon$, et par suite $m = -E' + \varepsilon$, ε pouvant être égal à o ou à ± 1. Cela posé, $-E'$ ne pourra jamais surpasser le nombre m' qui indiquera combien de fois la fraction $\frac{F(x)}{F'(x)}$ devient infinie entre ces mêmes limites x_0, X; $-E'$ ne pourra même (n° **1**) être égal à m' qu'autant que la fraction $\frac{F(x)}{F'(x)}$, en devenant m' fois infinie, passera toujours du positif au négatif; ε d'ailleurs est tout au plus égal à $+1$; donc $m = -E' + \varepsilon$ ne pourra jamais surpasser $m' + 1$. Mais le nombre m' qui indique combien de fois la fraction $\frac{F(x)}{F'(x)}$ devient infinie entre les limites x_0, X, est précisément le nombre des racines réelles de l'équation $F'(x) = 0$ qui ne lui sont pas communes avec l'équation $F(x) = 0$; donc, etc.

On conclut immédiatement de ce théorème que si les racines a', a'', $a'''\dots a^{(m')}$ de l'équation dérivée $F'(x) = 0$ sont rangées par ordre de grandeur en commençant par la plus petite, l'équation $F(x) = 0$ ne peut avoir qu'une seule racine au-dessous de a', qu'une seule entre a', a'', qu'une seule entre a'', a''', etc., qu'une seule enfin au-dessus de $a^{(m')}$.

13. 4^{me} *Théorème* (*Théorème de Budan et de Fourier*). Le nombre des racines réelles de l'équation $F(x)=0$, comprises entre les limites x_0, X, est tout au plus égal à la différence $V_1 - V_1'$ entre les nombres de variations des deux suites

$$
\begin{aligned}
&(3) \qquad F(x_0), \quad F'(x_0), \quad F''(x_0), \dots F^{(n)}(x_0), \\
&(4) \qquad F(X), \quad F'(X), \quad F''(X), \dots F^{(n)}(X),
\end{aligned}
$$

dans lesquelles les fonctions $F'(x)$, $F''(x)\dots F^{(n)}(x)$ représentent les dérivées successives de $F(x)$, et n le degré de l'équation $F(x) = 0$.

Démonstration. Appelons m, m', $m''\dots m^{(n)}$ les nombres des racines des équations $F(x) = 0$, $F'(x) = 0\dots F^{(n)}(x) = 0$, comprises entre les limites x_0, X; $m^{(n)}$ sera nécessairement égal à 0, puisque, comme nous l'avons supposé, n étant le degré de $F(x)$, $F^{(n)}(x)$ est un nombre. Cela posé, on aura, comme on l'a vu, $m < m' + \varepsilon$, ε étant égal à 0, si les deux termes $F(x_0)$, $F'x_0$ et les deux termes $F(X)$ et $F'(X)$ présentent à la fois une variation ou une permanence; à $+1$, si les deux premiers termes offrent une variation et les seconds une permanence; à -1, si les deux premiers termes offrent une permanence, et les seconds une variation. Et puisque ce que nous avons dit n° **12** s'applique à une équation algébrique quelconque $F(x) = 0$, dont $F'(x) = 0$ est l'équation dérivée, on aura de même

$$m' < m'' + \varepsilon', \quad m'' < m''' + \varepsilon''\dots m^{(n-1)} < m^{(n)} + \varepsilon^{(n-1)} = \varepsilon^{(n-1)},$$

et par conséquent, $\qquad m < \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''\dots + \varepsilon^{(n-1)}$,

$\varepsilon'\dots\varepsilon^{n-1}$ étant des quantités analogues à ε. La somme $\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'''\dots + \varepsilon^{(n-1)}$ sera d'ailleurs évidemment égale au nombre des variations qui dans le passage de la suite (3) à la suite (4), se changent en permanences diminué du nombre des permanences qui se changent en variations; ou plus simplement à la différence $V_1 - V_1'$ des nombres de variations de ces deux suites; on aura donc $m < V_1 - V_1'$; ce qu'il fallait démontrer.

