WILLIAM ROBERTS

Sur une représentation géométrique des trois fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 155-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__155_0>

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE
DES TROIS FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. WILLIAM ROBERTS (DE DUBLIN) [*].

Prenons sur une surface sphérique un point quelconque pour le sommet d'un cône du second degré, dont un des axes principaux extérieurs est un diamètre de la sphère. L'origine des coordonnées rectangulaires étant le centre, choisissons ce diamètre pour l'axe des z, et faisons celui des x parallèle à l'axe intérieur du cône, en sorte qu'on ait, pour l'équation de cette surface,

$$x^2 - y^2 \operatorname{tang}^2 \beta - (1 - z)^2 \operatorname{tang}^2 \alpha = 0,$$

en désignant par α et β les compléments de ses semi-angles principaux, et prenant pour unité le rayon de la sphère; si l'on désigne par θ et ψ les coordonnées polaires d'un point de la sphère, on aura

$$x = \sin\theta \cos\psi, \quad y = \sin\theta \sin\psi, \quad z = \cos\theta,$$

et, pour tous les points de notre courbe sphérique,

$$\text{(A)} \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\psi}}{\operatorname{tang}\alpha \cos\beta}.$$

θ exprime la distance angulaire d'un point de la courbe à l'axe des z,

[*] Dans une Lettre, datée du 11 février dernier et jointe par M. William Roberts à son Mémoire, se trouve le passage suivant qu'on me saura gré d'avoir transcrit :

« Il s'agit de représenter par l'arc d'une courbe sphérique les trois espèces de fonc-
» tions elliptiques. Soit une courbe produite par l'intersection d'une sphère et d'un cône
» du second degré, dont un des axes principaux extérieurs passe par le centre; je
» dis que l'arc de cette courbe jouit de ladite propriété. —Vous verrez au premier coup
» d'œil la similitude, quant à la forme, de cette courbe avec la lemniscate ordinaire; ce
» qui, je pense, donne plus d'intérêt au théorème dont il s'agit. — J'ai lu, dans le
» numéro d'avril 1843 de votre Journal, un Mémoire très-élégant de M. Alfred Serret,
» sur la rectification des courbes généralement nommées *lemniscates*. Il est curieux de
» remarquer qu'en partant de la même propriété de la même courbe que moi, il est
» aussi parvenu à une représentation de la première transcendante, tout à fait diffé-
» rente de la mienne. » (J. LIOUVILLE.)

et ψ l'angle du plan xz et de celui qui passe par le même point et l'axe des z. Si donc on regarde le sommet du cône comme l'origine des coordonnées polaires sphériques, et le grand cercle du plan des xz comme un axe fixe, θ sera le rayon vecteur, et ψ l'angle polaire d'un point quelconque de ladite courbe, et la relation (A) sera son équation.

Il est aisé de voir l'analogie qui existe entre la forme de cette courbe et celle de la lemniscate ordinaire. Le centre sera un point double, car en faisant $\theta = 0$, on trouve

$$\sin\psi = \pm\cos\beta, \quad \text{ou} \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \text{et} \quad 3.\frac{\pi}{2} + \beta,$$

ce qui donne les directions des rayons vecteurs au moment où ils vont s'évanouir, ou des grands cercles qui touchent la courbe à son centre.

Transformons aussi l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

où s est la longueur de l'arc, par la substitution des valeurs des coordonnées dont nous avons fait usage, il en résultera

$$ds = \sqrt{\sin^2\theta + \frac{d\theta^2}{d\psi^2}}\, d\psi.$$

Mais en différentiant l'équation (A), on a

$$\frac{d\theta}{d\psi} = -\frac{\sin 2\alpha\cos\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\psi}},$$

et

$$\sin\theta = \frac{\sin 2\alpha\cos\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\psi}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\psi},$$

en sorte qu'on a, après quelques réductions,

$$ds = \frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\psi}\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tang}^4\beta\operatorname{tang}^2\psi}{1 - \operatorname{tang}^2\beta\operatorname{tang}^2\psi}}\, d\psi.$$

Je vais montrer que cette différentielle peut se transformer dans celle d'une transcendante elliptique. En effet, si l'on fait

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\cos^2\beta}{\sin\beta}\,\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\varphi}},$$

on aura

$$\sin^2\psi = \frac{\cos^4\beta\sin^2\varphi}{\sin^2\beta + \cos 2\beta\sin^2\varphi}, \quad \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tang}^4\beta\operatorname{tang}^2\psi}{1 - \operatorname{tang}^2\beta\operatorname{tang}^2\psi}} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

et

$$d\psi = \frac{\sin\beta\cos^2\beta}{\sin^2\beta + \cos 2\beta\sin^2\varphi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\varphi}},$$

et l'on en déduit sans difficulté

$$s = \frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{\sin\beta}\int \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\tang^2\beta}\right)\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\varphi}},$$

ou, d'après la notation des fonctions elliptiques,

$$s = \frac{\sin 2\alpha\cos^2\beta}{\sin\beta}\Pi\left(-1 + \frac{\sin^2\alpha}{\tang^2\beta}, \sin\beta, \varphi\right);$$

ce qui montre que l'arc compté depuis l'extrémité du demi-axe peut s'exprimer par une fonction elliptique de la troisième espèce, et que le périmètre entier s'exprimera à l'aide de la fonction complète.

Examinons les variétés dont le paramètre (que, selon l'usage, nous désignerons par n) est susceptible.

Premier cas. $\alpha < \beta$. On posera

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sin\lambda, \quad \text{et l'on aura} \quad n = -1 + \cos^2\beta\sin^2\lambda,$$

ce qui est la forme circulaire fondamentale. On pourra donc toujours représenter une fonction de troisième espèce à paramètre circulaire par un arc de notre courbe.

