JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Solution de quelques problèmes de mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 217-238.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__217_0>

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE,

PAR M. OSSIAN BONNET.

I.

Considérons une chaîne parfaitement flexible et homogène, ayant partout une égale épaisseur. Supposons ses extrémités fixées d'une manière invariable aux deux points A et B, et chacun de ses éléments sollicité par une force déterminée, assujettie à la seule condition de varier d'une manière continue tant en grandeur qu'en direction, quand on passe d'un élément à l'élément suivant; nous aurons, pour l'équilibre d'un élément quelconque, les trois équations connues

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &d.\left(\mathrm{T}\,\frac{dx}{ds}\right) + \mathrm{X}\,ds = 0,\\ &d.\left(\mathrm{T}\,\frac{dy}{ds}\right) + \mathrm{Y}\,ds = 0,\\ &d.\left(\mathrm{T}\,\frac{dz}{ds}\right) + \mathrm{Z}\,ds = 0;\end{aligned}\right.$$

x, y, z représentant les coordonnées rectangulaires d'un point de l'élément considéré, s l'arc de la chaîne compris entre un point fixe et le point variable (x, y, z), T la tension en ce dernier point, X, Y, Z les forces rapportées à l'unité de longueur et parallèles aux axes qui répondent au même point, et enfin, toutes les différentielles se rapportant à un même déplacement infiniment petit effectué sur la chaîne, dans un sens qui pourrait être quelconque, mais que nous supposerons toujours être celui dans lequel sont comptées les valeurs positives de s, pour fixer les idées et pour rendre positive la différentielle ds.

Si en vertu de la nature des forces X, Y, Z, et de la position des points fixes A et B, la courbe d'équilibre de la chaîne est plane, on pourra rapporter l'équilibre à deux axes situés dans le plan de cette courbe, et alors il suffira de considérer les deux premières des équations (1).

C'est le cas que nous examinerons en premier lieu.

Développons les deux équations d'équilibre, il vient, en prenant s pour variable indépendante,

$$\mathrm{T}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d\mathrm{T}}{ds}\frac{dx}{ds}+\mathrm{X}=0,$$

$$\mathrm{T}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d\mathrm{T}}{ds}\frac{dy}{ds}+\mathrm{Y}=0;$$

d'où

$$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{Y}\frac{dx}{ds}-\mathrm{X}\frac{dy}{ds}}{\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}-\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}},$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{ds}=\frac{\mathrm{X}\frac{d^2y}{ds^2}-\mathrm{Y}\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}-\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}},$$

et, en éliminant T,

$$(2)\qquad d.\left(\frac{\mathrm{Y}\frac{dx}{ds}-\mathrm{X}\frac{dy}{ds}}{\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}-\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}}\right)-\frac{\mathrm{X}\frac{d^2y}{ds^2}-\mathrm{Y}\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}-\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}}ds=0.$$

Cette équation représente la courbe qu'affecte la chaîne dans la position d'équilibre.

On peut la mettre sous une forme plus simple.

s étant la variable indépendante, on a

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}=0,$$

d'où

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}=-\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}}=\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}-\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}=\pm\frac{1}{\rho},$$

en appelant ρ le rayon de courbure, et observant que

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1,\quad \text{et}\quad \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}=\frac{1}{\rho};$$

de là nous tirons

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \pm \frac{\frac{dy}{ds}}{\rho}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{\frac{dx}{ds}}{\rho}, \quad \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds^2} = \pm \frac{1}{\rho},$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris d'après la dernière relation, selon que la dérivée par rapport à s de $\frac{dy}{dx}$ est négative ou positive, c'est-à-dire suivant que la tangente de l'angle et par conséquent l'angle que fait avec la partie positive de l'axe des x la tangente à la courbe d'équilibre, va en diminuant ou en augmentant pour un déplacement infiniment petit du point de contact, effectué sur la chaîne dans le sens où sont comptées les valeurs positives des arcs s.

Substituant dans l'équation (2), il vient

$$d.\left[\rho\left(\mathrm{Y}\frac{dx}{ds} - \mathrm{X}\frac{dy}{ds}\right)\right] \pm \left(\mathrm{X}\frac{dx}{ds} + \mathrm{Y}\frac{dy}{ds}\right) ds = 0,$$

le signe $\pm$ étant déterminé comme il vient d'être dit.