14. 5$^{\text{me}}$ *Théorème* (*Théorème de Descartes*). Le nombre des racines positives de l'équation

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \ldots\ldots + A_{n-1} x + A_n$$

ne peut pas surpasser le nombre V des variations de signe que présente la suite des coefficients

$$1, \quad A_1, \quad A_2 \ldots\ldots A_{n-1}, \quad A_n.$$

Démonstration. Faisons dans le 4$^{\text{me}}$ théorème $x_0 = 0$, $X = \infty$, les quantités $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x) \ldots F^{(n)}(x)$, auront toutes pour $x = \infty$ le signe de leurs premiers termes

$$x^n, \; nx^{n-1}, \; n(n-1)x^{n-2} \ldots n(n-1)(n-2)\ldots 1,$$

et seront, par conséquent, toutes positives, de sorte que la suite (4) ne présentant aucune variation, V_1' sera nécessairement nul. De plus, ces mêmes quantités pour $x = 0$ se réduiront à leurs derniers termes

$$A_n, \; A_{n-1}, \; 1.2.A_{n-2}, \; 1.2.3.A_{n-3} \ldots 1.2.3.(n-2)(n-1)A_1, \; 1.2.3\ldots n,$$

et prendront le signe des coefficients

$$A_n, \; A_{n-1}, \; A_{n-2} \ldots\ldots A_1, \; 1;$$

dès lors le nombre V_1 des variations de la suite (3) sera égal à V, et l'inégalité $m < V_1 - V_1'$, réduite à $m < V$, deviendra précisément l'expression analytique du théorème de Descartes.

15. On pourrait démontrer de la même manière un grand nombre de théorèmes plus ou moins remarquables; j'en citerai un seul exemple.

5$^{\text{me}}$ *Théorème*. Si l'on désigne par e l'excès relatif à la fraction $x\,\frac{F'(x)}{F(x)}$ et pris entre les deux limites $x = x_0$, $x = X$, dont la première est positive et la seconde négative, si de plus on représente par ϖ le nombre des racines positives et par ν le nombre des racines négatives de l'équation $F(x) = 0$, comprises entre les mêmes limites, on aura toujours $\varpi - \nu = e$, pourvu cependant que le polynome $F(x)$ ne soit pas divisible par x, ou que l'équation $F(x) = 0$ n'ait pas 0 pour racine.

Démonstration. Appelons e', e'' les excès relatifs à cette même fraction $x\frac{F'(x)}{F(x)}$, mais pris, le premier entre les limites $x = x_0$, $x = 0$, le second entre les limites $x = 0$, $x = X$; et soient E', E'' les excès correspondants de la fraction $\frac{F'(x)}{F(x)}$, on aura évidemment $e' + e'' = e$ et (n° **10**) $E' = \nu$, $E'' = \varpi$. D'ailleurs les deux fractions $x\frac{F'(x)}{F(x)}$, $\frac{F'(x)}{F(x)}$ qui, dans l'hypothèse admise, deviennent en même temps infinies, sont constamment de même signe entre les limites $x = 0$, $x = X$, et constamment de signe contraire entre les limites $x = x_0$, $x = 0$; on aura dès-lors (n° **3**) $e' = -E'$, $e'' = E''$, et l'on en conclura $e = e' + e'' = E'' - E'$ ou $\varpi - \nu = e$, ce qu'il fallait démontrer.

En partant de cette proposition, M. Cauchy démontra le premier que pour une équation de degré quelconque, on peut trouver des fonctions rationnelles des coefficients dont les signes fassent connaître le nombre des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives; c'était un premier essai presque oublié quand M. Sturm découvrit son théorème.

16. Avant de passer à la détermination du nombre des racines imaginaires des équations et au théorème de M. Cauchy, il est nécessaire d'établir les lemmes suivants :

Lemme 1er [*]. Considérons deux fonctions u et v de la variable s, continues entre les limites $s = s_0$ et $s = s_1$, et qui reprennent les mêmes valeurs aux deux limites, puis posons $u + v\sqrt{-1} = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$. Si l'on assujétit l'angle ou l'argument p à être lui-même une fonction continue de s, et si l'on désigne par p_0 et p_1 les valeurs de p correspondantes à $s = s_0$ et $s = s_1$, l'excès e de la fraction $\frac{u}{v}$ ou la différence entre les deux nombres qui expriment combien de fois cette fraction en