Deuxième cas. $\alpha > \beta$ et $\beta < \frac{\pi}{4}$. Si la fraction $\frac{\sin\alpha}{\tang\beta}$ est inférieure a 1, n est positif, et par conséquent circulaire; si au contraire cette fraction est supérieure à 1, on pourra poser

$$\sin^2\lambda = \frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\tang^2\beta}}{1 - \cos^2\beta}, \quad \text{ce qui donne} \quad n = -\sin^2\beta\sin^2\lambda,$$

forme fondamentale du paramètre logarithmique. Donc on peut toujours construire une fonction à paramètre logarithmique, dont l'angle (β) du module est plus petit que $\frac{\pi}{4}$; car, en tirant la valeur de α en λ et β, on a

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \sin^2\beta\sin^2\lambda}{\cot^2\beta},$$

ce qui est, dans tous les cas, une fraction positive.

Troisième cas. $\alpha > \beta$, et $\beta > \frac{\pi}{4}$. Ici $1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\tang^2 \beta}$ est évidemment plus petit que $1 - \frac{\sin^2 \beta}{\tang^2 \beta}$ ou que $\sin^2 \beta$, en sorte qu'on pourra faire

$$\sin^2 \lambda = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\tang^2 \beta}}{\sin^2 \alpha}, \quad \text{et} \quad n = - \sin^2 \beta \sin^2 \lambda.$$

Réciproquement, on a

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \lambda}{\cot^2 \beta}.$$

Il est facile de voir que le second membre de cette équation n'est fractionnaire que pour les valeurs de λ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et $\arc \sin \frac{\sqrt{\sin^2 \beta - \cos^2 \beta}}{\sin^2 \beta}$. Ici donc, si, dans la fonction qu'on cherche à construire, l'angle du paramètre ne tombe pas entre ces limites, un inconvénient se présente, mais heureusement on peut l'éviter en se servant de la transformation donnée par Lagrange, qui fournit pour la fonction proposée

$$\Pi\,(- \sin^2 \beta \sin^2 \lambda,\ \sin \beta,\ \varphi)$$

une expression du type suivant,

$$\Pi(-\sin^2\beta \sin^2 \lambda, \sin \beta, \varphi) = l\Pi(-\sin^2\beta' \sin^2 \lambda', \sin \beta', \varphi') + m\mathrm{F}(\sin \beta', \varphi') + \mathrm{V},$$

l, m étant des coefficients constants, β' un angle plus petit que $\frac{\pi}{4}$, et V une quantité déterminable par des logarithmes [*]; et nous avons vu que la nouvelle fonction Π, qu'on introduit ainsi, peut toujours être construite.

Au reste, il est surtout intéressant de montrer comment on pourra représenter les fonctions de la première et de la seconde espèce.

I. Soit $\sin \alpha = \tang \beta$, ce qui donne

$$\alpha > \beta, \quad \text{et} \quad \beta < \frac{\pi}{4}.$$

---

[*] Il est à propos de remarquer que l'illustre géomètre Abel a démontré qu'il existe un résultat de cette forme dans tous les cas où, par des relations algébriques, une fonction de première espèce peut se transformer en une autre du même genre, ce que Legendre ne paraît pas avoir aperçu. (Voyez les *OEuvres complètes de N.-H. Abel*, publiées par B. Holmbœ, tome I, page 317.)

On a

$$ds = 2\sqrt{\cos 2\beta}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi}}, \quad \text{et} \quad s = 2\sqrt{\cos 2\beta}\,\mathrm{F}(\sin\beta,\ \varphi).$$

Lorsqu'il arrive que l'angle du module de la fonction proposée est supérieur à $\frac{\pi}{4}$, il faut la transformer en une autre dont le module soit moindre; ce qui peut s'effectuer par la méthode de Lagrange, ou par le premier théorème de M. Jacobi, qui contient une infinité de transformations de ce genre [*].

II. Soit $\alpha = \beta$. Dans ce cas, où le cône est de révolution, on a

$$ds = 2\cos^3\beta\,\frac{d\varphi}{(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où, après les réductions ordinaires, et en employant la notation connue.

$$s = 2\cos\beta\left[\mathrm{E}(\sin\beta,\ \varphi) - \frac{\sin^2\beta\sin\varphi\cos\varphi}{(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Mais l'arc, compté du centre, est exprimé par une fonction de la seconde espèce, sans l'addition d'aucune partie algébrique. Car en reprenant la valeur générale de l'arc considéré comme fonction de l'angle polaire ψ, on a

$$ds = \frac{\sin 2\beta}{\cos^2\psi}\sqrt{\frac{1+\operatorname{tang}^4\beta\operatorname{tang}^2\psi}{1-\operatorname{tang}^2\beta\operatorname{tang}^2\psi}}\,d\psi,$$

et en introduisant un nouvel angle ω tel que

$$\cos\omega = \operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\psi$$

$\left(\text{qui est égal à zéro quand } \psi = \frac{\pi}{2} - \beta, \text{ et à } \frac{\pi}{2} \text{ quand } \psi = 0\right)$, on trouve, après quelques réductions,

$$s = 2\cos\beta\,\mathrm{E}(\sin\beta,\ \omega).$$

D'après ce dernier résultat, il ne reste rien à désirer pour la complète solution du problème proposé. J'espère entrer, une autre fois, dans

---

[*] Cette variété de notre courbe ne diffère pas au fond de celle que j'ai déjà donnée dans le numéro de Juillet 1843 de ce Journal. Elle est, sous plusieurs points de vue, analogue à la lemniscate vulgaire.

quelques détails relativement aux propriétés géométriques de la courbe dont nous avons ici discuté la rectification.