JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

THÉODORE OLIVIER

Des propriétés osculatrices de deux surfaces en contact par un point

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 297-308.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__297_0>

DES PROPRIÉTÉS OSCULATRICES

DE DEUX SURFACES EN CONTACT PAR UN POINT;

PAR M. THÉODORE **OLIVIER**.

Dans un Mémoire ayant pour titre : *Construction des tangentes en un point multiple d'une courbe plane ou à double courbure dont l'équation est inconnue*, publié dans le vingt-et-unième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai donné la construction géométrique des tangentes au point multiple que présentait la courbe intersection de deux surfaces en contact par un point, en employant comme surfaces auxiliaires deux surfaces du second ordre et osculatrices, par leur sommet, aux deux surfaces données. Personne n'avait encore songé à l'emploi de ces surfaces auxiliaires pour résoudre le problème des tangentes au point multiple. Je déduisis facilement, de la méthode que j'avais employée, la construction géométrique de la tangente en un point de la courbe de contact de deux surfaces, tangente dont on ignorait encore la construction en géométrie descriptive, tout comme on ignorait la construction des tangentes au point multiple.

Plus tard, dans un Mémoire publié dans le vingt-sixième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et qui avait pour titre : *Des indicatrices des divers ordres de contact entre deux surfaces et des conditions géométriques auxquelles doivent satisfaire deux surfaces ayant un point de contact pour qu'elles aient un contact du $n^{ième}$ ordre tout autour de ce point*, j'ai démontré que, si deux surfaces en contact par un point, avaient suivant trois directions partant de ce point un contact du second ordre, elles avaient dès-lors un contact du second ordre tout autour du même point; on déduit évidemment de ce théorème que deux surfaces ayant un contact du premier ordre en un point m, peuvent avoir un contact du second ordre, suivant deux directions, en partant de ce point.

Toutefois, pour compléter les théorèmes que j'ai établis sur l'osculation des surfaces au moyen des procédés que met à notre disposition la géométrie descriptive, je me propose, dans cette Note, de rechercher directement :

Si deux surfaces, ayant un contact du premier ordre en un point, ne peuvent pas avoir un contact du second ordre, suivant certaines directions, à partir de ce point?

La solution directe de cette question nous conduira à quelques particularités géométriques qui ne sont pas sans intérêt.

Soient données deux surfaces Σ et Σ' en contact par un point m; désignons par T leur plan tangent commun en m, et par N leur normale commune en ce même point m.

Je désigne par θ et t les tangentes aux lignes de courbure de la surface Σ se croisant en m.

θ correspondra à la ligne de courbure maximum, et R sera le rayon de courbure maximum de Σ;

t correspondra à la ligne de courbure minimum, et r sera le rayon de courbure minimum de Σ.

On aura de même θ' et R' pour la courbure maximum de Σ', et t' et r' pour la courbure minimum de Σ'.

Désignons par α l'angle que font entre elles les droites θ et θ', dès-lors nous connaissons l'angle que θ fait avec les trois autres tangentes, puisque θ et t, θ' et t' se croisent en angle droit.

Cela posé, désignons par O et O' les surfaces du second ordre, respectivement osculatrices au point m aux surfaces Σ et Σ' et par leur sommet.

Supposons que ces deux surfaces O et O' sont des surfaces ayant un centre, ellipsoïde ou hyperboloïde à une nappe, suivant que la surface à laquelle chacune d'elles est osculatrice à ses rayons de courbure tournés dans le même sens ou en sens opposé.

En établissant que les deux surfaces O et O′ ont même centre situé sur la normale N et à une distance c du point m, on établit que si ces deux surfaces se coupent, elles se couperont suivant deux courbes planes, ou se toucheront suivant une courbe plane, les plans de ces courbes passant par la normale N.

Par conséquent on voit que les deux surfaces Σ et Σ' pourront, en général, 1° avoir un contact du second ordre suivant deux directions, ou 2° suivant une seule direction, ou 3° suivant aucune direction.

Discutons maintenant toutes les particularités qui peuvent se présenter, suivant que les surfaces O et O′ seront des ellipsoïdes, des hyperboloïdes à une nappe ou des cylindres, et suivant les relations de grandeur qui peuvent exister entre les rayons de courbure R, r, R′, r', des surfaces données Σ et Σ', et aussi suivant la grandeur de l'angle α que font entre elles les tangentes θ et θ'.