Appelons maintenant R l'intensité de la force qui sollicite la chaîne au point x, y, z, et α l'angle positif que la direction de cette force fait avec la partie positive de l'axe des x; soit en même temps φ l'angle positif que fait avec la même partie de l'axe des x, la portion de la tangente à la chaîne obtenue en prolongeant l'élément de l'arc de cette chaîne dans le sens positif; on aura

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}\cos\alpha, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{R}\sin\alpha,$$
$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

et l'égalité précédente deviendra

$$(3) \qquad d.[\mathrm{R}\rho\sin(\alpha - \varphi)] \pm \mathrm{R}\cos(\alpha - \varphi)\, ds = 0.$$

Si θ est l'angle plus petit que 180 degrés que fait la direction de la force R avec la portion de la tangente à la chaîne obtenue en prolongeant l'élément de l'arc dans le sens positif, on aura

$$\sin(\alpha - \varphi) = \pm \sin\theta, \quad \text{et} \quad \cos(\alpha - \varphi) = \cos\theta,$$

le signe placé devant $\sin\theta$ étant $+$ ou $-$, selon que l'angle φ va en diminuant ou en augmentant pour un déplacement infiniment petit effectué dans le sens des s positifs, ainsi qu'il est facile de s'en assurer en examinant toutes les positions qui peuvent se présenter et remarquant que la force R doit toujours agir dans la convexité de la chaîne.

Cela nous donne enfin, pour l'équation de la courbe d'équilibre de la chaîne,

$$d.(R\rho\sin\theta) + R\cos\theta\, ds = 0. \tag{4}$$

Pour mettre plus d'uniformité dans nos calculs, nous emploierons toujours l'équation précédente quand nous voudrons connaître la figure d'équilibre d'une chaîne, la force étant donnée, ou réciproquement pour déterminer la force, quand nous connaîtrons la figure d'équilibre; nous devons dire seulement qu'il sera quelquefois plus avantageux d'opérer directement.

II.

Si nous supposons en premier lieu la force R normale à la courbe d'équilibre de la chaîne, nous aurons

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta = 1, \quad \cos\theta = 0,$$

et l'équation (4) deviendra

$$R\rho = c,$$

ce qui montre que la courbe d'équilibre dans le cas considéré a en chacun de ses points son rayon de courbure inversement proportionnel à la force, d'où l'on déduit que si la force est constante, la courbe sera un cercle, etc. Tous ces résultats sont connus.

III.

Supposons en second lieu la force R toujours parallèle à la même direction. Prenons pour partie positive de l'axe des x une parallèle à la force R, et pour partie positive de l'axe des y une perpendiculaire menée du côté où sont situées les portions des tangentes obtenues en prolongeant les éléments des arcs s dans le sens des valeurs positives de ces arcs. Il est facile de voir qu'alors, la force R étant toujours dans la convexité de la chaîne, l'angle θ ira en croissant pour un déplacement fait sur la chaîne dans le sens des valeurs positives de s, et que l'on aura les différentielles se rapportant comme ci-dessus à un déplacement fait dans le même sens

$$ds = \rho d\theta;$$

cela étant, l'équation (4) deviendra

$$d.(\mathrm{R}\rho\sin\theta) + \mathrm{R}\rho\cos\theta d\theta = 0. \tag{5}$$

Ce n'est que pour fixer les idées et pour arriver plus rapidement à l'équation précédente, que l'on a supposé la partie positive de l'axe des y dans un certain sens; mais il est facile de voir que l'équation (5) subsiste encore quand la partie positive des y est prise dans le sens opposé. Du reste, on peut établir cette équation d'une autre manière qui met en évidence ce que nous venons d'avancer.

Reprenons l'équation (3), et faisons dans cette équation $\alpha = 0$, il viendra

$$d.(\mathrm{R}\rho\sin\varphi) \mp \mathrm{R}\rho\cos\varphi ds = 0,$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris suivant que φ va en diminuant ou en augmentant pour un déplacement fait sur la chaîne dans le sens des s positifs; mais on a évidemment

$$ds = \mp\rho d\varphi,$$

le signe étant déterminé de la même manière; donc l'équation ci-dessus revient à

$$d.\mathrm{R}\rho\sin\varphi + \mathrm{R}\rho\cos\varphi d\varphi = 0;$$

d'ailleurs

$$\varphi = \theta, \quad \text{ou} \quad \varphi = 2\pi - \theta;$$

substituant, on trouve l'équation (5), qui se trouve ainsi établie pour tous les cas.

