

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Mémoire sur la théorie des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 9 (1844), p. 133-154.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9_133_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

MÉMOIRE
SUR LA THÉORIE DES SURFACES,

PAR M. J. BERTRAND.

Les théorèmes généraux d'Euler et de Monge sur la théorie des surfaces me paraissent les plus belles propositions connues de la géométrie, parce qu'elles en sont les plus générales. Ces lois si simples et si élégantes de la courbure des surfaces, démontrées indépendamment de la définition particulière de la surface dont on s'occupe, sont en même temps éminemment propres à faire comprendre le véritable esprit de la méthode si féconde des infiniment petits et de la loi de continuité transportée de l'analyse à la géométrie; mais, pour mettre bien nettement en évidence la nature de ces beaux théorèmes, je crois utile de les présenter d'une manière un peu différente de celle que l'on adopte ordinairement.

Tous deux expriment une propriété générale des normales à une même surface et pourraient s'énoncer sans que l'on fit intervenir la surface elle-même ou ses sections par différents plans; mais, bien différentes en cela l'une de l'autre, la première proposition, celle d'Euler, qui apprend que deux sections normales perpendiculaires l'une à l'autre ont la somme de leurs courbures constante, est une véritable identité; elle résulte uniquement de la loi de continuité, et ne peut servir en rien à caractériser les normales à une même surface; si, comme cela est très-facile, on fait disparaître de son énoncé les mots de *surface* et de *sections planes*, on obtient un théorème qui s'applique à des droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, pourvu que leurs directions soient exprimées par des fonctions continues.

Le théorème de Monge, au contraire, l'existence de deux directions

perpendiculaires suivant lesquelles deux normales se rencontrent, est essentiellement particulier à des droites normales à une même surface, et il n'existe pas de proposition correspondante pour des lignes droites distribuées au hasard dans l'espace.

Ce beau théorème de Monge suffit, comme je le fais voir, pour caractériser complètement les surfaces, dont il est ainsi la propriété la plus générale; mais on peut lui-même le généraliser et le rendre plus propre aux applications. J'ai été, en effet, conduit au théorème suivant, dont celui de Monge n'est évidemment qu'un cas particulier :

Si en un point quelconque A, pris sur une surface, on mène une normale AZ, puis que, par le point A, on fasse passer sur la surface deux lignes perpendiculaires sur lesquelles on prenne des longueurs infiniment petites égales AB, AC, la normale au point B fera avec le plan ZAB un angle égal à celui que la normale au point C forme avec le plan ZAC; j'ajouterai que les deux normales seront toutes deux dans l'intérieur de l'angle dièdre BAC, ou toutes deux en dehors de cet angle.

Je donne aussi, dans ce Mémoire, une proposition qui peut être considérée comme le complément de celles d'Euler, et qui, jointe avec elles, caractérise de la manière la plus complète la loi de variation des normales à une surface autour d'un même point.

Euler a fait connaître, en effet, la loi de variation de la courbure des sections normales, c'est-à-dire, en adoptant les lettres employées dans l'énoncé du théorème précédent, la manière dont la projection de la normale au point B sur le plan ZAB s'incline sur la normale primitive ZA. Mais, pour connaître en chaque point la position de cette normale, il ne suffit pas de pouvoir déterminer sa projection sur un plan connu, il faut encore connaître l'angle qu'elle forme avec cette projection. Cet angle est soumis à une loi de variation très-simple exprimée par le théorème suivant :

Si AZ est la normale à une surface en un point quelconque A, que AP, AQ désignent les directions des deux lignes de courbure en ce point, si dans une direction AB on prend sur la surface une longueur infiniment petite AB, la normale au point B, ainsi obtenu, fera, avec

le plan ZAB, un angle exprimé par la formule suivante :

$$\frac{AB}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \sin 2\alpha,$$

R et r désignant les deux rayons de courbure correspondants aux lignes AP, AQ, et α l'angle BAQ.

Le premier des deux théorèmes que nous avons énoncés est une conséquence immédiate du second.

Ces nouvelles propriétés des surfaces expriment sous une forme assez commode la condition nécessaire pour que des droites soient normales à une série de surfaces; il suffit, comme je le fais voir, que la propriété exprimée par le premier de mes nouveaux théorèmes soit vérifiée pour deux directions perpendiculaires prises à partir de chaque point de l'espace: cela étant, elle sera nécessairement vraie pour toutes les autres directions.

Cette définition simple des normales à une même surface m'a permis de démontrer géométriquement deux beaux théorèmes de M. Dupin, et de retrouver des résultats auxquels M. Sturm était parvenu par l'analyse.

Le premier des deux théorèmes de M. Dupin est relatif aux surfaces orthogonales; il consiste en ce que trois séries de surfaces orthogonales se coupent toujours suivant leurs lignes de courbure. J'en donne une démonstration plus simple que celles qui avaient été proposées jusqu'ici.

La seconde application des résultats obtenus dans ce Mémoire est relative à l'optique.

Malus a démontré que des rayons de lumière partis d'un même point et réfléchis par une surface quelconque restent, après leur réflexion, normaux à une même série de surfaces. Cette proposition de Malus a été généralisée par M. Charles Dupin, elle s'applique non-seulement à des rayons partis d'un même point, mais à des rayons dirigés d'une manière quelconque; pourvu qu'ils soient normaux à une même surface, ils conservent cette propriété après avoir été réfléchis ou réfractés d'une manière quelconque, et quelle que soit la surface de séparation des deux milieux. Je donne une démonstration géomé-

trique de tous ces théorèmes, et j'indique même la loi la plus générale de réfraction qui puisse les laisser subsister.

