JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ABEL TRANSON

Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 191-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__191_0>

RECHERCHES

SUR LA COURBURE DES LIGNES ET DES SURFACES;

PAR ABEL TRANSON.

I.

On caractérise géométriquement la courbure d'une ligne en un quelconque de ses points par la détermination de son cercle osculateur en ce point. Mais comme entre deux courbes, qui passent par un même point, le contact est plus ou moins intime, suivant que les deux polygones infinitésimaux qui, à partir de ce point, représentent idéalement ces courbes, ont plus ou moins d'éléments communs, il semble qu'on aurait dû comprendre, dans la notion de la courbure, non pas seulement la situation relative des deux éléments successifs qu'implique le cercle osculateur, mais plus généralement l'ensemble des rapports de grandeur et de situation que présentent en chaque point les éléments successifs du polygone infinitésimal.

Cette idée de la courbure aurait l'avantage d'ouvrir aux investigations un champ indéfini. On ne dirait plus alors que le cercle osculateur mesure la courbure, mais seulement une première *affection de la courbure;* et lorsqu'on parviendrait à représenter, par des constructions géométriques entre quantités finies, les rapports de grandeur et de situation de quelque nouveau côté infiniment petit de la courbe avec les éléments antérieurement considérés, on aurait par-là obtenu la mesure de l'affection de courbure relative à ce nouvel élément.

Je me suis proposé, dans les recherches suivantes, de construire les deux affections qui impliquent le troisième et le quatrième élément infinitésimal, et d'étudier les lois de ces deux affections dans la courbure des surfaces.

II.

Je représente [*] par A, B, C, les trois points consécutifs qui déterminent le cercle osculateur d'une courbe plane, et par le point A je conçois une ligne parallèle à l'élément BC. Cette ligne rencontre en un point N la normale menée au milieu de BC, et le cercle osculateur en un point A', tel qu'on a

$$AN = NA';$$

enfin elle rencontre la courbe même en un point D, de sorte que AD est la corde entière de la courbe, et CD est son troisième élément, c'est-à-dire l'élément consécutif aux éléments AB et BC.

Le point D est intérieur ou extérieur au cercle osculateur, suivant que AD est plus petit ou plus grand que AA'. Dans tous les cas, la distance entre A' et D mesure l'écartement qui a lieu, dans le troisième élément CD, entre la courbe et son cercle osculateur.

Si l'on appelle f la flèche ou portion de la normale comprise entre le périmètre et la corde AD; et si δ est l'angle que fait avec la normale la ligne menée de l'extrémité de la flèche au milieu de cette corde, il sera facile de voir que l'écartement A'D est mesuré par $2f\tang\delta$; ou bien, en mettant pour f sa valeur tirée du cercle osculateur, par

$$A'D = \frac{ds^2}{\rho}\tang\delta = \rho\tang\delta . d\omega^2.$$

Cet écartement est donc, comme on devait s'y attendre, une quantité du second ordre. Si l'on veut comparer sa grandeur aux différents points d'une même courbe, il paraîtra sans doute nécessaire de l'évaluer par rapport à des arcs semblables considérés sur les cercles osculateurs qui sont particuliers à ces points; c'est-à-dire qu'on devra regarder $d\omega$ comme constant. De plus, s'il arrivait qu'en deux points différents le rapport de l'écartement A'D au rayon de courbure ρ fût le même, il serait naturel d'admettre que l'*altération de la forme cir-*

[*] Le lecteur est prié de tracer la figure.

culaire est égale de part et d'autre. Cette altération doit donc se mesurer par $\frac{A'D}{\rho}$, c'est-à-dire par tang $\delta . d\omega^2$, ou, plus strictement, par tang δ, puisque $d\omega$ est constant.

C'est cette quantité tang δ que je prends pour la seconde affection de la courbure, et je l'appelle indifféremment *déviation de la forme circulaire,* ou bien *première déviation de la courbure,* parce que c'est réellement la quantité dont la courbe proposée s'écarte de la forme circulaire dans ses éléments du troisième ordre. J'appelle aussi *axe de déviation* la ligne qui fait avec la normale l'angle δ, et cette ligne me paraît compléter la représentation géométrique ou l'image du polygone infinitésimal par rapport à son troisième élément, comme la tangente et le cercle osculateur sont les images de ce même polygone pour ses deux premiers côtés.

