JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. DELAUNAY

Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 309-315.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__309_0>

SUR LA SURFACE DE RÉVOLUTION

DONT LA COURBURE MOYENNE EST CONSTANTE;

PAR CH. DELAUNAY.

Lorsqu'on cherche la surface d'une étendue donnée renfermant un volume maximum, on trouve que l'équation de cette surface doit satisfaire à l'équation aux différences partielles du second ordre

$$(1)\quad r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) + \frac{1}{a}(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}} = 0;$$

la question est donc ramenée à intégrer cette équation, ce qu'on n'a pas encore pu faire en général. Dans le cas particulier où $a = \infty$, l'équation (1) devient celle de la surface minimum qui a été intégrée par Monge; mais la forme compliquée de l'intégrale qu'il a donnée, et dont on ne peut tirer aucun parti, fait présumer que si jamais on parvient à intégrer complétement l'équation (1), l'intégrale ne pourra être d'aucune utilité.

Si l'on joint à l'équation (1) la condition que la surface soit de révolution, la difficulté disparaît entièrement, et non-seulement on trouve l'équation générale de la surface, mais on peut aussi donner une définition géométrique très-simple de sa courbe méridienne. C'est ce que je me propose de faire voir dans cette Note.

J'observerai d'abord que l'équation (1) exprime que la somme des courbures principales de la surface est constante et égale à $\frac{1}{a}$. Or on sait qu'en chaque point d'une surface la somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires l'une à l'autre, est égale à la somme des courbures principales. On peut donc appeler *courbure moyenne* d'une surface en un point la demi-somme des courbures principales en ce point; en sorte que la surface représentée par l'équation (1) est celle dont la courbure moyenne est constante et égale à $\frac{1}{2a}$, et c'est cette surface que nous nous proposons de trouver dans le cas particulier où elle est de révolution.

Les rayons de courbure principaux en un point d'une surface de révolution sont, comme on sait, le rayon de courbure de la courbe méridienne en ce point, et la portion de la normale à la surface comprise entre ce point et l'axe; il s'ensuit donc que si l'on rapporte la courbe méridienne de la surface cherchée à deux axes coordonnés rectangulaires, dont l'un, l'axe des x, soit l'axe de la surface, cette courbe devra être déterminée par la condition

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{N} = \frac{1}{a},$$

en représentant par ρ son rayon de courbure, et par N la portion de sa normale comprise entre la courbe et l'axe des x.

Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, x' et y' les coordonnées du centre du cercle osculateur en ce point, ou, ce qui revient au même, les coordonnées du point correspondant de la développée, et s' la longueur de l'arc de la développée compté à partir d'une origine fixe jusqu'au point (x', y'). On a, d'après les propriétés des développées,

$$\rho = b - s',$$

b étant une constante qui dépend de l'origine de l'arc s'. D'ailleurs la portion de la tangente à la développée au point (x', y') comprise entre ce point et l'axe des x est égale à $y' \frac{ds'}{dy'}$; en y ajoutant ρ, on aura la valeur de N qui sera

$$N = y' \frac{ds'}{dy'} + b - s';$$

au moyen de ces valeurs, l'équation (2) devient

$$\frac{1}{b-s'} + \frac{1}{y'\frac{ds'}{dy'} + b - s'} = \frac{1}{a},$$

équation qui va nous servir à déterminer la développée de la courbe cherchée. On en tire d'abord, par l'intégration,

$$y'^2 = \alpha(b-s')(2a-b+s'),$$

α étant la constante arbitraire. En résolvant par rapport à s' et différentiant, on trouve

$$\frac{dy'}{ds'} = -\frac{\alpha\sqrt{a^2 - \frac{y'^2}{\alpha}}}{y'};$$

et comme on a

$$\frac{dx'}{ds'} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2},$$

on en déduit

$$\frac{dx'}{ds'} = \frac{\sqrt{y'^2(1+\alpha) - a^2\alpha^2}}{y'}.$$

A l'inspection de ces valeurs de $\frac{dy'}{ds'}$ et $\frac{dx'}{ds'}$, on voit que la constante α peut recevoir toutes les valeurs positives possibles, et que, dans ce cas, les valeurs de y' doivent être comprises entre les limites $\frac{a\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}$ et $\alpha\sqrt{a}$; mais que si α est négatif, il doit être compris entre o et -1, et, dans ce cas, y' peut recevoir toutes les valeurs plus grandes que $-\frac{a\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}$, ce qui indique que la développée a des branches infinies.

Soit φ l'angle que la tangente à la courbe méridienne cherchée au point (x, y) fait avec l'axe des x; on aura

$$\frac{dx'}{ds'} = \sin\varphi, \quad \frac{dy'}{ds'} = -\cos\varphi, \quad dx' = -dy' \operatorname{tang}\varphi.$$

Il en résulte

$$(3) \qquad y' = \frac{a\alpha}{\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}},$$

et

$$x' = -\int dy' \operatorname{tang}\varphi = -y' \operatorname{tang}\varphi + \int \frac{y'd\varphi}{\cos^2\varphi};$$

ou bien, en remplaçant y' par sa valeur,

$$(4) \qquad x' = \beta - \frac{a\alpha \operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}} + \int_0^\varphi \frac{a\alpha\, d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}},$$

β étant une nouvelle constante arbitraire.