M. Sturm, qui s'est occupé des mêmes questions, a donné des formules générales qui permettent de calculer les rayons de courbure et la position des sections principales de la surface normale aux rayons réfractés, pourvu que l'on connaisse les éléments analogues, tant pour la surface normale aux rayons incidents que pour la surface de séparation des milieux. Je suis parvenu géométriquement à des formules analogues à celles de M. Sturm, et qui pourront remplir le même but.

I.

1. Soient A un point pris sur une surface, et AZ la direction de la normale en ce point. Prenons pour axe des z cette droite AZ, et pour axes des x et des y , des perpendiculaires choisies au hasard dans le plan tangent; l'équation de la surface étant

$$z = \varphi(x, y),$$

les angles que fait la normale avec les trois axes auront des cosinus respectivement proportionnels aux quantités

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \text{et } 1,$$

et on peut les représenter par

$$\lambda p, \quad \lambda q, \quad \lambda.$$

Si, sur les axes des X et des Y, on prend à partir du point A deux longueurs infiniment petites égales AB, AC, les points B et C ainsi obtenus pourront être considérés comme étant sur la surface, et il est facile de calculer les cosinus des angles que les normales en ces deux points forment avec les axes.

Les angles relatifs à la normale au point B auront pour cosinus

$$\frac{d.\lambda p}{dx} \cdot AB, \quad \frac{d.\lambda q}{dx} \cdot AB, \quad 1,$$

et ceux que forme la normale au point C,

$$\frac{d.\lambda p}{dy} . AC, \quad \frac{d.\lambda q}{dy} . AC, \quad 1.$$

En remarquant que p et q sont nuls pour les points considérés, ces cosinus deviennent : Pour le point B,

$$\lambda \frac{dp}{dx} . AB, \quad \lambda \frac{dq}{dx} . AB, \quad 1;$$

pour le point C,

$$\lambda \frac{dp}{dy} . AC, \quad \lambda \frac{dq}{dy} . AB, \quad 1.$$

Mais on a, comme on sait,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}.$$

Si donc AB est, conformément à notre hypothèse, égal à AC, l'angle que la normale en B fera avec l'axe des y sera le même que celui de la normale en C avec l'axe des x ; ou, ce qui revient au même, *la normale en B est inclinée sur le plan ZAB de la même quantité que la normale en C sur le plan ZAC.*

2. Les cosinus $\lambda \frac{dp}{dy} . AC$, $\lambda \frac{dq}{dx} . AB$ étant égaux et de même signe, il en résulte que les deux normales sont toutes deux dans l'angle dièdre BAC, ou toutes deux en dehors de cet angle; c'est-à-dire que si l'une des deux est à gauche de la section normale qui passe par son point de départ, l'autre sera à droite, et réciproquement; d'où l'on conclut, en vertu de la loi de continuité, qu'il doit nécessairement exister une direction intermédiaire à AB et AC, telle que la normale correspondante soit dans le plan normal mené suivant cette direction. Si c'est la direction AD qui jouit de cette propriété, notre théorème fait voir qu'il en sera de même de la direction perpendiculaire AD', et par suite, qu'il existe en chaque point d'une surface deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, et telles que les normales infiniment voisines du point considéré et menées dans la direction de ces deux lignes rencontrent la normale primitive.

3. Les cosinus des angles que la normale au point B forme avec l'axe des X et la normale au point C forme avec l'axe des Y, peuvent être considérés, aux infiniment petits près du second ordre, comme égaux aux angles que les projections de ces normales sur les plans ZAB, ZAC, forment avec l'axe des Z; c'est-à-dire que ces cosinus, divisés respectivement par les longueurs infiniment petites AB, AC, peuvent être considérés comme représentant les courbures des sections normales ZAB, ZAC.

On a donc, en nommant ces courbures $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{r}$,

$$\frac{1}{R} = \frac{d \cdot \lambda p}{dx}, \quad \frac{1}{r} = \frac{d \cdot \lambda p}{dy}.$$

4. Supposons maintenant que, sans changer l'axe des Z, on prenne pour axes des X et des Y deux nouvelles lignes AX', AY' perpendiculaires l'une à l'autre et situées dans le plan tangent. Si α désigne l'angle des axes XX', on aura les formules de transformation suivantes :

$$\begin{aligned} x &= y' \sin \alpha + x' \cos \alpha, & x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y &= y' \cos \alpha - x' \sin \alpha, & y' &= y \cos \alpha + x \sin \alpha; \end{aligned}$$

et par suite, en nommant p' , q' , λ' les quantités que nous appelions p , q , λ dans l'ancien système d'axes,

$$p' = \frac{dz}{dx'} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dx'} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx'} = p \cos \alpha - q \sin \alpha,$$

$$q' = \frac{dz}{dy'} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy'} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dy'} = p \sin \alpha + q \cos \alpha,$$

$$\lambda'^2 = (p'^2 + q'^2 + 1)^{-1} = (p^2 + q^2 + 1)^{-1} = \lambda^2.$$

Il résulte de là que l'on a, en nommant R' , r' les rayons de courbure des sections normales menées suivant les axes des x' et des y' ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \frac{d \cdot \lambda' p'}{dx'} = \cos \alpha \frac{d \cdot \lambda p}{dx'} - \sin \alpha \frac{d \cdot \lambda q}{dx'} \\ &= \cos \alpha \left(\frac{d \cdot \lambda p}{dx} \frac{dx}{dx'} + \frac{d \cdot \lambda p}{dy} \frac{dy}{dx'} \right) - \sin \alpha \left(\frac{d \cdot \lambda q}{dx} \frac{dx}{dx'} + \frac{d \cdot \lambda q}{dy} \frac{dy}{dx'} \right) \\ &= \cos \alpha \left(\frac{1}{R} \cos \alpha - \frac{d \cdot \lambda p}{dy} \sin \alpha \right) - \sin \alpha \left(\frac{d \cdot \lambda q}{dx} \cos \alpha - \frac{1}{r} \sin \alpha \right); \end{aligned}$$