Ce choix a d'ailleurs dans les applications un grand avantage, résultant d'une propriété curieuse des sections coniques, que je démontrerai à la fin de cet exposé, et dont voici l'énoncé :

« Soit P un point quelconque d'une section conique, O le centre de
» cette courbe, et C le centre de courbure relatif au point P. Menons
» par C une parallèle à la tangente en P, ce sera la normale de la dé-
» veloppée; la partie de cette normale, depuis le point C jusqu'à la
» rencontre de la ligne OP, qui est le diamètre passant en P, sera
» égale au tiers du rayon de courbure de la développée. »

Il n'est pas difficile de voir que dans une section conique le diamètre PO, conjugué à la tangente en P, est précisément ce que nous avons appelé l'axe de déviation ; de sorte que l'inclinaison de ce diamètre sur la normale est notre angle δ. Donc, si ρ et ρ' sont respectivement le rayon de courbure d'une conique et le rayon de courbure de sa développée, on a, pour la déviation dans les sections coniques, l'expression remarquable

$$\operatorname{tang} \delta = \tfrac{1}{3} \frac{\rho'}{\rho},$$

qui n'est que la représentation du théorème général qu'on vient d'énoncer.

On déduirait de là les lois très simples de la déviation dans les sections coniques; mais de plus on doit remarquer que, dans une courbe quelconque, l'axe de déviation étant la limite de situation des lignes qui joignent le point P de la courbe avec les milieux M, M′, M″,... des transversales parallèles à la tangente en P, cet axe n'est autre chose que le diamètre de toute section conique qui toucherait la proposée en P, par un contact du troisième ordre. (Ainsi, en particulier, c'est une ligne parallèle à l'axe de la parabole osculatrice.)

Cependant, une telle conique aurait le même rayon de courbure en P que la proposée, et aussi le rayon de courbure de sa développée serait le même par rapport à ce même point que celui de la courbe; car les deux rayons ρ et ρ' ou $\frac{d\rho}{d\omega}$, ne dépendent que des éléments du second et du troisième ordre qui sont communs aux deux courbes; d'où il résulte que ρ et ρ' étant le rayon de courbure d'une courbe quelconque et celui de sa développée, on a, comme dans les sections coniques,

$$\operatorname{tang}\delta = \tfrac{1}{3}\,\frac{\rho'}{\rho}.$$

Maintenant, si l'on fait attention que ρ est donné par une formule très simple en fonction des coefficients différentiels de l'ordonnée, et que ρ' est égal à

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{d\omega}{dx}} = \frac{q\,\frac{d\rho}{dx}}{1+p^2},$$

on voit combien il est aisé de construire en chaque point, soit la valeur de la déviation, soit l'équation de la ligne que nous avons appelée axe de déviation.

Ainsi, en désignant par p, q, r, les premier, second et troisième coefficients différentiels, on a, pour la déviation,

$$\operatorname{tang}\delta = p - \frac{(1+p^2)r}{3q^2};$$

et, pour l'équation de l'axe de déviation,

$$y' - y = \frac{p \operatorname{tang} \delta - 1}{p + \operatorname{tang} \delta} (x' - x),$$

dans laquelle x' et y' sont les coordonnées courantes, et où l'on pourra remplacer tang δ par sa valeur.

Remarquons d'ailleurs que toutes les fois que la déviation est nulle, le rayon de courbure passe par un maximum ou un minimum ; ou autrement le point correspondant constitue sur le périmètre de la courbe un sommet analogue aux sommets des sections coniques, c'est-à-dire un point dans lequel le centre osculateur a un contact du troisième ordre et non pas seulement du second.

