JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la division du périmètre de la lemniscate, le diviseur étant un nombre entier réel ou complexe quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 507-512.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__507_0>

Sur la division du périmètre de la lemniscate, le diviseur étant un nombre entier réel ou complexe quelconque;

Par J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie*, tome XVII, séance du 2 octobre 1843.)

1. M. Gauss a nommé entiers *complexes* les quantités de la forme $p + q\sqrt{-1}$ où p et q sont des entiers réels, positifs, nuls ou négatifs; en faisant $q = 0$, on voit que les nombres *complexes* contiennent, comme cas particulier, les nombres réels. L'introduction de ces nombres complexes a permis à M. Gauss de réduire la théorie des résidus biquadratiques à des règles tout aussi simples que celles trouvées auparavant pour les résidus quadratiques eux-mêmes [*]. La plupart des propriétés des nombres entiers réels s'étendent aux nombres complexes, et cela peut être utile même en algèbre. Ainsi on pourra appliquer aux nombres complexes les règles ordinaires relatives à la recherche des racines rationnelles des équations et de leurs diviseurs rationnels proprement dits. Dans ce but on appellera *diviseur rationnel* tout diviseur de la forme $P + Q\sqrt{-1}$ où P et Q seront rationnels dans le sens ordinaire du mot, P ou Q pouvant d'ailleurs se réduire à zéro. Une équation irréductible sera celle dont le premier membre n'a aucun diviseur de cette forme $P + Q\sqrt{-1}$. Les théorèmes qui servent à la résolution des équations conserveront presque tous leur énoncé. Nous citerons en particulier celui qu'Abel a donné (Journal de M. Crelle,

[*] *Voyez* le tome VII des nouveaux Mémoires de Gottingue. — M. Jacobi pense que M. Gauss a été conduit à employer les nombres *complexes* (dans des recherches arithmétiques) par l'étude des transcendantes elliptiques et des arcs de la lemniscate en particulier; là, en effet, cela résulte des Mémoires d'Abel, les nombres complexes se présentent naturellement comme diviseurs, et il y a de l'avantage à les considérer, même quand il s'agit en définitive d'une division à effectuer par un nombre premier réel $4\nu + 1$.

tome IV, page 149) à la fin de son Mémoire sur une classe d'équations algébriques : « Soit $\chi(X) = 0$ une équation algébrique quel-
» conque, dont toutes les racines peuvent être exprimées ration-
» nellement par l'une d'entre elles que nous désignerons par X.
» Soient $\theta(X)$ et $\theta_1(X)$ deux autres racines quelconques; l'équation
» proposée sera résoluble à l'aide de radicaux si l'on a

$$\theta[\theta_1(X)] = \theta_1[\theta(X)]. \text{ »}$$

La proposition restera exacte et la démonstration ne changera pas en admettant des quantités rationnelles *complexes* et en prenant pour $\theta(X)$, $\theta_1(X)$, $\chi(X)$ des fonctions de la forme $P + Q\sqrt{-1}$. Abel se proposait d'appliquer son théorème aux équations relatives à la division du périmètre de la lemniscate. La mort l'a empêché d'exécuter son dessein. Du moins, il n'a, que je sache, traité nulle part le cas de la division par un nombre premier $4\nu + 3$. Mais il est bien facile de suppléer à son silence; il n'y a qu'à suivre dans leur cours naturel les développements des principes qu'il a posés lui-même. C'est ce que je vais essayer de prouver en prenant pour diviseur un entier quelconque réel ou complexe, premier ou composé, p ou $p + q\sqrt{-1}$.

2. Nous adopterons ici les notations d'Abel dans ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* (Journal de M. Crelle, t. II et III), mais en les appliquant spécialement au cas de la lemniscate. Ainsi les deux modules e, c seront égaux entre eux et à l'unité; l'indice ϖ relatif à la période imaginaire sera égal à l'indice ω relatif à la période réelle. En posant

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \alpha,$$

on aura

$$x = \varphi(\alpha), \quad f(\alpha) = \sqrt{1-\varphi^2(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \sqrt{1+\varphi^2(\alpha)},$$

et de plus,

$$\varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha), \quad f(-\alpha) = f(\alpha), \quad F(-\alpha) = F(\alpha),$$

$$\varphi(\alpha\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\varphi(\alpha), \quad f(\alpha\sqrt{-1}) = F(\alpha), \quad F(\alpha\sqrt{-1}) = f(\alpha).$$

La formule fondamentale pour les fonctions elliptiques deviendra

$$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varphi(\alpha)\,f(\beta)\,\mathrm{F}(\beta)+\varphi(\beta)\,f(\alpha)\,\mathrm{F}(\alpha)}{1+\varphi^2(\alpha)\,\varphi^2(\beta)}.$$