Développons l'équation (5), il viendra

$$\sin\theta d.\mathrm{R}\rho + 2\mathrm{R}\rho\cos\theta d\theta = 0.$$

d'où, intégrant,

$$R\rho \sin^2\theta = C. \tag{6}$$

Faisons maintenant quelques hypothèses sur R; posons en premier lieu

$$R = a \sin^m \theta \text{ [*]},$$

l'équation (6) deviendra

$$\rho \sin^{m+2}\theta = \frac{C}{a} = C'; \tag{7}$$

mais

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{d\theta} = \frac{dx}{\cos\theta\, d\theta},$$

en remarquant que

$$y' = \operatorname{tang}\theta,$$

donc

$$\frac{dx}{C'} = \sin^{-(m+2)}\theta \cos\theta\, d\theta,$$

et, intégrant,

$$-\frac{(m+1)x}{C'} = \frac{x}{x_0} = \sin^{-(m+1)}\theta.$$

On ne met pas la constante qu'il serait toujours possible de faire disparaître en portant l'axe des y parallèlement à lui-même.

Remplaçant enfin $\sin\theta$ par sa valeur $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, il vient

$$\frac{x}{x_0} = \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^{-(m+1)},$$

d'où

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{m+1}} - 1}}. \tag{8}$$

---

[*] On a cette expression de la force quand on considère une voile flexible de forme rectangulaire dont deux côtés opposés sont fixes, et que l'on suppose la pression du vent en mouvement sur un élément fixe d'une surface, proportionnelle à l'étendue de cette surface et à la puissance m de la vitesse du vent estimée dans le sens de la normale à cet élément.

Ainsi nous obtenons les courbes que nous avons considérées dans un autre article [*], et qui jouissent de plusieurs propriétés remarquables.

On peut déduire de là quelques résultats connus. Si l'on fait $m = 0$, la force R est constante, et l'équation (8) est celle d'une chaînette. Si $m = 1$, la force R est en raison directe du sinus de l'angle que fait avec l'axe des x la tangente de la courbe au point où elle est appliquée; en d'autres termes, les forces qui sollicitent les éléments de la chaîne sont proportionnelles aux projections de ces éléments sur l'axe des y, et dans ce cas, l'équation (8) représente une parabole qui est bien, en effet, la courbe des ponts suspendus, etc.

L'équation (8) se présente sous une forme illusoire quand $m = -1$; pour ce cas, qui est celui où la composante de la force donnée, normale à la courbe d'équilibre de la chaîne, est constante, il faut remonter à l'équation (7); on obtient ainsi

$$\rho \sin\theta = C',$$

où, en substituant à ρ sa valeur en fonction de θ,

$$\frac{dx}{C'} = \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta},$$

d'où, intégrant deux fois sans mettre les constantes qu'il est toujours possible de faire disparaître en portant les axes parallèlement à eux-mêmes,

$$e^{\frac{x}{C'}} = \cos\frac{y}{C'};$$

changeant les axes de manière que la partie positive des x et la partie positive des y deviennent respectivement la partie négative des y et la partie positive des x, il viendra

$$e^{\frac{y}{C'}} \cos\frac{x}{C'} = 1.$$

C'est le résultat auquel on arrive quand on cherche l'équation de la chaînette d'égale résistance, ainsi que l'a fait voir Coriolis, à la page 57 du tome I^er de ce Journal.

Si au lieu de supposer la force R simplement proportionnelle à une

---

[*] Voyez le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome IX, page 97.

puissance de sin θ, on la suppose proportionnelle à une puissance de sin θ et à une puissance de ρ, on trouve encore les courbes (8). En effet, on a alors

$$\mathrm{R} = a \sin^m \theta \, \rho^n,$$

et l'équation (6) devient

$$\rho^{n+1} \sin^{m+2} \theta = \frac{\mathrm{C}}{a} = \mathrm{C}',$$

ou

$$\rho \sin^{\frac{m+2}{n+1}} \theta = \mathrm{C}'^{\frac{1}{n+1}} = \mathrm{C}'',$$

d'où, intégrant comme plus haut,

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2(n+1)}{m-n+1}} - 1}}.$$

Supposons encore la force R proportionnelle à une puissance quelconque de $\cos\theta$, de telle sorte que

$$\mathrm{R} = a \cos^m \theta,$$

l'équation (6) deviendra

$$\rho \sin^2 \theta \cos^m \theta = \frac{\mathrm{C}}{a} = \mathrm{C}',$$

d'où l'on tire aisément

$$\frac{dx}{\mathrm{C}'} = \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \cos^{m-1} \theta}.$$

Si en particulier $m = 1$, auquel cas la force R a une intensité qu'il est facile d'interpréter, l'équation précédente donne

$$x \operatorname{tang} \theta = x \frac{dy}{dx} = - \mathrm{C}',$$

en ne mettant pas la constante, d'où, intégrant,

$$y = - \mathrm{C}' \, lx,$$

ce qui est assez remarquable.