Comme exemple particulier, on peut considérer la spirale logarithmique, qui se distingue de toutes les autres courbes en ce que sa déviation est constante, son axe de déviation étant représenté par le rayon réfléchi lorsqu'on regarde le rayon vecteur comme un rayon lumineux incident. Cette courbe joue, par rapport à la seconde affection de courbure, un rôle analogue à celui du cercle pour la première ; car, de même que le cercle est la courbe de courbure constante lorsqu'on définit la courbure par deux éléments consécutifs, ainsi la spirale logarithmique est la courbe de courbure toujours semblable lorsqu'on définit la courbure par trois éléments. J'ajoute que la détermination de la spirale logarithmique osculatrice en chaque point ne saurait présenter aucune difficulté, d'après ce qui précède.

III.

En raison des propriétés singulières que nous venons de reconnaître dans la spirale logarithmique, on pourrait être conduit à prendre pour la troisième affection de courbure, c'est-à-dire pour l'affection qui dépend des éléments du quatrième ordre, l'altération de la forme spirologarithmique. Mais il me paraît également naturel, et surtout plus avantageux, de rapporter cette nouvelle affection de la courbure à la détermination de la conique osculatrice. Cela est d'autant plus aisé, que l'axe de déviation étant le lieu des centres des coniques qui ont avec la proposée un contact du troisième ordre, le centre de la conique osculatrice, c'est-à-dire douée d'un contact du quatrième ordre, sera nécessairement à la rencontre des deux axes de déviation consécutifs; et puisque nous avons l'équation générale de cet axe, le problème de trouver la valeur R du demi-diamètre de la conique osculatrice relatif au point P, comme aussi de trouver le lieu des centres des coniques osculatrices, sera un problème de même genre et désormais aussi facile que de trouver, par l'intersection successive des normales, le rayon de courbure et le lieu des centres de courbure.

D'ailleurs la valeur de R a une forme très simple si l'on y introduit, avec ρ et ρ', qui sont déjà dans tang δ, la valeur ρ'' du rayon de courbure de la seconde développée. Comme cette quantité, égale à $\frac{d\rho'}{d\omega}$ ou $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, implique le coefficient différentiel du quatrième ordre, on voit, *à priori,* qu'elle doit suffire, avec ρ et ρ', pour exprimer R, qui manifestement ne peut dépendre lui-même que des quatre premiers coefficients différentiels.

Je m'arrête un instant à cette détermination de R, qui donnera lieu à quelques remarques utiles.

Représentons par $d\omega$ l'angle des deux normales consécutives, et par $d\psi$ celui des deux axes de déviation consécutifs; on a la relation

$$d\omega = d\psi + d\delta,$$

dans laquelle $d\delta$ est l'accroissement de l'angle de déviation δ. D'ailleurs l'arc de courbe ds recevra deux expressions égales, soit comme troisième côté du triangle formé par les deux normales successives, ou bien par les deux axes de déviation successifs; d'où résulte

$$\frac{\mathrm{R}\,d\psi}{\cos\delta} = \rho\, d\omega,$$

relation qui fera connaître $d\psi$ en fonction de $d\omega$. On aura aussi $d\delta$ en fonction de $d\omega$, par la différentiation de

$$\text{tang}\,\delta = \tfrac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho},$$

qui donne

$$\frac{d\delta}{\cos^2\delta} = \frac{1}{3}\,\frac{\rho\rho'' - \rho'^2}{\rho^2}\,d\omega.$$

Substituant donc les valeurs de $d\psi$ et de $d\delta$, et de plus ayant égard à la valeur de $\cos\delta$ en fonction de ρ et ρ', il viendra

$$R = \frac{3\rho^2\sqrt{\rho'^2 + 9\rho^2}}{4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho''}.$$

