JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 238-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__238_0>

NOTE

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$;

PAR M. OSSIAN BONNET,

Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

M. Poisson a donné, dans le dix-neuvième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, les deux formules

$$(1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos ax\, dx = \frac{1}{2^a}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos(a+2m)\, x\, dx = 0,$$

dans lesquelles a est un nombre positif quelconque, et m un nombre entier positif.

Je vais appliquer ces deux formules à la détermination de l'intégrale d'Euler

$$(2) \qquad A = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

où a est une constante positive et < 1.

En posant $x = \tang^2 y$, j'ai d'abord

$$(3) \qquad A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1} y \cos^{1-2a} y\, dy.$$

Maintenant, soit

$$1 - 2a > 0.$$

On sait que, y étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$2^a \cos\frac{a\pi}{2}\sin^a y = \cos ay - a\cos(a-2)y + \frac{a(a-1)}{1.2}\cos(a-4)y\ldots,$$

en se bornant à la valeur réelle et positive du premier membre. Changeant dans cette formule a en $2a-1$, nous en tirerons

$$\sin^{2a-1} y = \frac{1}{2^{a-1}\cos\frac{2a-1}{2}\pi}[\cos(2a-1)y-(2a-1)\cos(2a-3)y+\ldots].$$

Substituant cette valeur de $\sin^{2a-1} y$ dans la formule (3), il vient

$$\begin{aligned} A = {} & \frac{1}{2^{2a-2}\sin a\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{1-2a} y\cos(1-2a)y\,dy \\ & -(2a-1)\frac{1}{2^{2a-2}\sin a\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{1-2a} y\cos(2+1-2a)y\,dy\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or, d'après les formules ci-dessus, tous les termes du développement du second membre sont nuls, excepté le premier, qui est

$$\frac{\pi}{2^{2-2a}}\cdot\frac{1}{2^{2a-2}\sin a\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

donc, dans le cas de $1-2a>0$, on a

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tang}^{2a-1} y\,dy = \int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Soit, en second lieu, $2a-1>0$. Je pose

$$y = \frac{\pi}{2} - y',\quad a = 1 - a'.$$

L'intégrale

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tang}^{2a-1} y\,dy$$

devient

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang}^{2a'-1} y'\,dy'.$$

Mais $2a' - 1$ étant > 0, cette dernière intégrale a pour valeur

$$\frac{\pi}{\sin a'\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

il en est donc de même de

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang}^{2a-1} y\,dy = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx,$$

dans le cas de $2a-1 > 0$.

D'ailleurs, dans le cas de $2a - 1 = 0$, la formule à démontrer se vérifie aisément. Donc, dans tous les cas,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

ERRATA pour le Mémoire de M. Steiner. (Cahier d'avril.)

Page 113, ligne 14, *après* sphériques, *ajoutez* isoscèles

Page 160, ligne 12, et page 167, ligne 26, *au lieu de* arcs de cercle égaux, *lisez* arcs de CERCLES ÉGAUX, *ou bien* arcs de cercle à rayons égaux.