Menons par le centre x, commun aux deux surfaces O et O′, un plan P parallèle au plan tangent T.

Ce plan P coupera respectivement ces deux surfaces O et O′, suivant des sections coniques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ qui pourront être :

1°. Deux ellipses si les deux surfaces Σ et Σ' ont toutes deux leurs rayons de courbure dirigés dans le même sens sur la normale N;

2°. Deux hyperboles si les deux surfaces Σ et Σ' ont toutes deux leurs rayons de courbure dirigés en sens opposé sur la normale N;

3°. Une ellipse et une hyperbole si l'une des surfaces Σ, par exemple, a ses rayons de courbure dirigés en sens opposé, l'autre surface Σ' les ayant dirigés dans le même sens sur la normale N;

4°. Une ellipse et deux droites parallèles;

5°. Une hyperbole et deux droites parallèles;

6°. Deux couples de droites parallèles.

Dans les quatrième et cinquième cas l'une des surfaces Σ et Σ' est une surface développable, et dans le sixième cas les deux surfaces Σ et Σ' sont toutes deux développables.

On voit de suite que, les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, ou 1° se couperont en quatre points formant les sommets d'un parallélogramme dont les diagonales se croiseront au centre x commun aux deux courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, et ces diagonales donneront les directions suivant lesquelles le contact du second ordre existe entre les surfaces Σ et Σ'; ou 2° se toucheront en deux points extrémités d'un diamètre commun, lequel donnera la direction unique suivant laquelle le contact du second ordre existe entre les surfaces Σ et Σ'; ou 3° n'auront aucun point commun, ce qui indiquera que les deux surfaces Σ et Σ' ne peuvent avoir de contact du second ordre.

On voit aussi de suite, par ce qui précède, que si deux surfaces développables ont une génératrice droite commune, et un contact du premier ordre tout le long de cette génératrice, elles n'auront jamais un contact du second ordre, quelle que soit la direction que l'on suive en partant de la génératrice commune; en sorte que tout autour de chaque point de la génératrice commune, les deux surfaces développables n'auront qu'un contact du premier ordre; mais si deux surfaces développables sont en contact par un point m, et que les génératrices passant par ce point se croisent, au lieu de se superposer, alors il existera toujours deux directions à partir du point m suivant lesquelles les deux surfaces auront un contact du second ordre.

Désignons par a et a' le demi grand axe, et par b et b' le demi petit axe des courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

L'équation de la courbe $\mathcal{E}$ sera, en prenant l'axe des x parallèle à la tangente θ et l'axe des y parallèle à la tangente t,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation de la courbe $\mathcal{E}'$ sera, par rapport aux mêmes axes,

$$x^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a'^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b'^2}\right) + 2xy\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{b'^2}\right) + y^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{a'^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b'^2}\right) = 1,$$

comme l'on a

$$R = \frac{a^2}{c}, \quad r = \frac{b^2}{c}, \quad R' = \frac{a'^2}{c}, \quad r' = \frac{b'^2}{c}.$$

L'équation de $\mathfrak{C}$ pourra s'écrire :

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\mathrm{R}} + \frac{y^2}{r} = \frac{1}{c},$$

et l'équation de $\mathfrak{C}'$ pourra s'écrire

$$(2) \quad x^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{R}'} + \frac{\sin^2\alpha}{r'}\right) + 2xy\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{\mathrm{R}'} - \frac{1}{r'}\right) + y^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{R}'} + \frac{\cos^2\alpha}{r'}\right) = \frac{1}{c}.$$

Les deux courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ ayant même centre se couperont en quatre points symétriquement placés par rapport à l'origine des coordonnées et par rapport aux axes des x et des y, ou, en d'autres termes, les quatre points seront les sommets d'un parallélogramme dont le centre sera à l'origine des coordonnées.