On voit que, pour tous les points d'une courbe dans lesquels la relation

$$4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho'' = 0$$

sera satisfaite, la conique osculatrice sera une parabole; ou autrement, la parabole osculatrice aura un contact du quatrième ordre, et non pas du troisième seulement. D'ailleurs, en de tels points, la valeur de R changera de signe; mais il est facile de voir que lorsque R est de même signe que ρ, le centre de courbure et celui de la conique osculatrice sont d'un même côté de la tangente, c'est-à-dire que la conique osculatrice est une ellipse; autrement ce serait une hyperbole. On saura donc reconnaître si les cinq points consécutifs d'une courbe sont sur une ellipse ou bien sur une hyperbole, ce qui suffira pour discuter la troisième affection de courbure dans les surfaces; d'ailleurs on verra facilement qu'on est conduit par les déterminations de $\tang\delta$ et de R, à des constructions très simples, 1° pour la parabole osculatrice, et 2° pour la conique (ellipse ou hyperbole) osculatrice; ce qui donnera, par le moyen des sections coniques, et abstraction faite de toute notion nouvelle sur la courbure en général, la loi géométrique du polygone infinitésimal dans ses trois ou quatre éléments consécutifs.

IV.

Pour étudier les lois des seconde et troisième affections de la courbure dans les surfaces, il n'y a qu'à étendre aux éléments de troisième et de quatrième ordre le calcul qu'on fait ordinairement pour ceux du second ordre, lorsqu'on étudie la courbure au moyen des cercles osculateurs des sections normales ou obliques. J'exposerai dans ce paragraphe ce qui est relatif à la déviation de courbure des sections normales.

Supposons, comme à l'ordinaire, qu'on ait pris pour axe des z la normale au point pour lequel on étudie la surface; l'équation différentielle de celle-ci aura la forme suivante :

$$dz = \left.\begin{array}{l} b_0 dx^2 \\ +2b_1 dxdy \\ +b_2 dy^2 \end{array}\right| \frac{1}{1.2} + \left.\begin{array}{l} c_0 dx^3 \\ +3c_1 dx^2dy \\ +3c_2 dxdy^2 \\ +c_3 dy^3 \end{array}\right| \frac{1}{1.2.3} + \left.\begin{array}{l} d_0 dx^4 \\ +4d_1 dx^3dy \\ +6d_2 dx^2dy^2 \\ +4d_3 dxdy^3 \\ +d_4 dy^4 \end{array}\right| \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

formule dans laquelle b_0, b_1, b_2, c_0, etc., sont respectivement les valeurs que prennent les coefficients différentiels

$$\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy}, \quad \frac{d^2z}{dy^2}, \quad \frac{d^3z}{dx^3}, \quad \text{etc.},$$

lorsqu'on y fait $x = 0$ et $y = 0$. Maintenant toute section normale dont la trace sur le plan tangent, prise pour axe des x', fera avec l'axe des x un angle φ, aura un développement de la forme

$$dz = \frac{1}{1.2}B_0\, dx'^2 + \frac{1}{1.2.3}C_0\, dx'^3 + \frac{1}{1.2.3.4}D_0\, dx'^4 + \ldots,$$

dans lequel

$$B_0 = \left(\frac{d^2z}{dx'^2}\right)_{x'=0} = b_0\cos^2\varphi + 2b_1\cos\varphi\sin\varphi + b_2\sin^2\varphi,$$

$$C_0 = \left(\frac{d^3z}{dx'^3}\right)_{x'=0} = c_0\cos^3\varphi + 3c_1\cos^2\varphi\sin\varphi + 3c_2\cos\varphi\sin^2\varphi + c_3\sin^3\varphi,$$

etc.;

et, parce que la déviation est donnée en général par

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{dz}{dx'} - \frac{\left[1+\left(\frac{dz}{dx'}\right)^2\right]\frac{d^3z}{dx'^3}}{3\left(\frac{d^2z}{dx'^2}\right)^2},$$

ce sera ici, à cause de $\frac{dz}{dx'} = 0$,

$$\operatorname{tang}\delta = -\frac{C_0}{3B_0^2} = -\frac{(c_0 + 3c_1 \operatorname{tang}\varphi + 3c_2 \operatorname{tang}^2\varphi + c_3 \operatorname{tang}^3\varphi)(\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi})}{3(b_0 + 2b_1 \operatorname{tang}\varphi + b_2 \operatorname{tang}^2\varphi)^2},$$

formule de laquelle on déduit immédiatement cette première conséquence que, *parmi toutes les sections normales relatives à un même point, il y en a toujours une ou bien trois qui offrent en ce point une déviation nulle, ou autrement, qui offrent en ce point un sommet.*

Plus généralement, toute surface se partage en deux sortes de régions distinguées par ce caractère que, en chacun de leurs points, il y a pour les unes trois sections normales à déviation nulle et une seule pour les autres. Enfin pour chaque point des courbes séparant ces deux sortes de régions il y a généralement deux sections normales à déviation nulle.

