JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STURM

Note de M. Sturm, à l'occasion de l'article précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 132-133.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__132_0>

Note de M. Sturm, *à l'occasion de l'article précédent.*

On peut reconnaître la réalité des racines de l'équation $S_n = 0$ où l'inconnue est z, sans faire usage des restes que fournit le calcul du plus grand commun diviseur entre S_n et sa dérivée (par rapport à z).

Considérons la suite des fonctions $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_n$. Chacune est liée aux deux précédentes par la relation

$$S_{i+1} = S_i z - S_{i-1}. \tag{1}$$

On a d'ailleurs

$$S_0 = 1, \quad \text{et} \quad S_1 = z + 1.$$

En faisant $z = 2$, on trouve par l'équation (1) que les valeurs de ces fonctions sont

$$+1, \quad +3, \quad +5, \quad +7, \text{ etc.}$$

Pour $z = -2$, elles sont alternativement

$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1, \ldots,$$

Ainsi les signes de ces fonctions pour $z = -2$ étant écrits par ordre, ne présentent que des variations au nombre de n, tandis que pour $z = 2$ elles ont toutes le même signe. Si donc z croît d'une manière continue depuis -2 jusqu'à $+2$, la suite des signes de ces fonctions $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, doit perdre successivement les n variations qui s'y trouvent d'abord pour $z = -2$. Mais quand une fonction S_i intermédiaire entre S_0 et S_n s'évanouit et change de signe pour une certaine valeur de z, on voit par l'équation (1) que les deux fonctions adjacentes S_{i+1}, S_{i-1}, ont des valeurs différentes de zéro et de signes contraires, de sorte que le nombre des variations n'est pas changé dans la suite des signes. Il faut donc, pour qu'il n'y ait plus de variations quand z devient égal à 2, que la fonction du plus haut degré S_n s'évanouisse en changeant de signe au moins n fois, et qu'à chaque fois une variation disparaisse; d'ailleurs S_n ne peut s'évanouir plus de n fois, n étant son degré. Donc l'équation $S_n = 0$ a ses n racines toutes réelles, inégales, et comprises entre -2 et $+2$.

Il y a plus, puisque chaque racine fait disparaître une variation, on voit que si l'on substitue à la place de z un nombre A quelconque compris entre -2 et $+2$, autant la suite des signes des fonctions $S_0, S_1, \ldots, S_n$ pour $z = A$ présentera de variations, autant l'équation $S_n = 0$ aura de racines comprises entre A et la limite 2. Et si l'on substitue deux nombres A et B, le nombre de variations perdues en passant de l'un à l'autre indiquera combien ils comprennent de racines de $S_n = 0$.

La même proposition s'appliquant à S_{n-1}, on en conclut qu'il y a toujours une racine réelle de l'équation $S_{n-1} = 0$ et une seule comprise entre deux racines consécutives α et β de $S_n = 0$; c'est ce qu'on voit en substituant $\alpha + h$ et $\beta - h$ dans la suite $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S_n$, h étant une quantité positive très-petite. Pareillement les $n-1$ racines de $S_{n-1} = 0$ comprennent dans leurs intervalles les $n-2$ racines de $S_{n-2} = 0$, et ainsi de suite.

En faisant $z = 0$ dans les fonctions $S_0, S_1, \ldots, S_n$, elles prennent les valeurs

$$+1,\quad +1,\quad -1,\quad -1,\quad +1,\quad +1, \text{ etc.}$$

En comparant les signes de ces valeurs avec ceux que donne la substitution de -2 et de $+2$, on voit que si n est pair, l'équation $S_n = 0$ a autant de racines négatives que de positives, et que si n est impair, elle a $\frac{n+1}{2}$ racines négatives et $\frac{n-1}{2}$ positives.

On verrait de la même manière que les propriétés précédentes conviennent aux équations

$$U_n = 0,\quad U_{n-1} = 0, \text{ etc.}$$

(provenant de $y^{2n} + 1 = 0$), dont les racines toutes comprises entre -2 et $+2$ sont d'ailleurs égales deux à deux et de signes contraires, celles de degrés impairs ayant la racine zéro.

La relation $U_n = S_n - S_{n-1}$ montre que pour les valeurs de z qui annullent S_n, la fonction U_n a un signe contraire à celui de S_{n-1}, et que pour celles qui annullent S_{n-1}, U_n a le signe de S_n. En substituant aussi les limites -2 et $+2$, on en conclut que $U_n = 0$ a ses n racines réelles, et que les trois fonctions S_n, U_n, S_{n-1} s'évanouissent toujours l'une après l'autre alternativement pour des valeurs de z croissantes entre -2 et $+2$, c'est-à-dire qu'en faisant croître z, S_n s'évanouit d'abord pour une certaine valeur de z, puis U_n pour une valeur un peu plus grande, ensuite S_{n-1}, puis de nouveau S_n, et ainsi de suite.

Ces diverses propriétés des racines des équations

$$S_n = 0,\quad U_n = 0,$$

résultent d'ailleurs de leurs expressions trigonométriques connues. Mais les démonstrations que je viens d'indiquer conviennent à une classe d'équations que j'ai traitées dans un Mémoire qui paraîtra prochainement.