Si donc entre l'équation $y = x$ tang δ et les équations (1) et (2) on élimine les variables x et y, on aura une équation du second degré en tang δ, de laquelle on tirera

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{\mathrm{R}r\sin\alpha\cos\alpha\,(r' - \mathrm{R}') \pm \sqrt{\mathrm{M}}}{r(r'\sin\alpha + \mathrm{R}'\cos^2\alpha) - r'\mathrm{R}'}.$$

En écrivant pour abréger

$$(4) \quad r\mathrm{R}r'\mathrm{R}'[(rr' + \mathrm{R}\mathrm{R}')\sin^2\alpha + (r\mathrm{R}' + r'\mathrm{R})\cos^2\alpha - r\mathrm{R} - r'\mathrm{R}'] = \mathrm{M},$$

on pourra donc connaître la valeur de l'angle δ toutes les fois que l'on connaîtra les rayons de courbure maximum et minimum des deux surfaces Σ et Σ' pour le point m par lequel ces deux surfaces sont en contact, et l'angle α que font entre elles les deux tangentes θ et θ' aux lignes de courbure maximum des deux mêmes surfaces Σ et Σ' passant par ce même point m. Ainsi, les équations (3) et (4) serviront à déterminer l'angle δ que la tangente à la direction du contact du second ordre existant entre les surfaces Σ et Σ', fait avec la droite θ, tangente à la ligne de courbure maximum de la surface Σ.

On voit que la tangente trigonométrique de l'angle δ aura : 1° deux valeurs lorsque M sera positif; 2° une seule valeur lorsque $M = 0$; et 3° deux valeurs imaginaires lorsque M sera négatif.

Lorsque l'on voudra se servir des formules (3) et (4) on devra se rappeler que l'on y a supposé que r, R, r', R', avaient tous le signe $+$; par conséquent on devra, suivant les hypothèses que l'on fera pour les surfaces Σ et Σ', donner aux rayons de courbure les signes $+$ ou $-$ suivant que la surface aura ses rayons de courbure tournés dans le même sens ou en sens opposés.

Supposons que l'angle α soit nul, alors les plans des sections principales maximum des deux surfaces Σ et Σ' se superposent ainsi que les plans de leurs sections principales minimum; en d'autres termes, les tangentes θ et θ' se confondent ainsi que les tangentes t et t'.

α étant nul, on a

$$\sin\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \cos\alpha = 1.$$

Dans ce cas la valeur de M devient

$$M = rRr'R'(R' - R)(r - r'),$$

et

$$\text{tang}\,\delta = \pm\sqrt{\frac{rr'R}{R'}\frac{(R'-R)}{(r-r')}}. \tag{5}$$

Ainsi tang δ a deux valeurs égales et de signes contraires, et ces deux valeurs seront :

1°. *Réelles* si l'on a en même temps

$$R' > R$$

et

$$r < r',$$

ou

$$R' < R$$

et

$$r > r':$$

2°. *Imaginaires* si l'on a en même temps

$$R > R'$$

et

$$r' > r,$$

ou

$$R < R'$$

et

$$r' < r.$$

Si $r = r'$, tang δ devient infini, l'angle δ est droit et l'osculation du second ordre n'a lieu entre les deux surfaces Σ et Σ' que dans la direction de leurs lignes de plus petite courbure.

Si $R = R'$, tang δ devient nul, l'angle δ est nul et l'osculation du second ordre n'a lieu entre les deux surfaces Σ et Σ' que dans la direction de leurs lignes de plus grande courbure.

On pourrait faire diverses autres hypothèses, mais il est inutile d'entrer dans plus de détails sur ce point; l'on voit de suite que les valeurs que l'on obtiendra pour tang δ s'accorderont avec les relations de position que les sections coniques $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ affecteront entre elles, en vertu des hypothèses que l'on fera touchant les relations de grandeur existant entre r, R, r', R' et la nature géométrique des surfaces Σ et Σ', ou, en d'autres termes, suivant que leurs surfaces osculatrices du second ordre O et O' seront des ellipsoïdes, ou des hyperboloïdes à une nappe, ou des cylindres.

