JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Sur une représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 263-264.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__263_0>

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville. — 11 avril 1843.)

Par M. William ROBERTS (de Dublin).

« Voici un résultat de géométrie que j'ai trouvé, et qui me semble avoir quelque degré d'intérêt.

» Étant donnée la base d'un triangle, dont le rectangle formé par les côtés est égal au carré de la demi-base, on sait que le lieu du sommet est la lemniscate de Bernoulli, et que sa longueur peut s'exprimer par une fonction elliptique de première espèce, le module étant sin 45°.

» Cherchons donc une courbe sphérique à laquelle appartient une propriété analogue. Soit $2y$ la base commune des triangles sphériques, dont les côtés α et β sont liés par la relation

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha \sin \tfrac{1}{2} \beta = \sin^2 \tfrac{1}{2} y,$$

et si l'on appelle θ l'arc d'un grand cercle du milieu de la base au sommet, et ψ l'angle qu'il fait avec la base, on aura, pour l'équation polaire du lieu des sommets,

$$(1 - \sin^2 y \sin^2 \psi) \cos^2 \tfrac{1}{2} \theta = \cos y.$$

La forme de cette courbe sera semblable à celle de la lemniscate; et son arc, compté depuis l'extrémité du demi-axe, sera aussi exprimé par une fonction de la première espèce, dont le module est toujours plus petit que sin 45°. L'amplitude φ de la fonction sera déterminée par l'équation

$$\sqrt{\cos y}\,\text{tang}\,\psi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos y\cos^2\varphi}},$$

et $\sqrt{\left(\frac{\cos y}{1+\cos y}\right)}$ sera le module.

» Ceci, avec l'aide des transformations dues à Lagrange et à M. Jacobi, fournit très-simplement une représentation géométrique de la première transcendante elliptique, ce que Legendre a beaucoup désiré.

» J'ai d'autres résultats du même genre, que je serai charmé de vous communiquer, si vous considérez ce que j'ai donné comme digne de votre attention. »