IV.

Sans nous arrêter à faire un plus grand nombre d'applications du cas où la force R est toujours parallèle à la même direction, cas pour lequel, nous devons le dire, il est presque toujours plus simple d'opérer directement et sans passer par l'équation (5), passons à d'autres hypothèses sur la direction de la force.

Supposons que l'angle θ que fait la force R avec la tangente à la courbe d'équilibre soit constant, l'équation (5) deviendra

$$d.\mathrm{R}\rho + \mathrm{R}\cot\theta\, ds = 0;$$

mais φ étant toujours l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x, on a

$$ds = \pm\, \rho\, d\varphi,$$

le signe étant facile à déterminer; l'équation précédente revient donc à

$$d.\mathrm{R}\rho \pm \mathrm{R}\rho\cot\theta\, d\varphi = 0,$$

d'où, intégrant,

$$\mathrm{R}\rho = \mathrm{C}e^{m\varphi}, \tag{9}$$

en posant, pour simplifier,

$$\mp \cot\theta = m.$$

Faisons maintenant quelques hypothèses sur R. Supposons d'abord R constant; l'équation (9) se réduira alors à

$$\rho = \mathrm{C}' e^{m\varphi}. \tag{10}$$

Toutes les courbes comprises dans cette dernière équation ont leurs développées semblables à elles-mêmes. En effet, de cette équation on tire

$$d\rho = m\mathrm{C}' e^{m\varphi}\, d\varphi = m\rho\, d\varphi,$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = m\rho.$$

Or $\pm \frac{d\rho}{d\varphi}$ est le rayon de courbure de la développée de la courbe, et l'équation précédente montre que cette quantité est proportionnelle au rayon de courbure.

On sait que les spirales logarithmiques jouissent de la propriété dont il s'agit; je dis, de plus, que les spirales logarithmiques sont les seules courbes comprises dans l'équation (10).

En effet, substituant à ρ sa valeur, cette équation donne

$$dx = \pm C' \cos\varphi e^{m\varphi} d\varphi,$$

et par conséquent

$$dy = \pm C' \sin\varphi e^{m\varphi} d\varphi;$$

d'où, intégrant par parties,

$$x = \pm C' \frac{e^{m\varphi}(\sin\varphi + m\cos\varphi)}{1+m^2},$$

$$y = \pm C' \frac{e^{m\varphi}(m\sin\varphi - \cos\varphi)}{1+m^2},$$

en laissant de côté les constantes qu'il est toujours possible de faire disparaître.

Pour éliminer φ entre les deux équations précédentes, divisons-les l'une par l'autre, il viendra

$$\frac{y}{x} = \frac{m\sin\varphi - \cos\varphi}{\sin\varphi + m\cos\varphi} = \frac{m\operatorname{tang}\varphi - 1}{\operatorname{tang}\varphi + m},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x+my}{mx-y} = \frac{\frac{1}{m}+\frac{y}{x}}{1-\frac{1}{m}.\frac{y}{x}};$$

partant dans la valeur de x^2+y^2, en se rappelant que

$$m = \mp \cot\theta,$$

et en posant

$$\sqrt{x^2+y^2} = r, \quad \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \omega,$$

on trouve, toutes réductions faites,

$$r = \mathrm{A} e^{m(\omega\mp\theta)}.$$

On arriverait à une conséquence analogue si l'on posait

$$R = ae^{n\varphi}.$$

On pourrait faire d'autres hypothèses sur R qui conduiraient à des résultats plus ou moins curieux.

V.

Supposons maintenant que la force R passe constamment par un même point que nous supposerons être l'origine des coordonnées, l'angle que fait la force R avec la partie positive de l'axe des x, et que nous avons représenté dans le § I^{er} par α, sera égal, dans ce cas, à l'azimut du point où la force est appliquée, ou à cet azimut augmenté de 180 degrés. Ainsi, représentant l'azimut d'un point quelconque par ω, nous aurons

$$\alpha = \omega, \quad \text{ou} \quad \alpha = 180° + \omega,$$

d'où, dans tous les cas,

$$d\alpha = d\omega.$$

Reprenons maintenant l'équation (4), et remplaçons dans cette équation ds par sa valeur $\mp \rho\, d\varphi$, il viendra

$$d(R\rho \sin\theta) \mp R\rho\cos\theta\, d\varphi = 0,$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris selon que l'angle φ va en diminuant ou en augmentant pour un déplacement infiniment petit fait dans le sens des s positifs; mais on a, ainsi qu'on l'a vu dans le § I^{er},