on trouvera de même

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \frac{d.\lambda'q'}{dy'} = \sin \alpha \frac{d.\lambda p}{dy'} + \cos \alpha \frac{d.\lambda q}{dy'} \\ &= \sin \alpha \left(\frac{1}{r} \sin \alpha + \frac{d.\lambda p}{dy} \cos \alpha \right) + \cos \alpha \left(\frac{d.\lambda q}{dx} \sin \alpha + \frac{1}{R} \cos \alpha \right); \end{aligned}$$

en ajoutant, il vient

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}.$$

Si l'on suppose que les axes primitifs des x et des y soient dans la direction des lignes de courbure dont l'existence a été démontrée plus haut, on aura

$$\frac{d.\lambda p}{dy} = 0, \quad \frac{d.\lambda q}{dx} = 0,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \frac{1}{R} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r} \sin^2 \alpha, \\ \frac{1}{r'} &= \frac{1}{R} \sin^2 \alpha + \frac{1}{r} \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Ce sont les formules connues qui donnent les courbures des sections normales.

5. Étudions maintenant la loi de variation de l'angle formé par la normale en un point avec la section suivant AZ menée par ce point. Cet angle, qui, comme nous l'avons vu, a la même valeur pour deux points équidistants de A pris dans deux directions rectangulaires, est représenté par

$$AB. \frac{d.\lambda p}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{d.\lambda q}{dx}. AC.$$

Si nous cherchons les valeurs pour les points situés à une distance égale sur les axes des x' et des y' , il faut calculer

$$AB. \frac{d.\lambda p'}{dy'}.$$

Or on a, puisque $p' = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d.\lambda p'}{dy'} &= p' \frac{d\lambda}{dy'} + \lambda \frac{dp'}{dy'} = \lambda \frac{dp'}{dy'} = \lambda \cos \alpha \frac{dp}{dy'} - \lambda \sin \alpha \frac{dq}{dy'} \\ &= \lambda \cos \alpha \left(\frac{dp}{dx} \sin \alpha + \frac{dp}{dy} \cos \alpha \right) - \lambda \sin \alpha \left(\frac{dq}{dy} \cos \alpha + \frac{dq}{dx} \sin \alpha \right). \end{aligned}$$

Si donc on a pris pour AX et AY les directions des lignes de courbure, en sorte que l'on ait

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{dq}{dx} = 0,$$

il vient

$$\frac{d\lambda p'}{dy'} = \cos \alpha \sin \alpha \left(\lambda \frac{dp}{dx} - \lambda \frac{dq}{dy} \right) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right);$$

en sorte que l'angle cherché a cette expression très-simple

$$\frac{1}{2} AB. \sin 2\alpha. \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right);$$

ce qui apprend que la normale à la surface, qui pour les points des sections principales est située dans le plan de la section, s'incline sur cette section, pour les points infiniment voisins du point A, suivant une loi indépendante de la nature de la surface considérée. Le maximum a lieu pour la direction inclinée à 45 degrés sur celles des sections principales; il est proportionnel à la différence des courbures de la surface.

II.

1. Les formules précédentes font connaître la loi très-simple suivant laquelle varient, autour d'un même point, les positions des normales à une même surface. Des droites prises au hasard dans l'espace ne pourraient pas, en général, être normales à une même surface; et leur loi de variation n'est pas soumise à toutes les conditions du paragraphe précédent. Nous allons chercher, parmi ces conditions, quelles sont celles que l'on peut considérer comme suffisantes pour caractériser les normales d'une surface.

Soient X, Y, Z les fonctions des trois variables x, y, z , représentant les trois cosinus des angles qu'une droite partant du point dont x, y, z sont les coordonnées, forme avec les trois axes rectangulaires auxquels ce point est rapporté, en sorte qu'il corresponde une droite à chacun des points de l'espace. La condition pour qu'il existe une série de surfaces normales à toutes ces droites est la même que la

condition d'intégrabilité de l'équation différentielle totale

$$(1) \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Or, cette condition d'intégrabilité est exprimée, comme on sait, par l'équation

$$(2) \quad 0 = X \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + Y \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) + Z \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right).$$

Cette identité doit subsister quel que soit le changement de variables effectué dans l'équation (1). Si, par exemple, on change la direction des axes, de manière à rendre l'axe des z parallèle à la direction de la droite qui correspond au point de l'espace dont α, β, γ sont les coordonnées, l'équation (1) prendra la forme

$$(3) \quad X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 = 0,$$

x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées des points de l'espace rapportés aux nouveaux axes, et X_1, Y_1, Z_1 les cosinus des angles des droites correspondantes avec ces mêmes axes; on devra avoir identiquement

$$(4) \quad 0 = X_1 \left(\frac{dY_1}{dz_1} - \frac{dZ_1}{dy_1} \right) + Y_1 \left(\frac{dZ_1}{dx_1} - \frac{dX_1}{dz_1} \right) - Z_1 \left(\frac{dX_1}{dy_1} - \frac{dY_1}{dx_1} \right);$$

pour le point particulier dont α, β, γ étaient les coordonnées, dans l'ancien système, les quantités X_1, Y_1 deviennent évidemment égales à zéro, et Z_1 à l'unité. Par suite, cette équation devient

$$(5) \quad \frac{dX_1}{dy_1} = \frac{dY_1}{dx_1};$$

et pour chaque point de l'espace on pourra former, pour des axes convenablement choisis, une condition analogue à l'équation (5). Nous allons faire voir que si cette condition est remplie pour tous les points de l'espace, l'équation (2) sera identiquement satisfaite, et par suite l'équation (1) sera intégrable.

