JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P.-H. BLANCHET

Mémoire sur la délimitation de l'onde dans la propagation des mouvements vibratoires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 13-22.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__13_0>

MÉMOIRE
SUR LA DÉLIMITATION DE L'ONDE
DANS LA PROPAGATION
DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES;

Présenté à l'Académie des Sciences, le 14 juin 1841,

Par M. P.-H. BLANCHET,

Professeur de Physique au Collége royal de Henri IV.

1. Il n'est peut-être pas sans intérêt de faire ressortir des formules générales de la propagation des mouvements vibratoires une délimitation absolue de l'onde. Ce caractère se trouve dans les intégrales de M. Poisson et dans celles de M. Ostrogradsky, pour le cas particulier de la propagation sphérique. L'Académie n'a pas oublié sans doute l'importance qu'y attachait le grand géomètre qu'elle a perdu.

2. Les équations générales des mouvements vibratoires dans un milieu élastique, homogène, indéfini, cristallisé d'une manière quelconque, peuvent s'écrire symboliquement sous la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\mathfrak{L}_1 - s^2)\xi + \mathfrak{R}_2\eta + \mathfrak{Q}_3\zeta = 0,\\ &\mathfrak{R}_1\xi + (\mathfrak{M}_2 - s^2)\eta + \mathfrak{P}_3\zeta = 0,\\ &\mathfrak{Q}_1\xi + \mathfrak{P}_2\eta + (\mathfrak{N}_3 - s^2)\zeta = 0.\end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ sont des polynomes homogènes du deuxième degré par rapport à trois variables u, v, w. Les exposants de ces quantités et de s correspondent respectivement à des différentiations par rapport aux variables x, y, z, t, effectuées sur les quantités ξ, η, ζ, fonctions de ces dernières variables.

J'applique la belle méthode d'intégration, donnée par M. Cauchy dans les deuxième et troisième livraisons de ses *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, et je trouve les formules suivantes, aussi générales et plus simples que celles de mon premier Mémoire, inséré au tome V de ce Journal :

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
\xi &= \frac{-1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathcal{E}\, \frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(\mathfrak{S})} \left\{ \begin{array}{r} s\,[\mathrm{L}_1 f_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{R}_1 f_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{Q}_1 f_3(\lambda,\mu,\nu)] \\ -\sqrt{-1}\,[\mathrm{L}_1 \mathfrak{f}_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{R}_1 \mathfrak{f}_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{Q}_1 \mathfrak{f}_3(\lambda,\mu,\nu)] \end{array} \right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \\
\eta &= \frac{-1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathcal{E}\, \frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(\mathfrak{S})} \left\{ \begin{array}{r} s\,[\mathrm{R}_2 f_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{M}_2 f_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{P}_2 f_3(\lambda,\mu,\nu)] \\ -\sqrt{-1}\,[\mathrm{R}_2 \mathfrak{f}_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{M}_2 \mathfrak{f}_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{P}_2 \mathfrak{f}_3(\lambda,\mu,\nu)] \end{array} \right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \\
\zeta &= \frac{-1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathcal{E}\, \frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(\mathfrak{S})} \left\{ \begin{array}{r} s\,[\mathrm{Q}_3 f_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{P}_3 f_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{N}_3 f_3(\lambda,\mu,\nu)] \\ -\sqrt{-1}\,[\mathrm{Q}_3 \mathfrak{f}_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{P}_3 \mathfrak{f}_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{N}_3 \mathfrak{f}_3(\lambda,\mu,\nu)] \end{array} \right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces formules on a