$$\sin(\alpha - \varphi) = \pm \sin\theta, \quad \cos(\alpha - \varphi) = \cos\theta,$$

d'où

$$d\alpha - d\varphi = d\omega - d\varphi = \pm\, d\theta,$$

le signe des seconds membres étant déterminé de la même manière; on a donc

$$d(R\rho\sin\theta) + R\rho\cos\theta\, d\theta \mp R\rho\cos\theta\, d\omega = 0,$$

le signe $\mp$ étant toujours déterminé comme il a été dit. De là on déduit

$$\sin\theta\, d.R\rho + 2R\rho\cos\theta\, d\theta \mp R\rho\cos\theta\, d\omega = 0,$$

d'où

$$\frac{d.R\rho}{R\rho} = \frac{-2\cos\theta\, d\theta \pm \cos\theta\, d\omega}{\sin\theta}. \tag{11}$$

Cette équation sera principalement utile pour faire connaître la force, quand la courbe d'équilibre de la chaîne sera donnée. Faisons quelques applications.

Supposons la courbe d'équilibre telle que θ soit constant; et cherchons d'abord l'équation de cette courbe. Pour cela, remarquons qu'ayant

$$\sin(\alpha - \varphi) = \pm \sin\theta, \quad \cos(\alpha - \varphi) = \cos\theta,$$

comme il a été dit dans le § I^{er}, on a aussi

$$\operatorname{tang}(\alpha - \varphi) = \pm \operatorname{tang}\theta,$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang}(\omega - \varphi) = \pm \operatorname{tang}\theta,$$

puisque $\alpha = \omega$ ou $= 180^\circ + \omega$. Mais r étant le rayon vecteur correspondant à l'azimut ω, on a

$$\operatorname{tang}(\omega - \varphi) = -\frac{r\,d\omega}{dr};$$

donc

$$\frac{r\,d\omega}{dr} = \mp \operatorname{tang}\theta,$$

le signe étant toujours déterminé de la même manière; de là nous tirons, en intégrant,

$$r = Ce^{\mp \cot\theta\,\omega} \tag{12}$$

pour l'équation de la courbe cherchée.

Maintenant, θ étant constant, l'équation (11) devient

$$\frac{dR\rho}{R\rho} = \pm \cot\theta\, d\omega,$$

d'où, intégrant,

$$R\rho = C'e^{\pm \cot\theta\omega};$$

d'ailleurs, de l'équation (12) on tire le rayon de courbure

$$\rho = \frac{r}{\sin\theta} = \frac{C}{\sin\theta}\, e^{\mp \cot\theta\omega};$$

on a donc

$$R = C' \sin\theta\, e^{\pm 2\cot\theta\omega} = \frac{C''}{r^2}$$

pour la force cherchée.

Supposons, en second lieu, la courbe d'équilibre telle que

$$\mp d\theta = m d\omega,$$

ou

$$\frac{\pi}{2} \mp \theta = m\omega,$$

en prenant l'axe polaire convenablement, et le signe étant déterminé comme plus haut; l'équation polaire de la courbe considérée sera, en se rappelant que l'on a, en général,

$$r\frac{d\omega}{dr} = \mp \operatorname{tang}\theta,$$

ainsi qu'on l'a déjà fait voir,

$$r\frac{d\omega}{dr} = -\cot m\omega;$$

d'où, intégrant,

$$(13) \qquad r^m = a^m \cos m\omega.$$

Maintenant, dans l'hypothèse actuelle, l'équation (11) devient

$$\frac{d.R\rho}{R\rho} = \pm\frac{(2m+1)\cos\theta\, d\omega}{\sin\theta} = \frac{(2m+1)\sin m\omega\, d\omega}{\cos m\omega},$$

d'où, intégrant,

$$R\rho \cos^{\frac{2m+1}{m}} m\omega = C;$$

d'ailleurs, de l'équation (13) on tire le rayon de courbure

$$\rho = \frac{a}{m+1}(\cos m\omega)^{\frac{1}{m}-1};$$

on a donc

$$R = C'\cos^{-\frac{m+2}{m}} m\omega = C'' r^{-(m+2)}$$

pour la force cherchée.

VI.