Considérons en effet la différence

$$\frac{dX_1}{dy_1} - \frac{dY_1}{dx_1},$$

qui, par hypothèse, s'annule pour le point dont les coordonnées, dans l'ancien système d'axes, sont α, β, γ . Cherchons à exprimer cette différence dans l'ancien système d'axes.

$a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ désignant les cosinus des angles formés par les anciens axes avec les nouveaux, on aura

$$x_1 = ax + by + cz, \quad y_1 = a'x + b'y + c'z, \quad z_1 = a''x + b''y + c''z, \\ X_1 = aX + bY + cZ, \quad Y_1 = a'X + b'Y + c'Z, \quad Z_1 = a''X + b''Y + c''Z,$$

et, par suite,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY_1}{dx_1} &= aa' \frac{dX}{dx} + ba' \frac{dX}{dy} + ca' \frac{dX}{dz} \\ &+ ab' \frac{dY}{dx} + bb' \frac{dY}{dy} + cb' \frac{dY}{dz} \\ &+ ac' \frac{dZ}{dx} + bc' \frac{dZ}{dy} + cc' \frac{dZ}{dz}, \end{aligned} \right\} \frac{dX_1}{dy_1} = aa' \frac{dX}{dx} + b'a' \frac{dX}{dy} + c'a' \frac{dX}{dz} \\ + ba' \frac{dY}{dx} + bb' \frac{dY}{dy} + bc' \frac{dY}{dz} \\ + ca' \frac{dZ}{dx} + cb' \frac{dZ}{dy} + cc' \frac{dZ}{dz}$$

$$\frac{dY_1}{dx_1} - \frac{dX_1}{dy_1} = (ba' - ab') \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) \\ + (ca' - c'a) \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + (cb' - c'b) \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right).$$

Si l'on remarque que $a'b - b'a, ca' - c'a, cb' - bc'$ sont égaux à c'', b'', a'' , cette équation devient

$$\frac{dY_1}{dx_1} - \frac{dX_1}{dy_1} = c'' \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) + b'' \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + a'' \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right).$$

Le premier membre s'annulant pour le point dont α, β, γ sont coordonnées, il doit en être de même du second qui lui est identique: mais a'', b'', c'' sont proportionnels aux valeurs que prennent Z, Y, X en ce point; on a donc, pour le point α, β, γ ,

$$(6) \quad 0 = Z \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) + Y \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + X \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right).$$

Si donc l'équation (5) est satisfaite pour tous les points de l'espace, il en sera de même de l'équation (6), et l'équation (1) sera intégrable.

2. Le théorème renfermé dans l'équation (5) est susceptible d'une interprétation géométrique très-simple. Puisque cette équation n'a lieu

en chaque point qu'autant que l'on prend l'axe des Z parallèle à la droite correspondante au point considéré, les cosinus X et Y s'annulent pour ce point, en sorte que si, en le prenant pour point de départ, on porte deux longueurs infiniment petites, égales parallèlement aux x et aux y , en nommant σ la valeur commune de ces deux longueurs, l'angle formé par la droite qui correspond à l'extrémité de la première avec l'axe des Y, aura pour cosinus

$$\sigma \frac{dY}{dx},$$

et l'angle formé par la droite qui correspond à l'extrémité de la seconde longueur avec l'axe des X, aura pour cosinus

$$\sigma \frac{dX}{dy};$$

ces deux angles doivent être égaux, d'après l'équation (5); et réciproquement, s'ils le sont pour tous les points de l'espace, l'équation (1) est intégrable. Nous avons donc le théorème suivant :

« Pour que des droites dont la direction est donnée en fonction des » coordonnées de leur point de départ puissent être normales à une série de surfaces, il faut et il suffit qu'en prenant un point A dans l'espace, et la droite AZ correspondante à ce point, puis portant, à partir du point A, perpendiculairement à AZ, deux longueurs infiniment petites égales AB, AC, la droite correspondante au point B fasse avec le plan ZAB un angle égal à celui que la droite partant du point C forme avec le plan ZAC. » — Ainsi, par exemple, il suffit qu'il existe en chaque point deux directions perpendiculaires pour lesquelles ces angles s'annulent, c'est-à-dire telles que les normales aux points C et D soient dans les plans ZAB, ZAC.

Il est d'ailleurs très-facile de vérifier que si la condition est remplie pour deux directions AB, AC, elle le sera pour deux autres directions quelconques perpendiculaires l'une à l'autre. Mais, dans tous les cas, pour démontrer que des droites sont normales à une même surface, il suffira de faire voir qu'il existe en chaque point de l'espace deux directions perpendiculaires à la droite correspondante et pour lesquelles la condition est remplie.

III.

Comme application, je montrerai l'usage que l'on peut faire des résultats précédents à la démonstration du beau théorème de M. Dupin sur les surfaces orthogonales.