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{S} = (\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2)(\mathcal{N}_3 - s^2) - \mathcal{P}_2\mathcal{P}_3(\mathcal{L}_1 - s^2) - \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_3(\mathcal{M}_2 - s^2) \\ \qquad\qquad - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2(\mathcal{N}_3 - s^2) + \mathcal{R}_1\mathcal{P}_2\mathcal{Q}_3 + \mathcal{R}_2\mathcal{P}_3\mathcal{Q}_1. \end{array}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} L_1 = (\mathcal{M}_2 - s^2)(\mathcal{N}_3 - s^2) - \mathcal{P}_2\mathcal{P}_3, & R_1 = -\mathcal{R}_2(\mathcal{N}_3 - s^2) + \mathcal{P}_2\mathcal{Q}_3, \\ & Q_1 = -\mathcal{Q}_3(\mathcal{M}_2 - s^2) + \mathcal{R}_2\mathcal{P}_3, \\ M_2 = (\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{N}_3 - s^2) - \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_3, & R_2 = -\mathcal{R}_1(\mathcal{N}_3 - s^2) + \mathcal{P}_3\mathcal{Q}_1, \\ & P_2 = -\mathcal{P}_3(\mathcal{L}_1 - s_2) + \mathcal{Q}_1\mathcal{R}_2, \\ N_3 = (\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2) - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2, & P_3 = -\mathcal{P}_2(\mathcal{L}_1 - s^2) + \mathcal{Q}_1\mathcal{R}_2, \\ & Q_3 = -\mathcal{Q}_1(\mathcal{M}_2 - s^2) + \mathcal{R}_1\mathcal{P}_2. \end{array}\right.$$

Sous les signes $\int$, les lettres L_1, R_1, Q_1, R_2, ... représentent des fonctions de u, v, w, s^2, regardés comme des quantités. On pourrait les mettre hors des signes $\int$ et du signe $\mathcal{E}$, pourvu qu'on y remplaçât u, v, w, par D_x, D_y, D_z, et s^2 par $D^2{}_t$. Il nous sera plus commode de ne pas le faire.

3. L'inspection des expressions de ξ, η, ζ fait voir qu'elles satisfont aux équations (1), car la quantité (3) se reproduit en numérateur et le résidu se trouve nul.

Elles satisfont aussi aux conditions initiales, car, pour $t = 0$,

$$\mathcal{E}\frac{-sL_1}{(\mathcal{S})} = 1,\quad \mathcal{E}\frac{-sR_1}{(\mathcal{S})} = 0,\quad \mathcal{E}\frac{-sQ_1}{(\mathcal{S})} = 0;\quad \xi = f_1(x, y, z).$$

De même,

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathrm{f}_1(x, y, z),\ \text{etc.}$$

4. La méthode de réduction que j'ai donnée dans mon premier Mémoire est applicable à ces formules. Désignons toujours par s'^2, s''^2, s'''^2 les trois racines, supposées réelles, de l'équation

$$\mathcal{S} = 0,$$

du troisième degré en s^2. Si nous gardons le signe général s pour représenter l'une des valeurs positives s', s'', s'''; en prenant les résidus partiels, nous trouverons dans la valeur de ξ, par exemple, des parties de la forme

$$(5)\quad \frac{-1}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\,\omega s\left(e^{st\sqrt{-1}}+e^{-st\sqrt{-1}}\right)}{\mathcal{S}'} f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

$\frac{s}{\mathcal{S}'}$ ne change pas quand on remplace s par $-s$. ω est un polynome homogène du quatrième degré, qui ne contient que des puissances de s^2.

Cette intégrale revient à

$$(6)\quad \frac{-1}{4\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\,s\,\omega\cos st}{\mathcal{S}'} f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

dans laquelle $\frac{s\,\omega}{\mathcal{S}'}$ est une fonction homogène de degré nul.

Elle est semblable à l'intégrale (36) du premier Mémoire. Elle se réduira de même et donnera

$$(7)\qquad \frac{-1}{4\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{Nt}^{\infty}\chi(s)\,\varphi(t,s)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

au lieu de l'intégrale (62); si l'on garde les mêmes notations et si l'on remplace l'équation (61) par

$$(8)\qquad \varphi(t,s)=\int\frac{-s\omega}{\mathcal{S}'}\,\delta\,\frac{d\sigma}{ds}.$$

5. On pourrait donc arriver aux mêmes conclusions sur les lois de la propagation. Il serait superflu de les développer de nouveau.

