JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans la théorie de la flexion des verges élastiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 191-192.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__191_0>

Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans la théorie de la flexion des verges élastiques,

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Dans la théorie de la flexion des verges élastiques à double courbure sollicitées par des forces quelconques, on obtient trois équations [*] :

$$(1) \qquad \frac{\delta ds}{ds} = \mathrm{D}, \quad \frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{\rho} = \mathrm{F}, \quad \frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{\tau} = \mathrm{T},$$

dans lesquelles D, F, T représentent des fonctions connues des coordonnées primitives x, y, z d'un point quelconque m de l'*axe* courbe de la pièce, S la longueur de l'arc de cet axe jusqu'au point m, $\frac{ds}{\rho}$ et $\frac{ds}{\tau}$ l'angle de contingence et l'angle de deux plans osculateurs consécutifs de la même courbe à ce point; enfin δ la caractéristique des variations provenant des déplacements très-petits des points de l'axe, déterminés par l'action des forces données, dont les composantes et les moments entrent dans D, F, T.

Ce sont ces déplacements $\xi = \delta x$, $\eta = \delta y$, $\zeta = \delta z$, estimés parallèlement aux x, y, z, qu'il s'agit de trouver.

Pour cela, effectuons les différentiations par δ des premiers membres des équations précédentes; après avoir remplacé ds, $\frac{ds}{\rho}$, $\frac{ds}{\tau}$ par leurs expressions générales connues en x, y, z, nous aurons trois équations différentielles simultanées du premier, du deuxième et du troisième ordre en ξ, η, ζ. Si nous éliminons deux de ces inconnues, par exemple η et ζ (ce qui se fait facilement en différentiant la première équation et en en tirant les valeurs de $d^2\eta$, $d^2\zeta$, d'où, à l'aide de la seconde équation, celles de $d\eta$ et $d\zeta$ que l'on substitue dans la troisième), les intégrales disparaissent et nous obtenons une équation en ξ,

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &d\xi\, d^2y\, d^3z - d\xi\, d^2z\, d^3y + dy\, d^2z\, d^3\xi - dy\, d^2\xi\, d^3z \\ &\qquad + dz\, d^2\xi\, d^3y - dz\, d^2y\, d^3\xi = \mathrm{S}ds^6, \end{aligned}\right.$$

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome XVII, page 952.

dans laquelle S représente une certaine fonction connue (comme D, F, T) des coordonnées primitives du point m, ou de l'arc s que l'on peut prendre pour variable indépendante.

Si l'on remplace, dans le premier membre, y et z par leurs valeurs en s, tirées des équations de la courbe primitive de l'axe, on n'a plus, dans l'équation précédente, que ξ et s. Cette équation différentielle du troisième ordre est linéaire; mais les coefficients de $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d^2\xi}{ds^2}$, $\frac{d^3\xi}{ds^3}$ n'y sont point constants, et il n'existe pas de méthode générale pour résoudre, par rapport à ξ, une équation de ce genre.

Aussi j'ai cherché à intégrer directement l'équation (2) sans particulariser son second membre. J'y ai réussi en posant

$$d\xi = u dz, \quad dy = v dz.$$

La substitution dans les six termes du premier membre en produit vingt-deux, mais il y en a vingt qui s'entre-détruisent, et ce premier membre se réduit à

$$dz^3 (du\, d^2 v - dv\, d^2 u) = -\, dz^3\, dv^2\, d.\frac{du}{dv}.$$

Donc on a

$$-\, dz^3 \left(d.\frac{dy}{dz}\right)^2 d.\frac{d.\frac{d\xi}{dz}}{d.\frac{dy}{dz}} = S ds^6,$$

équation qui est intégrable; on en tire

$$\frac{d\xi}{dz} = -\int\left(d.\frac{dy}{dz}\right)\int\frac{S ds^6}{dz^3\left(d.\frac{dy}{dz}\right)^2};$$

et l'on fait disparaître l'intégrale double en intégrant par parties, ce qui donne

$$d\xi = dz\int\frac{S ds^6}{(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2}\, dy - dy\int\frac{S ds^6}{(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2}\, dz.$$

On aurait des expressions analogues pour $d\eta$, $d\zeta$.

La recherche des petits déplacements des points de l'axe d'une pièce courbe à double courbure est ainsi ramenée aux quadratures, et l'on voit que le polynôme différentiel qui forme le premier membre de l'équation (2) est intégrable quand, après l'avoir multiplié par dz ou dy, on le divise par $(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2$.