Nous avons toujours supposé jusqu'ici que la figure d'équilibre de la chaîne était une courbe plane ; si, en vertu de la nature de la force R et de la position des points fixes A et B, la figure d'équilibre est une courbe à double courbure, on remarquera que la projection sur un plan quelconque de cette courbe à double courbure peut être considérée comme la figure d'équilibre d'une chaîne dont les éléments sont sollicités par les composantes parallèles au plan de projection des forces qui agissent sur la première chaîne, ainsi qu'on le reconnaît aisément, soit au moyen des trois équations (1), soit en employant immédiatement les théorèmes élémentaires sur la composition des forces. Cela étant, on pourra toujours, en opérant comme au § I^{er}, mettre l'équation des projections sur les plans coordonnés de la courbe d'équilibre d'une chaîne quelconque, sous la forme de l'équation (4), et conclure ensuite, dans plusieurs cas, soit les projections de la figure d'équilibre de la chaîne, la force étant donnée, soit inversement la force quand on connaîtra les projections de la figure d'équilibre.

VII.

Considérons le mouvement dans l'espace d'un point matériel quelconque; soient x, y, z les coordonnées de ce point au bout du temps t, R l'intensité de la force qui le sollicite, et enfin α, β, γ les angles que la direction de la force R fait avec les parties positives des axes des coordonnées : on aura, comme l'on sait, les trois équations

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{R}\cos\alpha, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{R}\cos\beta. \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{R}\cos\gamma. \end{aligned}\right.$$

Si le mouvement a lieu dans un plan, on pourra prendre les axes des coordonnées dans ce plan, et alors, il suffira de considérer les deux premières des équations (14). C'est ce cas que nous examinerons d'abord.

Appelons v la vitesse du mobile au bout du temps t, θ l'angle que fait avec la direction de la force R la tangente de la trajectoire au point x, y, z, prolongée dans le sens du mouvement, et enfin ρ le rayon de courbure de la trajectoire au même point. On pourra, comme l'on sait, remplacer les équations du mouvement par les suivantes :

$$\frac{v^2}{\rho} = \mathrm{R}\sin\theta, \quad \frac{dv}{dt} = \mathrm{R}\cos\theta.$$

De la première équation nous déduisons

$$d(\mathrm{R}\rho\sin\theta) = 2v\,dv,$$

les différentielles se rapportant, dans cette dernière équation comme dans l'avant-dernière, à un déplacement infiniment petit effectué dans le sens du mouvement; mais s étant l'arc de la trajectoire compté à partir d'un point fixe dans le même sens, on a

$$v = \frac{ds}{dt};$$

l'équation précédente revient donc à

$$d(\mathrm{R}\rho\sin\theta) - 2\frac{dv}{dt}\,ds = 0,$$

ou, d'après une de celles écrites plus haut,

$$(15) \qquad d(\mathrm{R}\rho\sin\theta) - 2\mathrm{R}\cos\theta\,ds = 0,$$

équation qui représente la trajectoire du mobile.

Si nous comparons l'équation (15) à l'équation (4), nous remarquons une certaine analogie: les premiers termes sont les mêmes dans les deux équations, et le second terme, dans la première équation, est égal au double changé de signe du second terme dans la seconde. Nous déduisons de là une conséquence remarquable : concevons qu'ayant décomposé la force R en une force normale et une force tangentielle, on prenne chacune de ces composantes en sens inverse, en réduisant à moitié la composante normale; appelons R′ la résultante de ces deux nouvelles forces, et θ' l'angle que fait la force R′ avec la tangente à la trajectoire prolongée dans le sens du mouvement, nous aurons

$$\mathrm{R}\sin\theta = 2\mathrm{R}'\sin\theta', \quad \mathrm{R}'\cos\theta' = -\mathrm{R}\cos\theta,$$

d'où, substituant dans l'équation (15),

$$d(R'\rho\sin\theta') + R'\cos\theta'\,ds = 0.$$

Cette équation coïncide avec l'équation (4); nous pouvons donc dire : « La trajectoire que décrit un mobile sous l'action de la force R, » est la courbe d'équilibre d'une chaîne dont chaque élément est sol- » licité par une force qui se déduit de R en prenant en sens inverse » les composantes normale et tangentielle de cette force et réduisant » à moitié la composante normale. » Il est bien entendu que la chaîne doit, en outre, être assujettie à passer par deux points de la trajectoire et à avoir pour longueur entre ces deux points la longueur de l'arc de la courbe compris entre les mêmes points.

Après avoir pris en sens inverse les composantes normale et tangentielle de la force P, on pourrait, au lieu de réduire à moitié la composante normale, doubler la composante tangentielle, et l'on arriverait encore à la même conséquence.