6. Je dis maintenant que la propagation du mouvement est limitée dans une certaine portion de l'espace. Depuis longtemps M. Cauchy a démontré l'existence d'une limite intérieure. Elle peut se conclure de la forme de l'intégrale (95, I)[*], qui fait voir que ρ doit être plus grand

[*] (95, I) *signifie* formule (95) du premier Mémoire.

que nt. C'est, je crois, l'idée de M. Cauchy. Je me propose ici de rechercher une limite extérieure. La forme de l'intégrale (7) n'en révèle pas, à cause de la limite $+\infty$ de s.

7. Si s est très-grand par rapport à t, la section faite par le plan $u=t$, dans la surface s, n° **8**, (I) [*], sera peu différente dans sa forme de la section faite par le plan $u=0$ [**]. Cette dernière est, en général, une courbe fermée qui a pour centre l'origine des coordonnées. Par suite, un rayon vecteur r, mené de l'origine dans une direction quelconque et terminé à la courbe, aura deux valeurs égales et de signes contraires. Il n'y aura pas plus de deux valeurs de r, à cause de la nécessité des intersections du rayon vecteur avec les autres nappes de la surface des u, v, w. Pour le plan $u=t$ suffisamment voisin du précédent, le rayon vecteur, mené dans ce plan de l'origine prise sur l'axe des u, aura encore deux valeurs de signes contraires, mais non pas égales.

Soit p l'angle polaire; pour chaque valeur de p, le rayon r n'aura qu'une valeur positive. Si l'on fait la transformation

$$v = r\sin p, \quad w = r\cos p,$$

on pourra prendre pour élément différentiel du plan $u=t$ l'expression $\frac{rdr}{ds}dp$; ce sera le $\delta\frac{d\sigma}{ds}$ de la formule (8), et les limites de p seront 0 et 2π, par conséquent constantes. On aura

$$\varphi(t,s) = \int_0^{2\pi} \frac{-s\omega}{\mathrm{S}'_s}\frac{rdr}{ds}dp. \tag{9}$$

8. La quantité $\frac{-s\omega}{\mathrm{S}'_s}$ est devenue une fonction de $r\sin p$ et de $r\cos p$. Je la désignerai pour un instant par $f(r\sin p,\ r\cos p)$. Si pour une valeur $\alpha+\pi$ de $p>\pi$, on a une valeur positive de r, on aura la même valeur prise négativement pour $p=\alpha$. Mais

$$f[r\sin(\alpha+\pi),\ r\cos(\alpha+\pi)] = f(-r\sin\alpha,\ -r\cos\alpha),$$

---

[*] N° **8** (I) *signifie* n° **8** du premier Mémoire.

[**] Nous écartons pour le moment toute particularité. Les cas particuliers seront l'objet d'un autre travail.

d'ailleurs le facteur $\frac{rdr}{ds}$ reste le même, quand r change de signe sans changer de valeur; donc on pourra se contenter de donner à p des valeurs plus petites que π, pourvu qu'on substitue chaque fois la valeur positive et la valeur négative de r, et qu'on ajoute les résultats. On devra alors faire l'intégration relative à p de o à π seulement.

Ce que nous disons ici pour s doit s'appliquer successivement aux trois quantités s', s'', s''' dont s est le signe général. La somme des parties de la valeur de ξ, de la forme (5), pour de grandes valeurs de s', s'', s''' et par conséquent de r sera

$$(10)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_K^{\infty}\sum\frac{-s\omega}{\mathfrak{S}'_s}\frac{rdr}{ds}\chi(s)\,ds\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

K étant une valeur suffisamment grande.