Considérons trois séries de surfaces orthogonales, et soient, en un point A, AX, AY, AZ les tangentes aux courbes d'intersection des surfaces qui y passent; soient les trois points M, N, P, pris respectivement à des distances infiniment petites égales du point A, et dans les trois directions AX, AY, AZ. En considérant, au point M, les normales aux surfaces qui se coupent suivant AX, et nommant α , β , γ , α' , β' , γ' les angles qu'elles forment avec les axes, on aura

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0.$$

Mais α , α' différant infiniment peu d'un droit, et β , γ étant infiniment petits, cette équation devient, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$(1) \quad \cos \beta' + \cos \gamma = 0.$$

On aurait de même, en nommant α_1 , β_1 , γ_1 , α_2 , β_2 , γ_2 les angles que forment avec les axes les normales aux surfaces qui se coupent suivant AN,

$$(2) \quad \cos \gamma_1 + \cos \alpha'_1 = 0;$$

et enfin, en nommant α_2 , β_2 , γ_2 , α'_2 , β'_2 , γ'_2 les angles que forment avec les axes les normales menées au point p aux deux surfaces qui passent par ce point, on aura

$$(3) \quad \cos \alpha_2 + \cos \beta'_2 = 0.$$

Mais, d'après notre théorème énoncé plus haut,

$$(4) \quad \cos \beta' = \cos \alpha'_1, \quad \cos \gamma = \cos \alpha_2, \quad \cos \gamma_2 = \cos \beta'_2,$$

d'où résulte, en ajoutant les équations (1) et (2),

$$(5) \quad 2 \cos \beta' + \cos \alpha_2 + \cos \beta'_2 = 0,$$

qui, combinée avec l'équation (3), donne

$$\cos \beta' = 0.$$

On aura de même

$$\cos \gamma = 0, \quad \cos \gamma_1 = 0;$$

ce qui prouve que les normales aux points M, N, P à chacune des surfaces qui se croisent en A, sont situées dans les plans qui passent par ces points et par la normale correspondante en A. Il résulte de là que les points M, N, P sont sur les lignes de courbure des trois surfaces, ce qui est le théorème de M. Dupin.

On peut remarquer que, dans notre démonstration, nous n'avons fait usage que des trois surfaces qui passent en A. Nous avons donc réellement démontré le théorème suivant, dont celui de M. Dupin est une conséquence immédiate :

Si trois surfaces se coupent de manière à être normales en tous les points où elles se rencontrent, les courbes d'intersection seront, sur chacune des trois surfaces, tangentes aux lignes de courbure menées par le point commun aux trois surfaces.

IV.

Malus a démontré que les rayons de lumière partis d'un même point et réfléchis sur une surface quelconque restent, après leur réflexion, normaux à une même surface. M. Charles Dupin a généralisé ce théorème en faisant voir que des rayons de lumière, dirigés suivant les normales à une même surface, peuvent être réfléchis ou réfractés à travers une surface quelconque sans perdre la propriété d'être normaux à une même surface.

Plus récemment, M. Sturm a repris la démonstration du même théorème et est arrivé, par l'analyse, à exprimer les rayons de courbure et la position des lignes de courbure de la surface normale aux rayons réfractés en fonction des éléments correspondants de la surface normale aux rayons incidents.

Tous ces résultats peuvent se déduire géométriquement des théorèmes démontrés dans ce Mémoire.

Remarquons d'abord que si des rayons de lumière sont normaux à une même surface, ils sont, en même temps, normaux aux surfaces, en nombre infini, que l'on peut obtenir en portant, sur chaque rayon, une longueur constante à partir de sa surface normale primitive. Soient,

en effet, *fig. 1*, AZ la normale en un point d'une surface, et AB , AC les

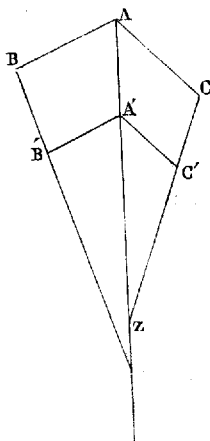


Fig. 1.

directions des lignes de courbure au point A . Menons les normales aux points B et C , elles seront respectivement dans les plans ZAB , ZAC , et si l'on prend sur AZ un point quelconque A' , je dis que le faisceau des rayons de lumière satisfera, autour de ce point A' , à la condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient tous normaux à une même surface passant par A' . Si, en effet, perpendiculairement à $A'Z$, on prend deux éléments $A'B'$, $A'C'$, situés dans les plans ZAB , ZAC , les rayons correspondants aux points B' , C' seront précisément BB' , CC' ; ils rencontreront donc tous deux la normale $A'Z$, et par conséquent, d'après notre théorème, tous les rayons lumineux sont, autour du point A' , normaux à une même surface.

Il est évident que les normales AA' , BB' , comprises entre les deux surfaces, ne diffèrent au plus que de quantités infiniment petites du second ordre, et que, par suite, les portions interceptées sur deux normales à une distance finie menées le long d'une même ligne de courbure sont rigoureusement égales entre elles; et comme on peut toujours passer d'un point quelconque à un autre point quelconque de la même surface en s'avancant successivement sur deux lignes de courbure, il en résulte que les deux surfaces interceptent entre elles des portions égales de toutes les normales.

D'après cela, pour démontrer que des rayons normaux à une même surface conservent cette propriété après avoir été réfractés d'une

manière quelconque, il suffira de prouver que la condition que nous avons donnée comme nécessaire et suffisante est remplie pour un point de chaque rayon. Nous choisirons le point situé sur la surface de séparation des deux milieux.

