JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Note de M. J.-A. Serret

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__160_0>

Note de M. J.-A. Serret.

Le Mémoire qu'on vient de lire résout complétement le problème de la représentation géométrique des transcendantes elliptiques, dont je me suis occupé dans deux articles publiés dans le volume précédent de ce Journal. On peut arriver d'une manière différente aux résultats analytiques que j'ai consignés dans le premier de ces articles.

Les deux équations

$$(1)\qquad r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2t + a^4 = b^4,\qquad r^2 = \frac{a^2 \cos 2\theta}{\cos 2(t-\theta)},$$

où b et θ sont deux paramètres variables, et r et t les coordonnées polaires d'un point quelconque, appartiennent à deux systèmes de lignes isothermes conjuguées et orthogonales. Les courbes du premier système sont des cassinoïdes homofocales, et celles du second, des hyperboles équilatères; si l'on prend pour coordonnées d'un point quelconque les paramètres b et θ des deux courbes conjuguées qui y passent, les anciennes coordonnées seront liées aux nouvelles par les équations (1) ou par les suivantes

$$(2)\qquad r^4 = a^4 \pm 2a^2 b^2 \sin 2\theta + b^4,\qquad \operatorname{tang} 2t = -\frac{b^2 \cos 2\theta}{b^2 \sin 2\theta \pm a^2}.$$

Si l'on différentie ces équations, où b est supposé constant et θ variable, on restera toujours sur la même cassinoïde, et l'on trouvera aisément

$$ds = b^2 . \frac{d\theta}{r}.$$

Si donc on désigne par $s(\theta_0, \theta_1)$, $\sigma(\theta_0, \theta_1)$ les deux arcs interceptés sur la cassinoïde au paramètre b par les deux hyperboles conjuguées aux paramètres θ_0 et θ_1, on aura

$$s(\theta_0, \theta_1) = b^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt[4]{a^4 - 2a^2 b^2 \sin 2\theta + b^4}},$$

$$\sigma(\theta_0, \theta_1) = b^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt[4]{a^4 + 2a^2 b^2 \sin 2\theta + b^4}}.$$

Or, ces deux transcendantes ne sont autres que celles que Legendre a étudiées (*Traité des fonctions elliptiques,* t. I, p. 178), et qui peuvent s'exprimer par la somme et la différence de deux fonctions de la première espèce de modules complémentaires et d'amplitudes différentes. On retombe donc très-simplement sur le théorème que j'ai démontré l'année dernière, et l'on voit en même temps que les deux intégrales auxquelles nous parvenons ne changent pas quand on change l'un en l'autre les paramètres a et b, bien qu'alors la courbe change tout à fait de nature, ce qui, du reste, est entièrement conforme à mes premiers résultats.