JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Note sur un théorème de mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 113-115.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__113_0>

NOTE
SUR UN THÉORÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. OSSIAN BONNET,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Lagrange a montré depuis longtemps (*Mécanique analytique*, t. II, p. 116) que la même section conique qui peut être décrite en vertu d'une force tendante à l'un des foyers en raison inverse du carré de la distance ou tendante au centre en raison directe de la distance, peut l'être encore, sous certaines conditions, en vertu de trois forces pareilles tendantes aux deux foyers et au centre; ce qui, dit-il, est très-remarquable.

Legendre a été conduit plus tard à une conséquence analogue, mais plus explicite, dans le *Traité des fonctions elliptiques;* on lit, en effet, à la page 426 du tome I^er de cet ouvrage :

« Soit A le sommet d'une ellipse dont F et G sont les deux foyers,
» soit V' la vitesse en A nécessaire pour que cette ellipse soit décrite
» en vertu de la force A appliquée au foyer F, soit pareillement V'' la
» vitesse en A nécessaire pour que l'ellipse soit décrite en vertu de la
» force B appliquée à l'autre foyer G ; si ces deux forces agissent à la fois
» sur le mobile et que la vitesse initiale V soit telle que $V^2 = V'^2 + V''^2$,
» il décrira encore la même courbe. »

Ces résultats ne sont que des corollaires d'un théorème général que l'on peut énoncer comme il suit :

Théorème. « Si plusieurs masses $m, m', m'', \ldots$ respectivement sou-
» mises à l'action des forces $F, F', F'', \ldots$, et partant toutes d'un
» point A avec des vitesses $v_0, v'_0, v''_0, \ldots$ de grandeur différente, mais de
» même direction, décrivent la même courbe ACB; la masse quelcon-
» que M, soumise à l'action de la résultante des forces $F, F', F'', \ldots$
» et partant du point A avec une vitesse V_0 ayant la même direction

» que les vitesses v_0, v'_0, v''_0,..., décrira encore la courbe ACB, pourvu » que les forces F, F', F'',... soient indépendantes du temps et que la » force vive initiale MV_0^2 de la masse M soit égale à la somme

$$mv_0^2 + m'v_0'^2 + m''v_0''^2 + \ldots$$

» des forces vives initiales des masses m, m', m'',... »

Démonstration. Afin d'abréger le discours, appelons mouvements partiels ceux qui sont produits par les forces F, F', F'',..., agissant séparément, et mouvement composé celui que produit la résultante de ces forces.

Si le mobile M ne décrit pas la courbe ACB dans le mouvement composé, on pourra lui faire décrire cette courbe en joignant à la résultante des forces F, F', F'',... une force normale convenablement choisie, et l'on aura alors les équations connues

$$\mathrm{M}\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} + \mathrm{X}' + \mathrm{X}'' + \ldots + \mathrm{N}\cos\alpha = \Sigma\mathrm{X} + \mathrm{N}\cos\alpha,$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}' + \mathrm{Y}'' + \ldots + \mathrm{N}\cos\beta = \Sigma\mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos\beta,$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z} + \mathrm{Z}' + \mathrm{Z}'' + \ldots + \mathrm{N}\cos\gamma = \Sigma\mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos\gamma,$$

x, y, z représentant les coordonnées du mobile au bout du temps t, (X, Y, Z), (X', Y', Z'), (X'', Y'', Z''),... les composantes respectives prises parallèlement aux axes des forces F, F', F'', ..., N l'intensité de la force normale, et α, β, γ les angles que la direction de cette force fait avec les parties positives des axes des coordonnées.

Multipliant la première équation par $2dx$, la seconde par $2dy$, la troisième par $2dz$, et ajoutant, il viendra

$$d.\mathrm{MV}^2 = 2dx\,\Sigma\mathrm{X} + 2dy\,\Sigma\mathrm{Y} + 2dz\,\Sigma\mathrm{Z},$$

V étant la vitesse du mobile au point x, y, z; mais remarquons que v, v', v''..., étant les vitesses des masses m, m', m'',... au même point dans les mouvements partiels, on a

$$d.mv^2 = 2(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz),$$
$$d.m'v'^2 = 2(\mathrm{X}'\,dx + \mathrm{Y}'\,dy + \mathrm{Z}'\,dz),$$
$$d.m''v''^2 = 2(\mathrm{X}''\,dx + \mathrm{Y}''\,dy + \mathrm{Z}''\,dz),\ldots.$$

On a donc aussi.

$$d.MV^2 = d.mv^2 + d.m'v'^2 + d.m''v''^2 + \ldots = \Sigma d.mv^2 = d.\Sigma.mv^2,$$

d'où, intégrant,

$$MV^2 = C + \Sigma.mv^2,$$

ou simplement

$$MV^2 = \Sigma.mv^2,$$

en remarquant que, d'après l'hypothèse, cette égalité a lieu au point de départ.

Cela nous montre déjà que, dans toutes les positions comme dans la position initiale, la force vive de la masse M dans le mouvement que nous considérons, est égale à la somme des forces vives des masses $m, m', m'',\ldots$ dans les mouvements partiels.

Il est maintenant bien facile de prouver que la force N est nulle, et par conséquent que le mobile M parcourt la courbe ACB dans le mouvement composé. En effet, cette force est égale et contraire à la résultante de la force centrifuge et des composantes normales des forces $F, F', F'',\ldots$; or la force centrifuge dirigée en sens inverse du rayon de courbure de la courbe est, en appelant ρ ce rayon de courbure,

$$\frac{MV^2}{\rho},$$

ou, d'après ce que nous avons démontré,

$$\frac{mv^2}{\rho} + \frac{m'v'^2}{\rho} + \frac{m''v''^2}{\rho} + \ldots;$$

d'ailleurs les composantes normales des forces $F, F', F'',\ldots$ sont respectivement égales et contraires à $\frac{mv^2}{\rho}, \frac{m'v'^2}{\rho}, \frac{m''v''^2}{\rho},\ldots$, puisque les masses $m, m', m'',\ldots$ décrivent la courbe ACB dans les mouvements partiels; il y a donc équilibre entre la force centrifuge et les composantes normales des forces extérieures; par conséquent, la force N est nulle.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, le point complétement libre; s'il était assujetti à rester sur une surface, le théorème serait encore vrai, car ce dernier cas se ramène au cas d'un point libre par l'introduction d'une force normale à la surface.