Ces deux équations (3) et (4) représentent la développée. On pourrait éliminer l'angle φ, et l'on obtiendrait ainsi l'équation de cette courbe; on pourrait aussi exprimer l'intégrale qui entre dans la valeur de x' au moyen de fonctions elliptiques; mais il est préférable, pour ce qui suit, de laisser à ces équations la forme qu'on vient de leur donner.

Ayant déterminé les valeurs des coordonnées x', y' d'un point quelconque de la développée en fonction de la variable auxiliaire φ, il est facile d'en déduire les valeurs des coordonnées x, y, du point correspondant de la courbe cherchée, en fonction de la même variable; en effet, on a

$$y = y' + \rho \frac{dy'}{ds'},$$

$$x = x' + \rho \frac{dx'}{ds'}.$$

D'ailleurs on a aussi, par ce qui précède,

$$\rho = b - s' = a - \sqrt{a^2 - \frac{y'^2}{\alpha}};$$

et si l'on remplace $\frac{dy'}{ds'}$ par $-\cos\varphi$, $\frac{dx'}{ds'}$ par $\sin\varphi$, x' et y' par leurs valeurs tirées des équations (3) et (4), on trouvera les équations suivantes pour représenter la courbe méridienne cherchée:

$$(5)\quad \begin{cases} y = -a\cos\varphi + a\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}, \\ x = \beta + a\sin\varphi - a\tang\varphi\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi} + \int_0^\varphi \frac{a\alpha d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

La question est donc maintenant complétement résolue sous le point de vue analytique; mais nous pouvons aller plus loin en interprétant géométriquement le résultat auquel nous venons de parvenir.

L'intégrale qui entre dans la valeur de x est de même forme que celle qui se présente dans la recherche de la longueur d'un arc d'ellipse ou d'hyperbole; on est donc naturellement conduit à penser que la courbe représentée par les équations (5) pourrait bien être une espèce de cycloïde engendrée par un point du plan d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roulerait sur une droite. En cherchant à vérifier cette prévision, j'ai reconnu qu'en effet la courbe méridienne trouvée est celle qu'engendrerait le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roulerait sur l'axe des x. Pour le démontrer, il suffira de chercher directement l'équation de cette courbe, et de faire voir qu'elle est identique avec les équations (5).

Concevons donc qu'une hyperbole, par exemple, roule sur l'axe des x, et considérons cette courbe dans une position quelconque. Soient s la longueur de l'arc de la courbe compris entre le sommet et le point de contact avec l'axe des x, r le rayon vecteur qui joint le point de contact au foyer le plus rapproché de l'origine de l'arc s, et φ l'angle que ce rayon vecteur fait avec la normale à la courbe en ce point de contact : on aura pour les coordonnées du foyer

$$x = \beta + s - r\sin\varphi,$$
$$y = r\cos\varphi.$$

Or si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point de contact prises relativement aux axes de l'hyperbole, et si l'on représente par a le demi-axe transversal, et par e l'excentricité de cette courbe, on aura

$$y_1 = \frac{a(e^2-1)}{e} \operatorname{tang} \varphi, \quad x_1 = \frac{a}{e \cos \varphi} \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}, \quad r = ex_1 - a:$$

et par suite

$$r \cos \varphi = -a \cos \varphi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi},$$
$$r \sin \varphi = -a \sin \varphi + a \operatorname{tang} \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}.$$

D'un autre côté, on a

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = \frac{a(e^2-1)\,d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}},$$

d'où

$$s = \int_0^\varphi \frac{a(e^2-1)\,d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

On aura donc enfin les équations suivantes pour représenter la courbe engendrée par le foyer de l'hyperbole roulant sur l'axe des x:

$$y = -a \cos \varphi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi},$$
$$x = \beta + a \sin \varphi - a \operatorname{tang} \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} + \int_0^\varphi \frac{a(e^2-1)\,d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

Ces équations coïncideront évidemment avec les équations (5) si l'on pose

$$e = \sqrt{1 + \alpha},$$

ce qui pourra toujours se faire lorsque α est positif. Ainsi, dans ce cas, les équations (5) représentent la courbe décrite par le foyer d'une hyperbole roulant sur l'axe des x; a est le demi-axe transversal de cette hyperbole, et $\sqrt{1 + \alpha}$ est son excentricité.

Un calcul semblable ferait voir que, dans le cas où α est négatif, les équations (5) représentent la courbe décrite par le foyer d'une ellipse roulant sur l'axe des x; a est alors le demi grand axe de l'ellipse, et $\sqrt{1 + \alpha}$ son excentricité.

On peut donc conclure de tout ce qui précède, le théorème suivant :

Pour trouver la courbe méridienne de la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante et égale à $\frac{1}{2a}$, *il faut faire rouler sur l'axe de la surface une ellipse ou une hyperbole dont le grand axe ou l'axe transverse soit égal à* $2a$, *et le foyer décrira la courbe cherchée.*

Si la courbure moyenne de la surface de révolution dont on cherche la courbe méridienne est nulle, on a $2a = \infty$; et alors la courbe méridienne sera engendrée par le foyer d'une parabole roulant sur l'axe de la surface. Mais on sait que cette courbe est une chaînette : on retrouve donc ainsi le théorème déjà connu, que si l'on fait rouler une parabole sur une droite, le foyer de cette parabole décrira une chaînette.