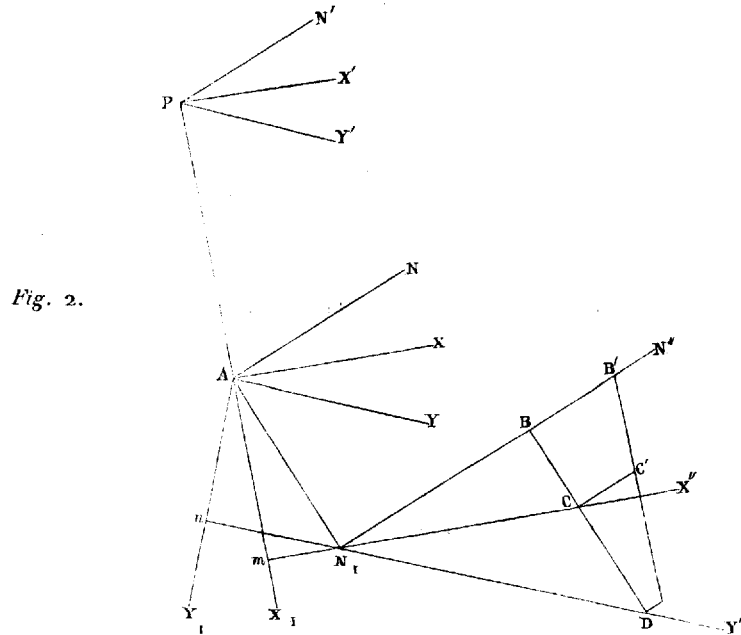


Fig. 2.

Soient, *fig. 2*, AN, la normale à la surface de séparation;

AX, le rayon incident;

AY, le rayon réfracté;

x , l'angle XAN;

y , l'angle YAN;

l , l'indice de réfraction $\frac{\sin x}{\sin y}$.

Portons une longueur infiniment petite AP sur une droite normale aux trois lignes AN, AX, AY, qui, d'après la loi connue de réfraction, sont dans un même plan. Soient PN', PX', PY' les trois droites correspondantes à AN, AX, AY, menées par le point P qui peut être considéré comme faisant partie de la surface de séparation. Si nous projetons ces droites PN', PX', PY' sur un plan perpendiculaire à AP, les angles qu'elles font entre elles ne changeront que de quantités infiniment

petites du second ordre, et, par conséquent, le rapport des deux sinus restera égal à l .

Soient α l'inclinaison de la projection de PX' sur une parallèle à AX , ou, en d'autres termes, l'inclinaison de PX' sur le plan PAX ;

β l'inclinaison de la projection de PY' sur une parallèle à AY , c'est-à-dire l'inclinaison de Y' sur le plan PAY ;

Enfin γ l'angle que la projection de PN' forme avec une parallèle à AN , c'est-à-dire l'inclinaison de PN' sur le plan PAN ; il faudra que

$$\frac{\sin(x + \alpha - \gamma)}{\sin(y + \beta - \gamma)} = \frac{\sin x}{\sin y} = l,$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\alpha - \gamma$ et $\beta - \gamma$ sont des infiniment petits,

$$\frac{(\alpha - \gamma) \cos x}{(\beta - \gamma) \cos y} = l, \quad \beta = \frac{(\alpha - \gamma) \cos x + l \gamma \cos y}{l \cos y}.$$

Cette formule permet, comme on voit, de calculer β au moyen de α et γ supposés connus. D'après notre théorème, pour que les rayons AY soient normaux à une même surface, il est nécessaire et suffisant qu'en prenant, dans le plan perpendiculaire à AY , et normalement à AP , une longueur $AY_1 = AP$, l'angle du rayon YY'' qui passe par le point Y_1 avec le plan YAY_1 , soit égal à l'angle β calculé plus haut. Cherchons donc la valeur de ce nouvel angle, que nous désignerons par β' .

Menons par le point A , et dans le plan des lignes AN , AX , AY , trois droites respectivement perpendiculaires à ces lignes, AN_1 , AX_1 , AY_1 ; soit AN_1 une longueur égale à AP . Le point N_1 peut être considéré comme situé sur la surface de séparation des deux milieux : soient N_1N'' la normale en ce point, N_1X'' , N_1Y'' les rayons incidents et réfractés qui lui correspondent. Ces rayons feront avec le plan des droites AX_1 , AY_1 , AN_1 des angles infiniment petits, et pourront, par conséquent, être regardés, aux infiniment petits près du second ordre, comme rencontrant les droites AX_1 , AY_1 en m et n .

Coupons les trois droites N_1N'' , N_1X'' , N_1Y'' par un plan dont BCD représente la trace sur le plan des lignes AX , AY , et qui soit perpendiculaire à la projection de N_1N'' ; supposons, pour fixer les idées, la longueur N_1B égale à l'unité, ce plan sera coupé par les droites N_1N'' , N_1X'' , N_1Y'' en des points dont je représente le rabattement autour de BD comme charnière par B' , C' , D' . Soient γ_1 l'angle formé par la droite

N, N'' avec le plan XAN ; β_1, α_1 les angles que forment Y, Y'', X, X'' avec le même plan, on aura évidemment

$$BB' = \gamma_1, \quad CC' = \frac{\alpha_1}{\cos x}, \quad DD' = \frac{\beta_1}{\cos y}.$$

Mais les points B', C', D' sont en ligne droite, puisque les droites sur lesquelles ils se trouvent sont dans un même plan; on a, par conséquent,

$$\frac{BB' - DD'}{BB' - CC'} = \frac{BD}{BC} = \frac{\text{tang } y}{\text{tang } x} = \frac{\cos x}{l \cos y},$$

et, par suite,

$$\frac{\gamma_1 - \frac{\beta_1}{\cos y}}{\gamma_1 - \frac{\alpha_1}{\cos x}} = \frac{\cos x}{l \cos y}.$$

Mais, d'après notre théorème, et puisque, par hypothèse, les droites N, X sont normales à une même surface, on a $\gamma_1 = \gamma$; de plus, l'angle α_1 , formé par la normale en m avec le plan XAm , est égal à

$$\alpha \times \frac{Am}{AP} = \alpha \cos x, \quad \text{donc} \quad \frac{\alpha_1}{\cos x} = \alpha;$$

et, par suite,

$$\frac{\beta_1}{\cos y} = \frac{(\alpha - \gamma) \cos x + l \gamma \cos y}{l \cos y}, \quad \text{donc} \quad \frac{\beta_1}{\cos y} = \beta;$$

c'est précisément ce qui doit arriver pour que les lignes Y soient normales à une même surface, puisque α, α_1 sont les angles que forment avec les plans correspondants deux normales menées dans deux directions perpendiculaires, mais à des distances du point A dont le rapport est $\cos y$. Si, par conséquent, on avait pris sur AY et AP des longueurs égales, les rayons réfractés correspondants aux points ainsi obtenus auraient fait des angles égaux avec les plans XAX_1, XAP ; ces rayons sont donc normaux à une même surface.

