JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GAUSS

Démonstration élémentaire d'un théorème de Legendre relatif à la trigonométrie sphérique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 273-274.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__273_0>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

D'UN

THÉORÈME DE LEGENDRE RELATIF A LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

PAR M. GAUSS [*].

On peut résoudre de petits triangles sphériques comme des triangles plans, pourvu que l'on diminue chaque angle sphérique du tiers de l'excès sphérique. Voici une démonstration tout-à-fait élémentaire de ce théorème.

Désignons l'excès sphérique par 3ω, les trois côtés du triangle par a, b, c, et les angles sphériques opposés par $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$. On a les deux formules connues

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{3}{2}\omega \sin (A - \frac{1}{2}\omega)}{\sin (B+\omega) \sin (C+\omega)},$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin (B - \frac{1}{2}\omega) \sin (C - \frac{1}{2}\omega)}{\sin (B+\omega) \sin (C+\omega)};$$

d'où résulte

$$\frac{\sin^6 \frac{1}{2} a}{\cos^2 \frac{1}{2} a} = \frac{\sin^3 \frac{3}{2}\omega \sin^3 (A - \frac{1}{2}\omega)}{\sin^2 (B+\omega) \sin (B - \frac{1}{2}\omega) \sin^2 (C+\omega) \sin (C - \frac{1}{2}\omega)}.$$

On a de même

$$\frac{\sin^6 \frac{1}{2} b}{\cos^2 \frac{1}{2} b} = \frac{\sin^3 \frac{3}{2}\omega \sin^3 (B - \frac{1}{2}\omega)}{\sin^2 (A+\omega) \sin (A - \frac{1}{2}\omega) \sin^2 (C+\omega) \sin (C - \frac{1}{2}\omega)}.$$

En divisant l'une de ces équations par l'autre, et extrayant la racine

[*] Cet article est traduit de l'allemand. *Voir* le Journal de M. Crelle, tome XXII.
J. L.

carrée, on aura

$$\frac{\sin^3 \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} b}{\sin^3 \frac{1}{2} b} = \frac{\sin(A+\omega)\sin^2(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\sin^2(B-\frac{1}{2}\omega)}.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \sqrt[3]{D},$$

en représentant, pour abréger, par D la quantité

$$\frac{a^3 \cos \frac{1}{2} a}{8 \sin^3 \frac{1}{2} a} \cdot \frac{8 \sin^3 \frac{1}{2} b}{b^3 \cos \frac{1}{2} b} \cdot \frac{\sin(A+\omega)\sin^2(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin^3 A} \cdot \frac{\sin^3 B}{\sin(B+\omega)\sin^2(B-\frac{1}{2}\omega)}.$$

Cette formule est rigoureuse; mais on voit aisément que si a, b, c sont très-petits du premier ordre, chacun des quatre facteurs dont D est composé ne diffère de l'unité que par des termes du quatrième ordre. Donc, etc.

Dans mes *Recherches générales sur les surfaces courbes*, j'ai étendu ce théorème aux triangles formés sur une surface courbe quelconque par les lignes les plus courtes.