9. Il faudra mettre successivement s', s'', s''' à la place de s et en même temps les valeurs respectives de r en fonction de s', s'', s'''. s', s'', s''' seront des variables indépendantes dans les divers termes de la somme à laquelle se rapporte le $\sum$. Si on leur donne une même valeur s, pour considérer les éléments correspondants, les termes ne différeront les uns des autres que par les valeurs de r en fonction de s, et ces valeurs ne seront autre chose que les racines de l'équation $\mathfrak{S} = 0$. La résolution de cette équation par rapport à r ne devra donner que des racines réelles de signes contraires deux à deux, si K, et par suite, s, sont des quantités assez grandes.

10. L'équation $\mathfrak{S} = 0$ donne

$$\mathfrak{S}'_s + \mathfrak{S}'_r\frac{dr}{ds} = 0.$$

Donc, par l'élimination de $\frac{dr}{ds}$, l'intégrale (10) peut prendre la forme

$$(11)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_K^{\infty}\sum\frac{-sr\omega}{\mathfrak{S}'_r}\chi(s)\,ds\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_K^{\infty}\mathcal{E}\frac{-sr\omega}{(\mathrm{S})_r}\chi(s)\,ds\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Les résidus seront pris par rapport à r.

11. $\dfrac{-r\omega}{\mathrm{S}}$ est une fraction rationnelle en r dont le degré du dénominateur surpasse d'une unité le degré du numérateur; donc le résidu intégral est égal à [*]

$$(13)\qquad \lim\frac{-r^2\omega}{\mathrm{S}} = \mathrm{H}.$$

C'est le rapport du coefficient de la plus haute puissance de r dans le numérateur multiplié par r au coefficient de la plus haute puissance de la même quantité dans le dénominateur. H, en général, est une fonction de p indépendante de s et t.

L'intégrale (12) s'évanouit par la différentiation relative à t, ce qui limite évidemment la propagation.

12. Dans la valeur de ξ nous trouvons aussi des parties de la forme

$$(14)\ \frac{\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\,\omega\left(e^{st\sqrt{-1}}-e^{-st\sqrt{-1}}\right)}{\mathrm{S}'_s}f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

ou

$$(15)\ \frac{-1}{4\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\frac{\omega}{\mathrm{S}'_s}\sin st\,f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

Quand on fera la transformation indiquée précédemment, on trouvera

$$-\frac{d.}{dt}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{N}t}^{\infty}\chi(s)\,\varphi(t,s)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta;$$

[*] Voyez *Exercices de Mathématiques*, par M. Cauchy, page 110, formule (55), ou page 23, formule (63), année 1826.

en prenant encore

$$\varphi(t, s) = \int \frac{-s\omega}{\mathrm{S}'} \partial \frac{d\sigma}{ds},$$

on arrivera aux mêmes conséquences.

13. Il en sera de même pour les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}$, etc. Ainsi les points suffisamment éloignés n'auront éprouvé aucun déplacement et ne seront animés d'aucune vitesse.

14. On peut encore restreindre beaucoup la délimitation extérieure de l'onde. Pour le faire voir nous allons étendre la transformation qui donne la formule (10) du n° **8**.

Les mêmes valeurs de p et r font prendre à s trois valeurs s', s'', s''', en général inégales. Quand on regarde respectivement comme variables indépendantes les quantités s', s'', s''', dans les divers termes de la forme (7), r a la même valeur sous des formes différentes r', r'', r''' respectivement fonctions de s', s'', s'''. Si l'on remplace s', s'', s''' par une même valeur s; r', r'', r''' deviendront r_1, r_2, r_3 qui seront alors des quantités différentes. Quand r a la même valeur, les trois éléments des trois intégrales de la forme (7) correspondent à un même point M du plan; quand s aura la même valeur, les éléments des intégrales correspondront, pour la même direction p, à trois points différents M_1, M_2, M_3. Mais si l'on fait passer s par des états de grandeur communs à s', s'', s''', r_1, r_2, r_3 passeront respectivement par tous les mêmes états de grandeur que r, et, par conséquent, la somme des portions correspondantes des intégrales aura la même étendue, pourvu que dans les intégrales (7) on prenne une limite inférieure convenablement choisie.