Il y a des formules analogues pour $f(\alpha+\beta)$, $\mathrm{F}(\alpha+\beta)$. De ces formules on déduira, comme Abel, les fonctions φ, f, F, relatives à un multiple ($p=2n$ ou $p=2n+1$) de α, sous la forme

$$\begin{aligned}
\varphi\,(2n\alpha)&=\varphi\,(\alpha)\,f(\alpha)\,\mathrm{F}(\alpha).\mathrm{R}_1, & \varphi\,[(2n+1)\alpha]&=\varphi\,(\alpha)\,\mathrm{R}',\\
f(2n\alpha)&=\mathrm{R}_2, & f[(2n+1)\alpha]&=f(\alpha)\,\mathrm{R}'',\\
\mathrm{F}\,(2n\alpha)&=\mathrm{R}_3, & \mathrm{F}\,[(2n+1)\alpha]&=\mathrm{F}(\alpha)\,\mathrm{R}'''.
\end{aligned}$$

où R_1, etc., désignent des fonctions rationnelles de $\varphi^2(\alpha)$ ou x^2. Si p était négatif, on se rappellerait que $\varphi(p\alpha)=-\varphi(-p\alpha)$, $f(p\alpha)=f(-p\alpha)$, $\mathrm{F}(p\alpha)=\mathrm{F}(-p\alpha)$.

Maintenant, soit $p+q\sqrt{-1}$ un entier complexe; on aura, par la formule fondamentale,

$$\varphi\left[(p+q\sqrt{-1})\,\alpha\right]=\frac{\varphi(p\alpha)\,f(q\alpha\sqrt{-1})\,\mathrm{F}(q\alpha\sqrt{-1})+\varphi(q\alpha\sqrt{-1})\,f(p\alpha)\,\mathrm{F}(p\alpha)}{1+\varphi^2(p\alpha)\,\varphi^2(q\alpha\sqrt{-1})};$$

c'est-à-dire

$$\varphi\left[(p+q\sqrt{-1})\,\alpha\right]=\frac{\varphi(p\alpha)\,f(q\alpha)\,\mathrm{F}(q\alpha)+\sqrt{-1}\,\varphi(q\alpha)\,f(p\alpha)\,\mathrm{F}(p\alpha)}{1-\varphi^2(p\alpha)\,\varphi^2(q\alpha)}.$$

Il suit de là et des formules précédentes que $\varphi\left[(p+q\sqrt{-1})\,\alpha\right]$ s'exprimera aussi rationnellement en fonction de $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$, $\mathrm{F}(\alpha)$. La valeur de cette quantité sera de la forme

$$\varphi\,(\alpha)\;f(\alpha)\;\mathrm{F}\,(\alpha)\,\mathrm{R},$$

si p et q sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Elle sera de la forme

$$\varphi\,(\alpha)\,\mathrm{R},$$

si l'un de ces deux nombres est pair et l'autre impair; R désignant dans les deux cas une fonction rationnelle complexe de $\varphi^2(\alpha)$ ou x^2.

En résumé, pour un multiple entier m, réel ou complexe quelconque, $\varphi\,(m\alpha)$ est de l'une des deux formes $\varphi(\alpha)f(\alpha)\,\mathrm{F}(\alpha)\mathrm{R}$, $\varphi(\alpha)\mathrm{R}$, R dépendant rationnellement de $\varphi^2(\alpha)$ ou x^2, et pouvant en conséquence s'exprimer par une fraction irréductible dont le numérateur T et le dénominateur S soient des fonctions entières de x^2. Il est bon d'observer que $\varphi^2(m\alpha)$ est aussi fonction rationnelle de $\varphi^2(\alpha)$ [*].

3. Le problème de la division du périmètre de la lemniscate par l'entier m, réel ou complexe, revient au fond à déterminer les valeurs de $\varphi(\alpha)$ pour lesquelles on a

$$\varphi(m\alpha) = 0\,;$$

et comme les équations $\varphi(\alpha) = 0$, $f(\alpha) = 0$, $F(\alpha) = 0$ n'offrent aucune difficulté, on comprend que tout consiste à résoudre l'équation $R = 0$, ou plutôt $T = 0$ [**].

Comme T est fonction entière de x^2, nous ferons $x^2 = X$, et nous chercherons les racines X [***]. L'expression transcendante de ces racines est facile à déduire des principes d'Abel, fondés sur la considération de la double période des fonctions elliptiques. L'une d'entre elles, que nous désignerons spécialement par X, est

$$X = \varphi^2\left(\frac{\omega}{m}\right).$$

---

[*] En changeant α en $\alpha\sqrt{-1}$, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(m\alpha)$ se changent en $\sqrt{-1}\,\varphi(\alpha)$, $\sqrt{-1}\,\varphi(m\alpha)$; $\varphi^2(\alpha)$ devient $-\varphi^2(\alpha)$; quant au produit $f(\alpha)\,F(\alpha) = \sqrt{1-\varphi^4(\alpha)}$, il conserve son ancienne valeur. Dans les expressions de $\varphi(m\alpha)$, il faut donc que R ne change pas en remplaçant $\varphi^2(\alpha)$ ou x^2 par $-\varphi^2(\alpha)$ ou $-x^2$. Donc R, S, T sont fonctions rationnelles, non-seulement de x^2, mais même de x^4. On voit aussi que $\varphi^4(m\alpha)$ est fonction rationnelle de $\varphi^4(\alpha)$.