On peut présenter le résultat précédent sous une forme inverse et dire : « Si une courbe plane quelconque est la figure d'équilibre d'une » chaîne dont chaque élément est soumis à l'action de la force R, la » même courbe sera la trajectoire d'un mobile sollicité par une force » que l'on déduit de R en prenant en sens inverse ses composantes » normale et tangentielle à la courbe et doublant la composante nor- » male ou réduisant à moitié la composante tangentielle. » Il est encore bien entendu ici que les circonstances initiales du mouvement du mobile doivent être convenablement choisies : ainsi, il faut, comme on le reconnaît aisément, que le point de départ du mobile soit à l'extrémité de la chaîne, que sa vitesse initiale soit dirigée suivant la tangente de la chaîne à cette extrémité, et enfin que le carré de sa vitesse initiale, divisé par la composante normale de la force qui le sollicite à l'origine du mouvement, soit égal au rayon de courbure de la chaîne à la même extrémité.

VIII.

La remarque que nous venons de faire dans le paragraphe précédent, établissant une certaine relation entre l'équilibre et le mouvement, pourra être utile dans plusieurs circonstances. On peut s'en servir, par exemple, pour démontrer d'une manière très-simple le théorème que nous avons fait connaître à la page 113 de ce volume, et qui s'énonce ainsi :

« Si un mobile successivement soumis à l'action des forces F, F′, F″,...
» et partant toujours du point A avec des vitesses v_0, v'_0, v''_0,... de
» même direction, mais d'intensités différentes, décrit la même courbe
» AMB, le même mobile partant du point A avec la vitesse V_0 et soumis
» à l'action de la résultante des forces F, F′, F″,... décrira encore la
» courbe AMB, pourvu que la vitesse V_0 ait la même direction que les
» vitesses v_0, v'_0,... et que son intensité soit telle que

$$V_0^2 = v_0^2 + {v'_0}^2 + {v''_0}^2 + \ldots. \text{ »}$$

En effet, soient T et N les composantes tangente et normale à la courbe AMB de la force F; T′ et N′ les composantes analogues de la force F′, et ainsi de suite. Si aux différents points d'une chaîne on applique, dans des sens respectivement opposés à ceux des composantes de la force F, une force T et une force $\frac{N}{2}$, cette chaîne aura pour figure d'équilibre la courbe AMB; il en sera de même si l'on applique à chaque élément de la chaîne la force T′ et la force $\frac{N'}{2}$ dans des sens respectivement opposés à ceux des composantes de la force F′, et ainsi de suite; donc il en sera de même aussi si l'on applique à chaque élément de la chaîne la résultante des forces T, T′, T″,... et la résultante des forces $\frac{N}{2}, \frac{N'}{2}, \frac{N''}{2},\ldots$ prises comme il a été dit; de là résulte que si l'on soumet un mobile à l'action de la résultante des composantes tangentes T, T′, T″,... et de la résultante des composantes normales N, N′, N″,... des forces F, F′, F″,...; ou, ce qui revient au même, à l'action de la résultante des forces F, F′, F″,..., ce mobile décrira la courbe AMB, pourvu toutefois que son point de départ soit en A, que sa vitesse initiale V_0 soit dirigée suivant la tangente en A à la courbe AMB, ou, en d'autres termes, comme le sont les vitesses v_0, v'_0, v''_0,..., et enfin que le carré de la vitesse V_0 soit égal à la somme des composantes normales N, N′, N″,... multipliée par le rayon de courbure de AMB au point A, ou, ce qui revient au même, à la somme des carrés des vitesses v_0, v'_0, v''_0,....

On peut rendre la démonstration précédente indépendante de la remarque du § VII. En effet, conservant nos notations, nous voyons qu'en vertu de l'hypothèse, les équations

$$d(\mathrm{N}\rho) - 2\mathrm{T}\,ds = 0,\quad d(\mathrm{N}'\rho) - 2\mathrm{T}'\,ds = 0,\quad d(\mathrm{N}''\rho) - 2\mathrm{T}''\,ds = 0,\ldots,$$

sont toutes vérifiées pour la courbe AMB; il en est donc de même de leur somme, c'est-à-dire de

$$d.[(\mathrm{N} + \mathrm{N}' + \mathrm{N}'' + \ldots)\rho] - 2(\mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' + \ldots)\,ds = 0.$$

Mais cette dernière équation comprend celle de la trajectoire du mobile dans le mouvement composé; donc si AMB satisfait, en outre, aux circonstances initiales du mouvement qui déterminent les constantes, cette courbe sera la trajectoire dont il s'agit. Or, comme on l'a vu dans la démonstration précédente, les conditions initiales se trouvent remplies si les relations entre les vitesses initiales qu'exige l'énoncé le sont elles-mêmes.