---

[*] MM. Sturm et Liouville ont publié les premiers des démonstrations élémentaires du théorème qui donne le nombre des racines imaginaires; l'idée de celle que je reproduis ici est due à M. Cauchy; elle rappelle la seconde des démonstrations de M. Sturm, mais je la crois plus simple, parce que toute la difficulté se réduit à ce lemme 1er, et cette difficulté n'est pas grande, car ce lemme est presque évident.

devenant infinie entre les limites s_0, s_1, passe du négatif au positif et du positif au négatif, sera précisément égal à $\frac{p_1-p_0}{\pi}$.

Démonstration. L'équation $u+v\sqrt{-1}=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p)$ donne $u=r\cos p$, $v=r\sin p$; et si l'on désigne, avec M. Cauchy, par la notation arc tang $\frac{v}{x}$ le plus petit des arcs, abstraction faite du signe, qui ait $\frac{v}{u}$ pour tangente, on aura $p=\text{arc tang}\frac{v}{u}\pm n\pi$, n désignant un nombre entier qui devra être pair ou impair, suivant que la partie réelle u de l'expression imaginaire sera positive ou négative. Cela posé, désignons par $u_0, v_0, u_1, v_1, p_0, p_1$ les valeurs de u, v, p correspondantes à $s=s_0$ et $s=s_1$. En vertu de l'équation $p=\text{arc tang}\frac{v}{u}\pm n\pi$, les quantités p et arc tang $\frac{v}{u}$, ou p_0 et arc tang $\frac{v_0}{u_0}$, et par suite les deux quantités $p-p_0$, arc tang $\frac{v}{u}$ — arc tang $\frac{v_0}{u_0}$ ne pourraient différer entre elles que d'un multiple de la demi-circonférence; et comme, par hypothèse, chacune de ces deux quantités continues doit devenir infiniment petite en même temps que la différence $s-s_0$, il est clair que pour des valeurs de $s-s_0$ très peu différentes de o, on aura $p-p_0=\text{arc tang}\frac{v}{u}-\text{arc tang}\frac{v_0}{u_0}$.

De plus, comme dans le second membre de cette équation, le terme arc tang $\frac{v}{u}$ augmente ou diminue brusquement de la demi-circonférence π, en passant brusquement de la valeur $-\frac{\pi}{2}$ à la valeur $+\frac{\pi}{2}$ ou de la valeur $+\frac{\pi}{2}$ à la valeur $-\frac{\pi}{2}$ toutes les fois que la fonction $\frac{v}{u}$ change de signe en passant par l'infini du négatif au positif ou du positif au négatif, p ne pourra être une fonction continue de s, qu'autant que pour prévenir ces changements brusques, on diminuera ou l'on augmentera le second membre de la quantité π, suivant que le passage aura lieu du négatif au positif ou du positif au négatif. Pendant que s passera de la valeur s_0 à la valeur s_1, la somme algébrique totale de ces diminutions ou de ces augmentations devra être évidemment égale à $-e'\pi$, e' étant l'excès de la fraction $\frac{v}{u}$, ou la différence entre les deux nombres qui expriment combien de fois cette fraction, en devenant infinie entre les limites s_0, s_1, passe du négatif au positif et du positif au négatif. Dès-lors, dans l'hypothèse où p est une fonction continue, l'équation

$$p - p_0 = \text{arc tang}\,\frac{v}{u} - \text{arc tang}\,\frac{v_0}{u_0}$$

entraînera la suivante

$$p_1 - p_0 = \text{arc tang}\,\frac{v_1}{u_1} - \text{arc tang}\,\frac{v_0}{u_0} - e'\pi.$$

Si d'ailleurs comme on l'a supposé, les fonctions continues de s désignées par u et v reprennent précisément les mêmes valeurs pour $s = s_0$ et $s = s_1$, on aura non-seulement $\text{arc tang}\,\frac{v_1}{u_1} = \text{arc tang}\,\frac{v_0}{u_0}$, mais aussi (n° 4) $e' = -e$, e étant l'excès relatif à la fraction renversée $\frac{u}{v}$, et par suite

$$p_1 - p_0 = e\pi, \quad e = \frac{p_1 - p_0}{\pi}, \quad \text{ce qu'il fallait démontrer.}$$