Reprenons l'équation

$$\beta = \gamma + \frac{(\alpha - \gamma) \cos x}{l \cos y}.$$

Soient θ l'angle de la ligne AP avec l'une des lignes de courbure de la surface normale aux rayons incidents AX ; ω l'angle de cette même ligne AP avec la ligne de courbure de la surface normale à AY ; enfin u

l'angle qu'elle forme avec la ligne de courbure de la surface de séparation normale à AN.

Si R, r, R', r', R'', r'' sont les rayons de courbure de ces trois surfaces, nous aurons

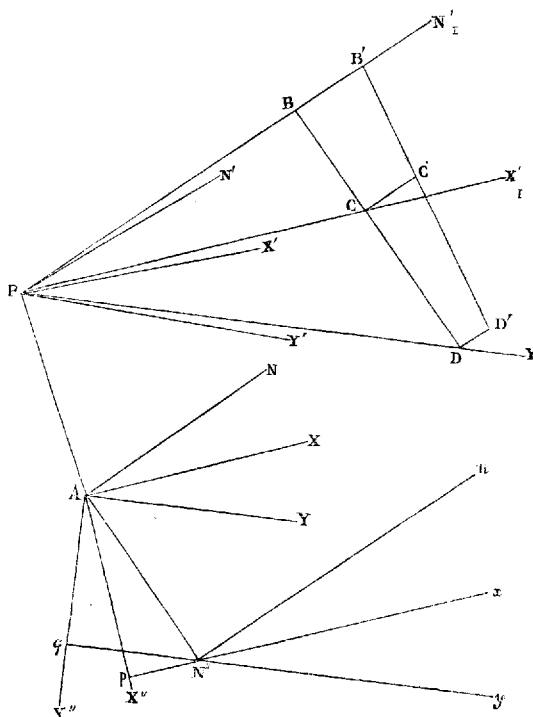
$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot AP \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right), \\ \beta &= \frac{1}{2} \sin 2\omega \cdot AP \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{r'} \right), \\ \gamma &= \frac{1}{2} \sin 2u \cdot AP \left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{r''} \right), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{r'} \right) \sin 2\omega = \left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{r''} \right) \sin 2u \\ &+ \frac{\cos x}{l \cos y} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \sin 2\theta - \left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{r''} \right) \sin 2u \right]. \end{aligned} \right.$$

C'est une première relation entre les éléments relatifs à la courbure de la surface normale aux rayons réfractés. On peut facilement en trouver deux autres et déterminer, par suite, les trois quantités R', r' et ω . Considérons de nouveau les trois normales, *fig. 3*, AN, AX, AY,

Fig. 3.



menées aux trois surfaces au point A; menons, comme précédemment, la normale AP, et au point P qui peut être considéré comme se trouvant sur chacune des trois surfaces, menons les normales PN', PX', PY', qui doivent se trouver dans un même plan et satisfaire à la condition

$$\frac{\sin X'P'N'}{\sin Y'PN'} = l.$$

Il est facile de voir que les courbures des sections normales faites aux trois surfaces suivant AP sont égales aux angles que forment les lignes PN', PX', PY' avec un plan perpendiculaire à AP, divisés respectivement par la longueur AP. Soient $\alpha_n, \alpha_x, \alpha_y$ ces angles, $\frac{1}{\rho_n}, \frac{1}{\rho_x}, \frac{1}{\rho_y}$ les courbures des sections, on aura

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\alpha_n}{AP}, \quad \frac{1}{\rho_x} = \frac{\alpha_x}{AP}, \quad \frac{1}{\rho_y} = \frac{\alpha_y}{AP}.$$

Cherchons une relation entre $\alpha_n, \alpha_x, \alpha_y$; pour cela considérons les trois projections des lignes AN', AX', AY' sur le plan perpendiculaire à AP: soient PX', PY', PN' ces projections; concevons un plan BCD mené perpendiculairement à celui de ces droites et suivant une ligne BD normale à PN'. Rabattons autour de BD comme charnière les points où les droites PN', PX', PY' viennent percer ce plan. Soient B', C', D' ces rabattements, qui seront en ligne droite. Nous aurons évidemment

$$\frac{BB' - DD'}{BB' - CC'} = \frac{DB}{BC} = \frac{\tan y}{\tan x} = \frac{\cos x}{l \cos y}.$$

Mais

$$BB' = \alpha_n, \quad CC' = \frac{\alpha_x}{\cos x}, \quad DD' = \frac{\alpha_y}{\cos y};$$

donc

$$\frac{\alpha_n - \frac{\alpha_y}{\cos y}}{\alpha_n - \frac{\alpha_x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{l \cos y},$$

d'où l'on tire

$$\alpha_x = \alpha_n \cos x - l \alpha_n \cos y + l \alpha_y,$$

et, par suite,

$$(b) \quad \frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{\rho_n} \cos x - \frac{l \cos y}{\rho_n} + \frac{l}{\rho_y}.$$

Mais on a

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{R} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \cos^2 \theta,$$

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{R'} \sin^2 \omega + \frac{1}{r'} \cos^2 \omega,$$