Après cela, si l'on fait attention que le rayon du cercle osculateur étant donné par

$$\rho = \frac{1 + \operatorname{tang}^2\varphi}{(b_0 + 2b_1 \operatorname{tang}\varphi + b_2 \operatorname{tang}\varphi)},$$

le point proposé est elliptique ou hyperbolique (je veux dire à indicatrice elliptique ou à indicatrice hyperbolique), selon que les racines du dénominateur égalé à zéro sont imaginaires ou bien réelles, on reconnaîtra que pour les points elliptiques toutes les déviations des sections normales sont comprises entre des limites finies; tandis qu'aux points hyperboliques la déviation devient infinie dans les deux directions pour lesquelles la courbure change de signe. Enfin, il y aurait à examiner les circonstances provenant de ce qu'un ou plusieurs facteurs du premier degré en tang φ seraient communs au numérateur et au dénominateur de tang δ; et parmi ces circonstances il convient de signaler au moins celle de certains points dans lesquels aucune des sections normales n'a sa déviation nulle; points singuliers appartenant nécessairement, lorsqu'ils existent, aux courbes qui séparent les deux sortes de régions dont nous avons indiqué l'existence.

V.

Pour exposer la loi de la déviation de courbure dans les sections obliques, je prends pour axe des x sur le plan tangent la ligne suivant laquelle on fait passer tous les plans sécants.

Si l'on rapporte la section à deux axes situés dans son plan, dont l'un sera ce même axe des x, et l'autre, ou axe des Y, sera la trace du plan sécant sur celui des zy; alors on aura pour équation différentielle de cette courbe

$$dY = \left(\frac{dY}{dx}\right)_0 dx + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0 dx^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_0 dx^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4Y}{dx^4}\right)_0 dx^4 + \text{etc.}\ldots$$

et de plus, en appelant θ l'angle que fait le plan sécant avec celui des zx, on a les relations

$$z = Y\cos\theta,$$
$$y = Y\sin\theta,$$

qui, étant substituées dans l'équation de la surface, donneraient celles de la courbe; ou bien, au moyen desquelles on peut calculer facilement les coefficiets de l'équation différentielle ci-dessus; car, en ayant égard à l'équation de la surface, on a les relations suivantes

$$(1)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dY}{dx}\sin\theta = \frac{dY}{dx}\cos\theta,$$

$$(2)\quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\frac{dY}{dx}\sin\theta + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\frac{dY}{dx}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2Y}{dx^2}\sin\theta = \frac{d^2Y}{dx^2}\cos\theta,$$

$$(3)\quad \left.\begin{aligned} &\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{dY}{dx}\sin\theta + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}\left(\frac{dy}{dx}\sin\theta\right)^2 + \frac{d^3z}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\sin\theta\right)^3 \\ &+ 3\frac{d^2z}{dxdy}\frac{d^2Y}{dx^2}\sin\theta + 3\frac{d^2z}{dy^2}\frac{d^2Y}{dx^2}\frac{dY}{dx}\sin^2\theta \end{aligned}\right\} = \frac{d^3Y}{dx^3}\cos\theta,$$

lesquelles, pour $x=0$, $y=0$ et $z=0$, donnent respectivement

$$\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}\right)_0 = \frac{b_0}{\cos\theta},$$

$$\left(\frac{d^3\mathrm{Y}}{dx^3}\right)_0 = \frac{c_0}{\cos\theta} + 3\,\frac{b_1 b_0 \sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{c_0 + 3\,b_1 b_0 \operatorname{tang}\theta}{\cos\theta},$$

et d'après cela, la valeur de la déviation se trouvera donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\delta = -\,\frac{c_0\cos\theta + 3\,b_1 b_0 \sin\theta}{3\,b_0^2}.$$

