JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une formule de M. Jacobi

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 69-73.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__69_0>

Sur une formule de M. Jacobi;

Par J. LIOUVILLE.

---

1. Cette formule donne une expression simple de la différentielle

$$\frac{d^{i-1}.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}},$$

où i désigne un nombre entier positif quelconque. Pour trouver la différentielle proposée que nous représenterons par θ ou θ_i, on pourrait se servir de la formule connue

$$(1) \qquad \frac{d^\mu.pq}{dz^\mu} = p\,\frac{d^\mu q}{dz^\mu} + \frac{\mu}{1}\frac{dp}{dz}\frac{d^{\mu-1}q}{dz^{\mu-1}} + \ldots,$$

dans laquelle on ferait

$$\mu = i-1,\quad p = (1+z)^{i-\frac{1}{2}},\quad q = (1-z)^{i-\frac{1}{2}},$$

et par suite

$$\frac{d^m p}{dz^m} = (i-\tfrac{1}{2})(i-\tfrac{3}{2})\ldots\left(i-\frac{2m-1}{2}\right).(1+z)^{i-\frac{2m+1}{2}},$$

$$\frac{d^m q}{dz^m} = (-1)^m.(i-\tfrac{1}{2})(i-\tfrac{3}{2})\ldots\left(i-\frac{2m-1}{2}\right).(1-z)^{i-\frac{2m+1}{2}}.$$

Nous suivrons ici une autre marche; mais il nous sera utile d'avoir reconnu que, d'après les calculs indiqués, θ s'évanouit pour $z = 1$, tandis que pour cette même valeur $z = 1$, le rapport de θ à $\sqrt{1-z^2}$ devient égal à

$$(-1)^{i-1}.3.5.7\ldots(2i-1),$$

cette dernière quantité étant fournie tout entière par le seul premier terme $p\dfrac{d^\mu q}{dz^\mu}$ de θ, puisque (à cause du facteur $1-z$ qui s'y trouve affecté d'un exposant au moins égal à $\frac{3}{2}$) le rapport des termes suivants à $\sqrt{1-z^2}$ converge évidemment vers zéro quand z converge vers l'unité.

Posons

$$y = (1 - z^2)^{i-\frac{1}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dz} = -(2i - 1)(1 - z^2)^{i-\frac{3}{2}}.z,$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -(2i - 1)(1 - z^2)^{i-\frac{3}{2}} + (2i - 1)(2i - 3)(1 - z^2)^{i-\frac{5}{2}}.z^2,$$

et

$$(2) \qquad (1 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} + (2i - 3)z\frac{dy}{dz} + (2i - 1)y = 0:$$

différencions $(i - 1)$ fois les deux membres de l'équation (2), et, pour obtenir les différentielles à indice $(i - 1)$ des produits

$$(1 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2}, \quad z\frac{dy}{dz},$$

servons-nous de la formule (1) dans laquelle nous ferons $\mu = i - 1$, puis successivement

$$p = 1 - z^2 \quad \text{et} \quad q = \frac{d^2y}{dz^2}, \quad p = z \quad \text{et} \quad q = \frac{dy}{dz};$$

rappelons-nous de plus que $\dfrac{d^{i-1}y}{dz^{i-1}} = \theta$, et nous trouverons sans difficulté

$$(3) \qquad (1 - z^2)\frac{d^2\theta}{dz^2} - z\frac{d\theta}{dz} + i^2\theta = 0.$$

En changeant de variable indépendante, on peut toujours faire disparaître le second terme d'une équation linéaire quelconque. Dans le cas de l'équation (3), il suffit pour cela de faire $z = \cos x$: il vient ainsi

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + i^2\theta = 0,$$

d'où

$$\vartheta = \mathrm{A}\cos ix + \mathrm{B}\sin ix.$$

Pour $x = 0$, z se réduit à l'unité; d'après ce qu'on a vu plus haut, on a donc alors

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\theta}{\sin x} = \frac{\theta}{\sqrt{1-z^2}} = (-1)^{i-1}.3.5\ldots(2i-1),$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{A} = 0, \quad i\mathrm{B} = (-1)^{i-1}.3.5\ldots(2i-1).$$

De là résulte finalement

$$(4) \qquad \vartheta \text{ ou } \vartheta_i = (-1)^{i-1}.3.5.7\ldots(2i-1)\frac{\sin ix}{i}:$$

c'est la formule que nous voulions démontrer et que M. Jacobi a employée avec succès pour la transformation d'une classe d'intégrales définies. (*Journal* de M. Crelle, T. XV, p. 3.)