[**] Si l'on voulait prouver que cette équation n'a pas de racines égales, il faudrait recourir au procédé d'Abel (Journal de M. Crelle, t. III, p. 164 et 165).

[***] D'après ce qu'on a vu plus haut, T est même fonction entière de x^4; on pourrait prendre x^4 pour inconnue (c'est ce qu'a fait Abel); et, comme $\varphi^4(m\alpha)$ s'exprime rationnellement par $\varphi^4(\alpha)$, les raisonnements qui suivent subsisteraient sans aucune modification. Mais il y a quelque chose de plus général à ne faire usage que du carré x^2; la méthode en devient plus facile à étendre aux autres cas des transcendantes elliptiques de première espèce, pour lesquelles la division de la fonction complète s'effectue par radicaux en vertu d'une relation particulière existant entre les modules c, c, ou plutôt entre les indices ω, ϖ.

Les autres sont comprises dans la formule générale

$$\varphi^2\left(\frac{r\omega}{m}\right),$$

r étant un entier réel ou complexe. Quoiqu'on puisse donner à r une infinité de valeurs, ces racines sont en nombre limité. Il est même très-facile de déterminer, d'une manière précise, les valeurs de r qu'il suffit de considérer pour obtenir toutes les racines ; mais, sans m'arrêter à ces détails, je passe de suite au point capital de nos recherches.

4. D'après ce qu'on a vu ci-dessus, on a, quel que soit t,

$$\varphi^2(rt) = \theta[\varphi^2(t)],$$

la fonction θ étant rationnelle. En faisant donc $t = \frac{\omega}{m}$, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{r\omega}{m}\right) = \theta\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{m}\right)\right] = \theta(\mathrm{X}),$$

de sorte que chaque racine $\varphi^2\left(\frac{r\omega}{m}\right)$ de $\mathrm{T} = 0$ s'exprime rationnellement par la racine X. Cela étant, je considère deux racines quelconques

$$\varphi^2\left(\frac{r\omega}{m}\right) = \theta\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{m}\right)\right] = \theta(\mathrm{X}),$$
$$\varphi^2\left(\frac{r_1\omega}{m}\right) = \theta_1\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{m}\right)\right] = \theta_1(\mathrm{X}),$$

et je dis que $\theta[\theta_1(\mathrm{X})] = \theta_1[\theta(\mathrm{X})]$. Dès lors il suivra du théorème d'Abel, cité n° **1**, que l'équation $\mathrm{T} = 0$ est soluble par radicaux.

Or on a

$$\theta[\theta_1(\mathrm{X})] = \theta\left[\varphi^2\left(\frac{r_1\omega}{m}\right)\right];$$

mais en posant $t = \frac{r_1\omega}{m}$, la formule

$$\theta[\varphi^2(t)] = \varphi^2(rt)$$

donne

$$\theta\left[\varphi^2\left(\frac{r_1\omega}{m}\right)\right] = \varphi^2\left(\frac{rr_1\omega}{m}\right);$$

par suite

$$\theta[\theta_1(\mathrm{X})] = \varphi^2\left(\frac{rr_1\omega}{m}\right).$$

Le second membre étant symétrique par rapport à r et r_1, on trouverait évidemment pour $\theta_1[\theta(\mathrm{X})]$ la même valeur. Donc

$$\theta[\theta_1(\mathrm{X})] = \theta_1[\theta(\mathrm{X})];$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Il est ainsi prouvé d'une manière générale que les équations relatives à la division de la lemniscate se résolvent par radicaux. L'analyse précédente, laquelle est au surplus, je le répète, implicitement contenue dans les ouvrages d'Abel [*], repose sur la connaissance de l'expression transcendante des racines déduite de la considération des deux périodes des fonctions elliptiques. Sans cette connaissance préliminaire, il paraît au moins très-difficile d'arriver à rien de satisfaisant pour la solution algébrique cherchée. Il resterait maintenant à indiquer la marche à suivre dans la pratique pour diminuer la longueur des calculs et obtenir les formules finales les plus simples. Par suite, il serait bon aussi de traiter à part et avec étendue le cas des diviseurs premiers. C'est ce qu'Abel lui-même a déjà fait en partie. Je pourrais ajouter à ce qu'il a donné quelques développements sur le cas d'un diviseur premier $4\nu+3$. Mais, à vrai dire, il faudra dans toute cette théorie pousser beaucoup plus loin l'étude des détails. Sous ce point de vue, on doit reconnaître, avec un illustre géomètre qui dans ces dernières années a publié sur les nombres d'admirables travaux; on doit, dis-je, reconnaître avec M. Lejeune-Dirichlet que la question n'a été jusqu'à présent qu'ébauchée [**]. Aussi les géomètres attendent-ils avec impatience le nouveau Mémoire que M. Dirichlet leur a promis.

[*] La marche que j'ai suivie est exactement celle d'Abel lui-même pour la division du cercle. (Voir le Journal de M. Crelle, t. IV, p. 152.)

[**] Journal de M. Crelle, t. XXIV, p. 366.