A la seule inspection de cette formule, on reconnaît que, de toutes les sections obliques qui passent par la même tangente, il y en a une seule dont la déviation est nulle : elle répond à l'inclinaison Θ_1, déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang}\Theta_1 = -\,\frac{c_0}{3b_1 b_0}.$$

Il y a aussi un maximum unique pour l'inclinaison déterminée par

$$\operatorname{tang}\Theta_2 = \frac{3b_1 b_0}{c_0};$$

de sorte que la section douée de la plus grande déviation est perpendiculaire à celle de déviation nulle. Au reste, si on représente la déviation maximum par tang D, il sera facile de reconnaître qu'on a, pour la déviation relative à une section quelconque

$$\operatorname{tang}\delta = (\operatorname{tang}\mathrm{D})\cos\varepsilon,$$

ε étant l'angle des plans correspondants. Or c'est ici un théorème tout-à-fait analogue à celui de Meusnier, avec cette seule différence que, de toutes les sections relatives à une même tangente, c'est la section normale qui a le plus grand rayon de courbure et à laquelle on doit comparer une section quelconque pour établir le théorème en question; au lieu que la section de plus grande déviation est généralement inclinée au plan tangent et ne se confond avec la section normale que dans les deux azimuths qui correspondent aux sections principales. Alors, en effet, la valeur de Θ_2 est nulle parce qu'on a $b_1 = 0$.

Enfin, ces diverses propriétés des sections obliques, quant à leurs premières déviations, sont renfermées dans cette loi simple que *les axes de déviation de toutes les sections relatives à un même azimut forment un plan.* — Appelons, en effet, x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque de l'axe de déviation de la section qui est déterminée par l'angle θ, on aura évidemment

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}};$$

et en substituant ces valeurs dans la formule de la déviation, il viendra

$$3b_0^2\, x + 3b_1\, b_0\, y + c_0\, z = 0,$$

qui est l'équation du plan en question. — Or chaque plan, mené par l'axe des x, coupe le plan des zy et celui qu'on vient de déterminer suivant deux lignes qui sont respectivement la normale et l'axe de déviation de la section correspondante; et de là la loi que nous avons reconnue entre les quantités ε, δ et D. Il ne serait pas difficile, après cela, de trouver le lieu des axes des paraboles osculatrices de toutes les sections obliques relatives à une même tangente, le lieu des foyers de ces mêmes paraboles, etc.

VI.

Pour étudier la courbure des surfaces dans les éléments du quatrième ordre, il suffit de remarquer que les sections normales relatives à un même point pourront être appelées elliptiques, hyperboliques, ou enfin paraboliques, suivant que leurs cinq points successifs, ou leurs quatre éléments consécutifs, seront sur une ellipse, sur une hyperbole ou sur une parabole.

Or la valeur du demi-diamètre de la conique osculatrice au lieu de l'osculation est donnée, comme on l'a vu dans le § III, par la formule

$$R = \frac{3\rho^2\sqrt{\rho'^2+9\rho^2}}{4\rho'^2+9\rho^2-3\rho\rho''}.$$

D'ailleurs, en appelant p, q, r, s les coefficients différentiels successifs de l'ordonnée d'une courbe quelconque en fonction de l'abscisse, et en supposant, comme cela aura lieu dans les calculs suivants, que le premier de ces coefficients soit nul, on trouvera facilement les relations ci-dessous

$$\rho = \frac{1}{q}, \qquad \rho' = -\frac{r}{q^3}, \qquad \rho'' = \frac{3(r^2+q^4)-qs}{q^5};$$

lesquelles donnent, pour le demi-diamètre de la conique osculatrice, la valeur

$$R = \frac{3q\sqrt{r^2+9q^4}}{3qs-5r^2}.$$

Pour appliquer cette formule aux sections normales d'une surface, il faudra se reporter aux calculs du § IV, qui donnent, pour une telle section, les valeurs de q, r, s en fonction des dérivées partielles de la variable principale et de l'angle φ qui caractérise chaque section; on trouvera ainsi que les directions dans lesquelles la valeur de R passe par l'infini, sont données par l'équation

$$3B_0D_0 - 5C_0^2 = 0,$$

qui est du sixième degré en tang φ. De sorte que, parmi les sections normales relatives à un même point, *le nombre des sections parabo-*

liques est un des suivants, 6, 4, 2 ou 0, et sous ce rapport, on peut concevoir toute surface partagée en quatre sortes de régions distinctes.