17. *Lemme* 2^e. Considérons plusieurs expressions imaginaires

$$u + v\sqrt{-1} = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p),\; u' + v'\sqrt{-1} = r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p')\ldots$$

dans lesquelles u, v, p, u', v', p', etc., soient des fonctions continues de s qui vérifient toutes les conditions du lemme 1er, et soit $U + V\sqrt{-1} = R(\cos P + \sqrt{-1}\sin P)$, le produit de ces expressions imaginaires; l'excès E, relatif à la fraction $\frac{U}{V}$, sera nécessairement égal à la somme $e + e' +$ etc., des excès relatifs aux fractions $\frac{u}{v}$, $\frac{u'}{v'}$, etc.

Démonstration. L'équation

$$\begin{aligned} U + V\sqrt{-1} &= R(\cos P + \sqrt{-1}\sin P) = (u + v\sqrt{-1})(u' + v'\sqrt{-1})\ldots \\ &= r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)\, r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p')\ldots \end{aligned}$$

donne

$$P = p + p' + p'' + \text{ etc.}$$

De plus les fonctions u, v, p, u', v', p', etc., vérifiant par hypothèse les conditions du lemme 1er, il en sera de même de U, V, P, et l'on aura par conséquent, en vertu de ce lemme, $E = \frac{P_1 - P_0}{\pi}$, P_1 et P_0 étant les valeurs de P correspondantes à $s = s_0$, $s = s_1$; mais de l'équation

$$P = p + p' + p'' + \text{etc.},$$

on tire $$P_1 - P_0 = p_1 - p_0 + p'_1 - p'_0 + \text{etc.}$$

et par suite $$P_1 - P_0 = e\pi + e'\pi + \text{etc.};$$

donc

$$E = e + e' + e'' + \text{etc.},$$ ce qu'il fallait démontrer.

18. 6me *Théorème* (*Théorème* de *M. Cauchy*). Supposons que $F(z)$ soit une fonction entière du degré n qui, quand on change z en $x + y\sqrt{-1}$, devient $U + V\sqrt{-1}$, et traçons dans le plan des x, y une courbe fermée dont le périmètre soit c et dont les coordonnées x, y puissent être considérées comme des fonctions continues de l'arc s. Le nombre m des points dont les coordonnées $x = \alpha$, $y = \beta$ vérifieront l'équation $F(z) = F(x + y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} = 0$, et qui de plus seront contenus dans l'intérieur de la courbe fermée, sera donnée par l'équation $m = \frac{E}{2}$, E étant l'excès relatif à la fraction $\frac{U}{V}$ ou la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois cette fraction, en devenant infinie entre les limites $s = 0$, $s = c$, passe du négatif au positif et du positif au négatif.

Démonstration. Dans le lemme qui précède, posons

$$u + v\sqrt{-1} = x - \alpha + (y - \beta)\sqrt{-1} = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p),$$
$$u' + v'\sqrt{-1} = x - \alpha' + (y - \beta')\sqrt{-1} = r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p')\text{ etc.},$$

$\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, etc., étant les racines de l'équation $F(z) = 0$; β, β', etc., se réduiront à 0 pour les racines réelles; on aura

$$F(z) = F(x + y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} = [(x - \alpha) + (y - \beta)\sqrt{-1}][x - \alpha' + (y - \beta')\sqrt{-1}]\ldots$$
$$= (u + v\sqrt{-1})(u' + v'\sqrt{-1})\ldots;$$

de plus on pourra regarder x, y comme les coordonnées d'un point mobile M qui se promènera sur la courbe fermée, et α, β, α', β', etc.;