Supposons que le point m contact des deux surfaces Σ et Σ' soit l'ombilic de la surface Σ'; alors la surface osculatrice du second ordre O' deviendra une sphère S du rayon ρ; et supposons que r, R et ρ soient dirigés dans le même sens, sur la normale commune N; on devra dès-lors, dans les formules (3) et (4), poser

$$r' = \rho$$

et

$$R' = \rho.$$

Cette supposition que la surface osculatrice O′ devient une sphère, entraîne la condition de $\alpha =$ un angle droit; et en effet la sphère ayant même courbure tout autour d'un de ses points, les deux surfaces O et S doivent être considérées comme ayant leurs plans de sections principales maximum et minimum superposés; en d'autres termes, on doit supposer que les tangentes θ et t', θ' et t se superposent, et dans ce cas on doit avoir

$$\rho < \mathrm{R}$$

et

$$\rho > r.$$

En faisant dans les formules (3) et (4) les hypothèses indiquées, on aura

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tang} \delta = \pm \sqrt{r\mathrm{R}\,\frac{(\mathrm{R}-\rho)}{\rho - r}}.$$

On a donc deux valeurs égales et de signes contraires pour tang δ; par conséquent les directions du contact du second ordre font des angles égaux à droite et à gauche de la tangente θ; résultat que l'on devait prévoir, puisque dans ce cas, la courbe $\mathfrak{C}$ étant une ellipse, ou une hyperbole, ou deux droites parallèles, la courbe $\mathfrak{C}'$ est un cercle.

Et si l'on veut que les tangentes aux directions de l'osculation du second ordre entre les surfaces Σ et Σ' se croisent à angle droit, il faudra poser dans l'équation (6) tang $\delta = 1$. On aura donc

$$\text{(7)} \qquad \rho - r = r\mathrm{R}(\mathrm{R} - \rho),$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{r(\mathrm{R}^2 + 1)}{r\mathrm{R} + 1}.$$

Ainsi, si le rayon ρ de la sphère osculatrice S au point m de Σ' satisfait à l'équation (7), les deux surfaces Σ et Σ' auront une osculation du second ordre, suivant deux directions à partir du point de contact m, et ces directions seront à angle droit.

Si l'on voulait qu'il n'y eût qu'une seule direction d'osculation, il faudrait poser $M = 0$, ou

$$2R\rho^2[(r\rho + R\rho)\sin^2\alpha + (r\rho + r\rho)\cos^2\alpha - rR - \rho^2] = 0,$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad \rho = \frac{r+R}{2} \pm \frac{R-r}{2},$$

ce qui donne deux valeurs pour ρ; pour l'une on a

$$\rho = r,$$

pour l'autre

$$\rho = R.$$

Ainsi la surface Σ' devra avoir, dans ce cas, pour rayon de courbure à l'ombilic, ou le rayon de courbure maximum, ou le rayon de courbure minimum de la surface Σ.

Tout ce que nous venons de dire sur la recherche de la direction des osculations du second ordre, s'applique mot à mot à la recherche des tangentes au point multiple de la courbe intersection de deux surfaces en contact par un point m; ces deux surfaces ayant dès lors un plan tangent commun T, et une normale commune N, en ce même point m.

D'après ce qui précède on peut énoncer les théorèmes généraux suivants :

1^er^ *Théorème*. Deux surfaces Σ et Σ', ayant en un point m même plan tangent T et même normale N, et ayant même direction pour leurs lignes de courbure (ainsi les tangentes aux lignes de courbure se croisant au point m, se superposent deux à deux), se coupent suivant une courbe C. Cette courbe aura deux branches se croisant au point m, et les deux tangentes au point m de la courbe C feront un angle qui sera divisé en deux parties égales par la tangente de l'une des lignes de courbure, l'angle supplémentaire étant divisé en deux parties égales par la tangente de l'autre ligne de courbure, appartenant soit à la surface Σ, soit à la surface Σ'.

2me *Théorème.* Une surface Σ et un sphère S, ayant en un point m même plan tangent T et même normale N, se coupent suivant une courbe C telle, que l'angle que font entre elles ses deux tangentes pour le point m, est divisé en deux parties égales par la tangente de l'une des lignes de courbure de la surface Σ.

3me *Théorème.* Si l'on construit en un point m le plan tangent T à une surface Σ, et que cette surface soit coupée par ce plan T suivant une courbe C, cette courbe sera telle que l'angle que font entre elles ses deux tangentes pour le point m est divisé en deux parties égales par la tangente de l'une des lignes de courbure de la surface Σ.