Les sections paraboliques, déterminées au moyen de l'équation ci-dessus, divisent le plan tangent en autant d'aires distinctes que cette équation fournit de racines inégales. (Je comprends, dans une même aire, les deux angles égaux opposés par le sommet et formés par deux sections paraboliques consécutives.) — Or, si la section parabolique, qui sépare deux aires contiguës, correspond à une racine simple de l'équation en tang φ, il est manifeste que le signe de R change lorsqu'on passe de l'une à l'autre de ces deux aires, ce qu'on peut exprimer comme il suit :

Les sections normales qui font partie d'une même aire sont de même genre, elliptiques ou hyperboliques; et les sections qui appartiennent à deux aires contiguës sont de genre différent.

Mais, dans les points singuliers pour lesquels l'équation en tang φ a des racines égales, la règle qu'on vient d'énoncer souffre évidemment exception.

On étendra cette recherche aux sections obliques en se plaçant dans les circonstances indiquées au § V, et en ajoutant aux équations (1), (2) et (3) la suivante, dans laquelle je n'écris pas les termes qui doivent s'évanouir par la substitution des valeurs $x = 0$, $y = 0$, et $z = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^4 z}{dx^4} + \ldots \\ \quad + 6\,\dfrac{d^3 z}{dx^2 dy}\,\dfrac{d^2 Y}{dx^2}\sin\theta + \ldots \\ \quad + 3\,\dfrac{d^2 z}{dx\,dy}\,\dfrac{d^3 Y}{dx^3}\sin\theta + 3\,\dfrac{d^2 z}{dy^2}\left(\dfrac{d^2 Y}{dx^2}\right)^2\sin^2\theta \end{array}\right\} = \frac{d^4 Y}{dx^4}\cos\theta.$$

D'ailleurs, ces substitutions donneront, après les réductions,

$$\left(\frac{d^4 Y}{dx^4}\right)_0 = \frac{d_0 + 3\,(b_1 c_0 + 2\,b_0 c_1)\,\text{tang}\,\theta + 3\,b_0\,(b_0 b_2 + 3\,b_1^2)\,\text{tang}^2\,\theta}{\cos\theta}.$$

On pourra donc former l'équation de condition

$$3qs - 5r^2 = 0,$$

qui sera du second degré en tang θ.

Quand les deux racines de cette équation seront imaginaires, toutes les sections relatives à la tangente correspondante seront du même genre, c'est-à-dire, toutes elliptiques, ou bien toutes hyperboliques. Si ces deux racines sont réelles et inégales, elles détermineront deux sections paraboliques qui sépareront les sections elliptiques des hyperboliques. Enfin, si les racines sont égales, toutes les sections seront de même genre; mais elles atteindront la forme parabolique dans l'inclinaison correspondante à la racine double. D'ailleurs, il convient d'observer que ces trois circonstances ont généralement lieu dans un même point en y considérant les sections obliques, relatives à des tangentes diverses.

VII.

Je vais maintenant démontrer la propriété générale des sections coniques, annoncée ci-dessus, § II.

Soient e l'excentricité d'une section conique, P le rayon de courbure au sommet du grand axe, ω l'angle de la normale avec cet axe, α l'angle de cette même normale avec le rayon vecteur, ρ et ρ' les rayons de courbure de la conique et de sa première développée, on a les trois relations

$$\sin\alpha = e \sin\omega, \quad \rho = \frac{\mathrm{P}}{\cos^3\alpha}, \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\omega}.$$

De là il est facile de conclure

$$\rho' = 3\rho \frac{\tang^2\alpha}{\tang\omega},$$

relation qui déjà par elle-même fournit une construction générale et très simple pour ρ'. Dans le cas de la parabole, si l'on appelle δ l'angle que fait avec la normale le diamètre conjugué à la tangente au point pour lequel on calcule ρ et ρ', on a $\delta = \alpha = \omega$, et par suite

$$\rho' = 3\rho \operatorname{tang} \delta;$$

de sorte que la propriété annoncée au § II se trouve démontrée pour la parabole.