comme les coordonnées d'un certain nombre de points fixes A, A′, etc. $x-\alpha$, $y-\beta$, $x-\alpha'$, $y-\beta'$, etc., seront alors les coordonnées rectangulaires, et r, p, r', p', etc., les coordonnées polaires du point mobile M, prises par rapport aux points fixes A, A′, etc. Cela posé, concevons que le point M, parti d'un certain point M_0 sur la courbe fermée, y revienne, l'arc s variera entre les limites o et c, et l'angle polaire p deviendra $p_1=p_0+2\pi$, si le point A est placé dans l'intérieur de la courbe fermée; cet angle, au contraire, reprendra sa valeur initiale p_0, si le point A est situé à l'extérieur de la courbe; on aura, dans le premier cas, $e=\frac{p_1-p_0}{\pi}=2$; dans le second, $e=\frac{p_0-p_0}{\pi}=0$. Donc, en supposant qu'il n'y ait sur la courbe fermée aucun point dont les coordonnées vérifient l'équation $F(x+y\sqrt{-1})=0$, la somme $e+e'+e''$ etc., sera égale à autant de fois 2 qu'il y aura dans l'intérieur de la courbe de points dont les coordonnées α, β satisferont à l'équation $F(\alpha+\beta\sqrt{-1})=0$, et par conséquent, en appelant m le nombre de ces points, on aura $e+e'+\text{etc.}=2m$; mais, en vertu de l'équation

$$U+V\sqrt{-1}=(u+v\sqrt{-1})(u'+v'\sqrt{-1})\ldots,$$

on a, en appelant E l'excès relatif à la fraction $\frac{U}{V}$,

$$E=e+e'+\text{etc.};$$

on aura donc aussi $m=\frac{E}{2}$.

19. Si l'on voulait obtenir le nombre des racines imaginaires de l'équation $F(z)=F(x+y\sqrt{-1})=0$, dont la partie réelle est comprise entre les limites x_0, X, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y, on prendrait pour contour fermé le rectangle que déterminent les quatre lignes $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$. L'excès E relatif à la fraction $\frac{U}{V}=f(s)=\frac{\varphi(x,y)}{\chi(x,y)}=\psi(x,y)$, et pris entre les limites o et c, ou pour toute l'étendue du contour, sera évidemment égal à la somme des excès de cette même fonction pris successivement par rapport aux diverses portions de ce contour, ou, dans le cas que nous considérons, par rapport aux quatre côtés du rectangle. Les valeurs de x et de y en s, et les limites entre lesquelles on doit calculer l'excès sont d'ailleurs :

pour le premier de ces côtés, $x = s,\ y = y_0;\ x_0, X,$
pour le second .... $y = s,\ x = X;\ y_0, Y,$
pour le troisième .... $x = s,\ y = Y;\ X, x_0,$
pour le quatrième......... $y = s,\ x = x_0;\ Y, y_0;$

de sorte que si l'on désigne par E_{y_0}, E_X, E'_Y, E'_{x_0}, les excès relatifs aux quatre fonctions

$$\psi(x, y_0),\quad \psi(X, y),\quad \psi(x, Y),\quad \psi(x_0, y)$$

pris respectivement entre les limites

$$x_0, X;\ y_0, Y;\ X, x_0;\ Y, y_0,$$

on aura

$$E = E_{y_0} + E_X + E'_Y + E'_{x_0}.$$

Observons enfin que l'excès pris entre deux limites a et b est égal en valeur absolue, mais de signe contraire à l'excès pris entre les limites b et a, parce que si une fonction d'une seule variable change de signe dans un certain sens, pendant que la variable passe de la valeur a à la valeur b, elle changera de signe en sens opposé, tandis que cette variable passera, au contraire, de la valeur b à la valeur a. Dès-lors, en appelant E_Y, E_{x_0} les excès relatifs aux fonctions $\psi(x, Y)$, $\psi(x_0, y)$, pris entre les limites x_0, X; y_0, Y, on aura définitivement

$$E = 2m = E_X - E_{x_0} - (E_Y - E_{y_0}).$$

Dans chaque cas particulier on calculera les quatre excès du second membre en suivant la méthode que nous avons indiquée.

Ce théorème, l'une des plus étonnantes conquêtes de l'analyse, que le génie de M. Cauchy a su étendre à des équations transcendantes réelles ou imaginaires, et sous certaines conditions, à la détermination des racines communes à deux équations simultanées, renferme comme cas particulier, toutes les propositions sur le nombre des racines réelles des équations algébriques. Je pourrai, dans une autre circonstance, entrer à ce sujet dans quelques détails.