2. Voici une seconde démonstration de la formule (4). Cette formule (4) est évidemment exacte quand $i = 1$: il suffit donc, pour en établir d'une manière générale l'exactitude, de faire voir que si elle est vraie pour un indice i quelconque, elle restera vraie encore lorsqu'on augmentera cet indice d'une unité.

Or on a

$$\vartheta_{i+1} = \frac{d^i.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^i} = \int_1^z dz\,\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}},$$

d'où, en faisant $z = \cos x$,

$$\vartheta_{i+1} = -\int_0^x \sin x.dx.\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}}.$$

Regardons $(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}$ comme le produit des deux facteurs $(1-z^2)$, $(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}$, et la formule (1) nous donnera

$$\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = (1-z^2)\frac{d^2\theta_i}{dz^2} - 2(i+1)z\frac{d\theta_i}{dz} - i(i+1)\theta_i:$$

puisque $z = \cos x$, il viendra dès-lors

$$\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = \frac{d^2\theta_i}{dx^2} + (2i+1).\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{d\theta_i}{dx} - i(i+1)\theta_i,$$

de sorte qu'en ayant égard à la valeur de θ_i fournie par la formule (4), on a

$$\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = (-1)^{i-1}.3.5\ldots(2i+1).\frac{\cos(i+1)x}{\sin x},$$

d'où

$$\theta_{i+1} = (-1)^i\, 3\, 5\ldots(2i+1)\int_0^x \cos(i+1)x dx,$$

c'est-à-dire

$$\theta_{i+1} = (-1)^i.3.5\ldots(2i+1).\frac{\sin(i+1)x}{i+1},$$

ce qu'il s'agissait de vérifier.

3. Pour déduire de la formule (4) la transformation d'intégrales définies dont j'ai parlé plus haut, M. Jacobi observe que quand une fonction w et ses différentielles, jusqu'à l'ordre $(i-1)$, s'évanouissent aux limites de l'intégrale, l'intégration par parties fournit en général

$$\int w\frac{d^i v}{dz^i}dz = (-1)^i\int v\frac{d^i w}{dz^i}dz:$$

en posant donc

$$v = f(z),\quad w = (1-z^2)^{i-\frac{1}{2}},$$

et prenant -1 et $+1$ pour limites des intégrales, il viendra

$$\int_{-1}^{+1} f^{(i)}(z)(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}.dz = (-1)^i\int_{-1}^{+1} f(z)\frac{d^i.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^i}.dz.$$

Or, en différentiant la formule (4), on trouve

$$\frac{d^i.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^i}dz = (-1)^{i-1}.3.5.7\ldots(2i-1)\cos ix.dx;$$

dès lors, à cause de $z = \cos x$, l'équation précédente fournira

$$(5) \quad \int_0^\pi f^{(i)}(\cos x)\sin^{2i} x dx = 3.5.7\ldots(2i-1)\int_0^\pi f(\cos x)\cos ix dx\,;$$

cette belle formule de M. Jacobi avait été déjà transcrite dans ce Journal (T. I, p. 195); elle suppose, comme on voit, que la fonction $f(z)$ et ses différentielles, jusqu'à l'ordre $(i-1)$, restent continues entre les limites $z = -1$, $z = 1$.

4. Si l'on désigne par r un paramètre indéterminé, et qu'on pose

$$f(z) = \psi(rz),$$

la formule (5) nous donnera

$$\int_0^\pi \psi(r\cos x)\cos ix dx = \frac{r^i}{3.5\ldots(2i-1)}\int_0^\pi \psi^{(i)}(r\cos x)\sin^{2i} x dx\,;$$

l'intégrale placée dans le second membre peut être décomposée en deux autres, l'une prise de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$, l'autre prise de $x = \frac{\pi}{2}$ à $x = \pi$ et que l'on réduira aux limites de la première en y remplaçant x par $\pi - x$. Cela posé, il suffit de jeter les yeux sur une formule que j'ai donnée à la page 58 du XXIV^me cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, pour comprendre combien la transformation de M. Jacobi sera utile dans le calcul des différentielles à indices quelconques.

Observons encore en passant que dans le cas particulier où l'on prend pour $f(z)$ une exponentielle e^{rz}, la formule (5) conduit à une équation simple que l'on peut vérifier de plusieurs manières, et d'où, réciproquement, l'on pourrait tirer soit la formule générale (5), soit la formule (4).