Pour l'établir dans sa généralité, on prendra la normale et la tangente α pour axe des coordonnées. Les équations des rayons vecteurs et du diamètre conjugué à la tangente seront respectivement

$$y = x \operatorname{tang} \alpha, \quad y = -x \operatorname{tang} \alpha, \quad y = x \operatorname{tang} \delta.$$

En même temps l'équation du grand axe sera

$$y = (x - \rho \cos^2 \alpha) \operatorname{tang} \omega,$$

à cause de la valeur connue de la normale

$$\mathrm{N} = \rho \cos^2 \alpha.$$

D'ailleurs le diamètre conjugué coupe l'axe au centre, c'est-à-dire au milieu de cette partie de l'axe qui est interceptée par les deux rayons vecteurs; et cette condition étant exprimée donnera, la relation

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha}{\operatorname{tang} \omega},$$

qui, substituée dans la valeur trouvée ci-dessus pour ρ', établira la formule dont nous avons fait usage.

A l'aide de cette propriété des sections coniques et de la valeur R du demi-diamètre, donnée en fonction de ρ, ρ' et ρ'', ci-dessus, au § II, il sera facile de construire en chaque point d'une courbe quelconque une conique qui ait avec elle un contact d'ordre déterminé.

En effet, l'axe de déviation est le lieu des centres de toutes les coniques qui ont avec la proposée un contact du troisième ordre, et en particulier, c'est une ligne parallèle à l'axe de la parabole osculatrice. Donc si l'on projette le centre de courbure O de la courbe proposée sur l'axe de déviation par une perpendiculaire $\overline{OD}$, puis que de nouveau on projette le point D sur la normale par la perpendiculaire $\overline{DN}$, le point N sera le pied de la normale sur l'axe de la parabole osculatrice. Cette dernière se trouvera donc entièrement déterminée.

A ce propos, je remarquerai que le lieu des foyers des paraboles qui ont avec la proposée un contact du second ordre seulement, est un cercle construit sur le demi-rayon de courbure comme diamètre; et aussi que toutes les directrices de ces mêmes paraboles passent par un point situé sur la normale, hors de la concavité et à une distance du périmètre égale aussi au demi-rayon de courbure.

Enfin voici une propriété à l'aide de laquelle on construira la conique osculatrice, c'est-à-dire l'ellipse ou bien l'hyperbole qui touche la proposée par un contact du quatrième ordre.

L'enveloppe des axes de toutes les coniques qui ont avec la proposée un contact du troisième ordre seulement, est une parabole ayant pour directrice l'axe de déviation et pour foyer la projection du centre de courbure O sur le rayon vecteur de la parabole osculatrice (rayon vecteur facile à déterminer, puisqu'il est incliné sur la normale de l'angle δ qui caractérise l'axe de déviation). Or cette loi s'applique en particulier à la conique osculatrice dont le centre C est fixé sur l'axe de déviation par la valeur de R. De ce point C on mènera donc à la parabole ci-dessus définie, deux tangentes qui seront perpendiculaires entre elles et seront les deux axes de la conique osculatrice. Pour distinguer l'axe principal, on remarquera qu'il doit rencontrer la normale entre le périmètre et le point O, centre de courbure. Or on reconnaîtra sans peine que des deux tangentes menées par le point C il y en aura toujours une et une seule qui satisfera à cette condition, quelle que soit d'ailleurs la situation de ce point C sur l'axe de déviation.

On fixera d'apres ce qui précède le point (N), pied de la normale sur l'axe principal de la conique osculatrice. La perpendiculaire élevée à la normale par ce point rencontrera en D et D' le cercle décrit sur le rayon de courbure comme diamètre. Ces points appartiennent aux deux rayons vecteurs de la conique osculatrice, lesquels, par leur rencontre avec l'axe principal, détermineront les foyers F et F'.