Ce dernier théorème n'est qu'un corollaire du second, car le plan tangent T doit être rigoureusement considéré comme une sphère de rayon infini.

De ces théorèmes généraux on déduit, comme corollaires, les théorèmes particuliers suivants :

1er *Théorème.* Étant donnée une surface réglée Σ; le plan tangent T en un point m d'une de ses génératrices droites G, coupe cette surface Σ suivant une courbe C passant par le point m, et l'angle formé par la tangente λ de la courbe C au point m et par la génératrice G, est divisé en deux parties égales par la tangente de l'une des lignes de courbure de la surface Σ.

2me *Théorème.* Les tangentes aux lignes de courbure d'un paraboloïde hyperbolique ou d'un hyperboloïde à une nappe, et se croisant en un point m, divisent en deux parties égales l'angle et son supplément formés par les génératrices droites de systèmes différents qui se croisent en ce même point m.

3me *Théorème.* La tangente λ au point m de la courbe C, intersection d'une surface réglée Σ par son plan tangent T, et la génératrice droite G, forment les génératrices des deux systèmes de l'hyperboloïde ou du paraboloïde osculateur par son sommet, au point m) à la surface Σ. Ce théorème est un corollaire des deux théorèmes précédents.

4^{me} *Théorème*. Si l'on mène en trois points m, m', m'', de la génératrice droite G d'une surface réglée Σ, les plans tangents T, T′, T″, ces plans couperont Σ suivant les courbes C, C′, C″ et leurs tangentes λ, λ', λ'' seront les directrices de la surface gauche du second ordre ayant un contact du second ordre avec Σ tout le long de la droite G.

En effet, si l'on considère trois génératrices successives et infiniment voisines [*] G, G′, G″ de la surface Σ, et une droite D se mouvant sur ces trois génératrices, on engendrera la surface réglée du second ordre L, osculatrice à la surface Σ tout le long de G, et par-là on démontre qu'il existe toujours et qu'il n'existe qu'une seule surface réglée du second degré ayant une osculation du second ordre tout le long de G avec la surface Σ.

Cela posé, si l'on prend sur G un point m, et que l'on construise l'hyperboloïde H osculateur par son sommet et en ce point m à la surface Σ, les génératrices droites de H se croisant en m, seront G et λ.

Or, pour ce même point m, L et H auront une osculation du second ordre; le plan tangent en m doit donc les couper suivant les mêmes génératrices G et λ; donc λ ne sera qu'une position de la droite D; donc, etc.

Remarquons que la considération des trois génératrices successives G, G′, G″ démontre l'existence de la surface L, mais ne peut servir à la construire; tandis que les trois tangentes λ, λ', λ'' étant à distance finie les unes des autres, peuvent servir à construire graphiquement la surface L.

5^{me} *Théorème*. Si, pour un point m d'une surface du second ordre Σ, on construit les sections circulaires C et C′; si ensuite, au point m, on

---

[*] On entend par génératrices successives G, G′, G″, celles qui sont telles, qu'en vertu du mode de génération de la surface Σ, on ne peut pas placer entre G et G′ une génératrice qui approche plus près de G que G′, et entre G′ et G″ une génératrice qui approche plus près de G′ que G″.

construit les tangentes λ à C et λ' à C', l'angle et son supplément, formés par λ et λ', seront divisés en deux parties égales par les tangentes aux lignes de courbure de la surface Σ se croisant au point m.

Ce théorème n'est qu'un corollaire du deuxième théorème général, puisque, par deux cercles C et C', qui se coupent dans l'espace en deux points, on peut toujours faire passer une surface sphérique.

6me *Théorème*. Étant données dans l'espace deux cercles C et C' se coupant aux points m et m', on peut toujours les envelopper par deux cônes; désignant par s le sommet du premier cône et par s' le sommet du second cône, les génératrices sm et sm' du premier cône couperont sous l'angle droit les génératrices $s'm$ et $s'm'$ du second cône.

Désignant par O le centre de la sphère passant par les deux cercles C et C', les cinq points O, m, m', s, s' seront disposés les uns par rapport aux autres de telle sorte que le triangle Oss' sera la base de deux pyramides triangulaires et trirectangles en leurs sommets m et m'.