15. Cela posé, imaginons que l'une des nappes de la surface $\mathrm{S} = 0$, par exemple, celle qui répond à $s' = s$, soit la plus petite et enveloppée par toutes les autres. Il est aisé de voir, par la géométrie, que celle-là, pour la valeur $s = \mathrm{N}'t$, n'aura avec le plan $u = t$ qu'un simple contact du premier ordre, en un point déterminé par des coordonnées de la forme $v = gt$, $w = ht$ et par $u = t$. Il est aisé de voir encore qu'un rayon vecteur mené dans le plan $u = t$, par le point dont les coordonnées sont $v = gt$, $w = ht$, quel que soit $s > N't$, rencontrera chacune des trois nappes de la surface $S = 0$, en deux points situés de part et d'autre. Transportons-y l'origine des coordonnées, ce qui ne changera pas la forme des fonctions S, S'_s, par rapport à s, puis faisons la transformation

$$v = r \sin p, \qquad w = r \cos p.$$

Nous trouverons encore que la somme des intégrales de la forme (7), en y prenant pour limite inférieure commune $N't$, se réduit à

$$(16) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{N't}^{\infty} \mathrm{H}\, s\,\chi(s)\, ds\, dp \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

et, par suite, à

$$(17) \quad -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{H}\, dp.\left[N'^2 t \frac{d.}{dt}\chi(N't) + N'^2\chi(N't)\right]\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

quantité nulle si $N't$ n'est pas compris dans les limites de ρ, ce qui délimite encore la portion du milieu troublée par la propagation du mouvement. Ainsi il n'y aura rien au-delà d'une certaine limite qui sera la limite extérieure de la plus grande des ondes indiquées dans le premier Mémoire.

16. Les mêmes conclusions subsistent, en général, si la nappe intérieure $s' = s$ enveloppée par les autres, est touchée par l'une d'elles en plusieurs points ou même suivant une ligne.

Mais si la nappe $s' = s$ était coupée par l'une des deux autres, il y aurait lieu à modifier la démonstration. Le résidu partiel correspondant n'aurait plus le même aspect; ce serait une particularité. La limite dépendrait, selon diverses circonstances, du plan tangent à la courbe d'intersection, mené perpendiculairement à l'axe des u. C'est ce que nous examinerons dans un prochain travail.

17. Dans le *Compte rendu* de la dernière séance de l'Académie, je trouve des formules de M. Cauchy qui ont pour objet la transformation ou l'évaluation de sommes d'intégrales [*]. C'est là ce qui m'a décidé à précipiter la publication de ce Mémoire; j'avais aussi à évaluer des sommes d'intégrales. Mais pour y parvenir, il a fallu faire une transformation préalable qui, peut-être, établira quelque différence avec les formules de l'illustre géomètre dont je viens de parler [**].

---

[*] Il est bon, je crois, de rappeler ici deux Notes de M. Jürgensen auxquelles on n'a peut-être pas fait assez d'attention et qui ont été imprimées en 1839 dans le Journal de M. Crelle. (*Voyez* tome XIX, page 84 et page 113.) J. Liouville.

[**] Au reste, le 7 juin 1841, précisément le jour de la dernière lecture de M. Cauchy, j'ai déposé un paquet cacheté qui contient sommairement les idées fondamentales de ce Mémoire. On pourrait y avoir recours, s'il était nécessaire, pour constater le degré d'indépendance du travail. Il restera quelque analogie avec le Mémoire de M. Cauchy du 17 mai 1841. La connaissance de ce Mémoire de M. Cauchy m'a rendu grand service en reportant mes idées sur le calcul des résidus.