JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DARU

Sur l'intégration des équations linéaires à coefficient constants

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 266-267.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__266_0>

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

A COEFFICIENTS CONSTANTS;

Par M. DARU [*].

Soit

$$\text{(A)} \qquad \varphi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + r\frac{dy}{dx} + sy = 0$$

l'équation proposée. Quelle que soit la constante m, on a évidemment

$$(1) \qquad \varphi(e^{mx}) = e^{mx} f(m),$$

$f(m)$ représentant la quantité $m^n + pm^{n-1} + \ldots + rm + s$. Pour prendre la dérivée d'une fonction linéaire

$$\varphi(y) \quad \text{ou} \quad \frac{d^n y}{dx^n} + p\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots,$$

par rapport à un paramètre m contenu dans y seulement, il suffit, en général, de remplacer y par $\frac{dy}{dm}$, en sorte que

$$\frac{d\varphi(y)}{dm} = \varphi\left(\frac{dy}{dm}\right);$$

l'équation (1), différentiée par rapport à m, fournira en conséquence

$$(2) \qquad \varphi(e^{mx}.x) = e^{mx}[xf(m) + f'(m)].$$

[*] J'emprunte à d'anciens cahiers la substance de cette Note que M. Daru, mon camarade de promotion à l'École Polytechnique, composa jadis étant encore élève. Quoiqu'il s'agisse d'un théorème très-simple et dont les auteurs ont donné dix démonstrations différentes, la méthode ingénieuse suivie par M. Daru méritait, je crois, d'être indiquée. J. Liouville.

Une seconde différentiation fournira de même

$$(3) \qquad \varphi(e^{mx}.x^2) = e^{mx}[x^2 f(m) + 2x f'(m) + f''(m)];$$

et ainsi de suite.

Maintenant si m est racine de $f(m) = 0$, l'équation (1) donne

$$\varphi(e^{mx}) = 0;$$

donc $y = e^{mx}$ est une intégrale de l'équation (A). Si la racine m est double, on a de plus $f'(m) = 0$, et l'équation (2) donne

$$\varphi(e^{mx}.x) = 0;$$

donc $y = e^{mx}.x$ est une seconde intégrale de l'équation (A). Si la racine m est triple, $f''(m)$ est aussi $= 0$, et l'équation (3) donne

$$\varphi(e^{mx}.x^2) = 0;$$

donc $y = e^{mx}.x^2$ est alors une troisième intégrale de l'équation (A). En continuant ainsi l'on voit que des n racines égales ou inégales de $f(m) = 0$, on peut toujours déduire n intégrales particulières distinctes, d'où l'on conclura ensuite l'intégrale complète.