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{R''} \sin^2 u + \frac{1}{r''} \cos^2 u,$$

ce qui transforme l'équation (b) en la suivante,

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin^2 \theta}{R} + \frac{\cos^2 \theta}{r} = \cos x \left(\frac{\sin^2 u}{R''} + \frac{\cos^2 u}{r''} \right) \\ - l \cos y \left(\frac{\sin^2 u}{R''} + \frac{\cos^2 u}{r''} \right) + l \left(\frac{\sin^2 \omega}{R'} + \frac{\cos^2 \omega}{r'} \right). \end{array} \right.$$

Pour trouver une troisième relation entre les quantités R' , r' et ω , menons par le point A, et dans le plan des trois normales AN, AX, AY, trois perpendiculaires à ces normales AN'', AX'', AY''. Par le point N'', situé à une distance infiniment petite AN'', sur la perpendiculaire à AN, menons la normale N''n à la surface de séparation, et les rayons incidents et réfractés N''x, N''y; ces rayons pourront être considérés comme rencontrant les droites AX'', AY'' en p et q, et il est facile de voir que si α'_n , α'_x , α'_y désignent les angles que les projections des trois droites N''n, N''x, N''y forment avec les droites correspondantes passant par le point A, on aura, en désignant par ρ'_n , ρ'_x , ρ'_y les rayons de courbure des sections normales faites dans les trois surfaces par le plan XANY,

$$\frac{1}{\rho'_n} = \frac{\alpha'_n}{AN''}, \quad \frac{1}{\rho'_x} = \frac{\alpha'_x}{AN'' \cos x}, \quad \frac{1}{\rho'_y} = \frac{\alpha'_y}{AN'' \cos y}.$$

Mais les trois droites N''n, N''x, N''y étant l'une normale à la surface de séparation des milieux, et les deux autres dirigées suivant les rayons incidents et réfractés, on doit avoir

$$\frac{\sin(x + \alpha'_x - \alpha'_n)}{\sin(y + \alpha'_y - \alpha'_n)} = l,$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\frac{\sin x}{\sin y} = l$,

$$\frac{(\alpha'_x - \alpha'_y) \cos x}{(\alpha'_y - \alpha'_x) \cos y} = l,$$

$$\alpha'_x = \frac{l(\alpha'_y - \alpha'_x) \cos y + \alpha'_x \cos x}{\cos y},$$

d'où

$$(d) \quad \frac{\cos x}{\rho'_x} = \frac{l \left(\frac{\cos y}{\rho'_y} - \frac{1}{\rho'_x} \right) + \frac{1}{\rho'_n} \cos x}{\cos x}.$$

Mais, d'après une formule connue,

$$\frac{1}{\rho'_x} = \frac{\cos^2 \theta}{R} + \frac{\sin^2 \theta}{r}, \quad \frac{1}{\rho'_y} = \frac{\cos^2 \omega}{R'} + \frac{\sin^2 \omega}{r'}, \quad \frac{1}{\rho'_n} = \frac{\cos^2 u}{R''} + \frac{\sin^2 u}{r''},$$

en sorte que la formule (d) devient

$$(e) \quad \begin{cases} \cos^2 x \left(\frac{\cos^2 \theta}{R} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \right) = (l - \cos x) \left(\frac{\cos^2 u}{R''} + \frac{\sin^2 u}{r''} \right) \\ \qquad \qquad \qquad + l \cos y \left(\frac{\cos^2 \omega}{R'} + \frac{\sin^2 \omega}{r'} \right). \end{cases}$$

Les trois formules (a), (c), (e) permettront de calculer les quantités R' , r' , ω en fonction de R , r , R'' , r'' , θ et u .

V.

On peut facilement trouver quelles sont toutes les lois de réfraction qui laisseraient subsister le théorème de M. Dupin. Supposons que le rayon réfracté restant toujours dans le plan qui passe par le rayon incident et par la normale à la surface de séparation, $y = \varphi(x)$ représente la relation qui existe entre les deux angles d'incidence et de réfraction; en reprenant la *fig. 2*, et faisant absolument les mêmes raisonnements, en substituant seulement la relation $y = \varphi(x)$ à l'équation

$$\frac{\sin x}{\sin y} = l,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \gamma + \beta - \gamma &= \varphi(x + \alpha - \gamma), \\ \beta - \gamma &= (\alpha - \gamma) \varphi'(x), \\ \beta &= \gamma + (\alpha - \gamma) \varphi'(x). \end{aligned}$$

On trouvera de même, au moyen des constructions employées plus haut, et en adoptant les mêmes notations,

$$\frac{\beta_1}{\cos \gamma} = \gamma + (\alpha - \gamma) \frac{\text{tang } \gamma}{\text{tang } x}.$$

Pour que les droites Y soient normales à une même surface, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta = \frac{\beta_1}{\cos \gamma},$$

c'est-à-dire

$$\gamma \left(1 - \frac{\text{tang } \gamma}{\text{tang } x} \right) + \alpha \frac{\text{tang } \gamma}{\text{tang } x} = \gamma [1 - \varphi'(x)] + \alpha \varphi'(x).$$

Cette équation devant avoir lieu quelles que soient les quantités α , γ , qui, évidemment, sont indépendantes l'une de l'autre, il faut que l'on ait

$$\varphi'(x) = \frac{\text{tang } \gamma}{\text{tang } x};$$

l'intégrale est

$$\varphi(x) = \text{arc sin } C \sin x,$$

ou

$$\frac{\sin \varphi(x)}{\sin x} = C.$$

La loi de la nature est, par conséquent, la seule qui puisse permettre au théorème de M. Dupin d'être exact dans toute sa généralité.