Les deux démonstrations que nous venons de donner supposent que la trajectoire soit plane; mais on passe aisément de ce cas au cas général, ainsi qu'on le verra plus bas.

IX.

L'équation (15) peut servir à déterminer assez simplement, dans bien des cas, la trajectoire décrite par un mobile, connaissant la force qui le sollicite; ou, inversement, à déterminer cette force, la trajectoire étant connue. Faisons quelques applications.

Supposons la force R qui sollicite le mobile toujours parallèle à la même direction, à l'axe des x par exemple; nous aurons alors

$$ds = -\rho\,d\theta,$$

ainsi qu'on le voit aisément en examinant tous les cas qui peuvent se présenter, et l'équation (15) deviendra

$$d(\mathrm{R}\rho\sin\theta) + 2\mathrm{R}\rho\cos\theta\,d\theta = 0,$$

ou

$$\sin\theta\,d.\mathrm{R}\rho = -3\mathrm{R}\rho\cos\theta\,d\theta;$$

d'où, intégrant,

$$R\rho \sin^3 \theta = C.$$

Soit maintenant

$$R = a \sin^m \theta,$$

il viendra

$$\rho \sin^{m+3} \theta = \frac{C}{a} = C',$$

d'où, intégrant, comme au § III,

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{m+2}} - 1}}.$$

Si l'on suppose $m = 0$, c'est-à-dire la force R constante, l'équation précédente devient celle d'une parabole, ce qui doit être. Si $m = -1$, c'est-à-dire si la composante normale de la force R est constante, l'équation représente une chaînette, etc. Pour $m = -2$, l'équation précédente se présente sous une forme illusoire; mais pour ce cas, comme on l'a vu au § III, on doit prendre l'équation

$$e^{\frac{x}{C'}} = \cos \frac{y}{C'}.$$

On pourrait supposer la force R proportionnelle à une puissance de ρ et à une puissance de $\sin \theta$ ou à une puissance de $\cos \theta$; on trouverait pour tous ces cas des résultats analogues à ceux du § III.

Admettons, en second lieu, que la force R fasse toujours le même angle avec la tangente à la trajectoire, θ sera alors constant, et l'équation (15) deviendra

$$d.R\rho = 2R \cot \theta \, ds,$$

ou, en remarquant que

$$ds = \pm \rho d\varphi,$$

φ représentant, comme plus haut, l'angle que fait avec la partie positive de l'axe des x la tangente à la trajectoire,

$$d.R\rho = \pm 2R\rho \cot \theta \, d\varphi,$$

d'où, intégrant,

$$R\rho = Ce^{\pm 2\varphi \cot \theta}.$$

Si P est constant, on trouvera une spirale logarithmique, comme au § III; il en sera de même si l'on pose

$$R = Ce^{n\varphi}, \text{ etc.}$$

On peut enfin supposer que R soit une force centrale; alors l'équation (15) est principalement utile pour faire connaître la force, la trajectoire étant donnée; mais l'équation que l'on obtient est beaucoup moins commode que celle qu'on possède pour le même objet. Du reste, cette équation conduit à des résultats analogues à ceux du § V; ainsi elle montre que les courbes

$$r^m = a^m \cos m\theta$$

sont décrites par des forces centrales proportionnelles à la puissance $-(2m+3)$ de la distance, etc.

X.

Nous avons supposé jusqu'ici que la trajectoire décrite par le mobile était plane; si cette trajectoire est à double courbure, on remarquera que, ainsi que cela résulte des équations (14) du mouvement d'un point quelconque, la trajectoire à double courbure décrite par un mobile sous l'action d'une force R, a toujours pour projection sur chacun des plans coordonnés, la trajectoire que décrit un mobile soumis à l'action de la composante de R parallèle à ce plan; bien entendu que si la coordonnée perpendiculaire au plan de projection entre dans l'expression de cette composante, on la remplace par sa valeur en fonction de l'une des deux autres coordonnées, valeur qui doit dès lors être connue. Cela étant, on pourra mettre sous la forme (15) les équations des projections de la trajectoire, et employer ensuite, comme on l'a vu, ces équations pour déterminer la trajectoire connaissant la force, ou surtout, réciproquement, pour trouver la force quand on connaîtra la trajectoire. On voit aussi, d'après la même remarque, comment on pourra étendre le théorème démontré au § VIII, au cas où la trajectoire sera à double courbure. En effet, si les forces F, F', F'',... agissant séparément font décrire à un mobile la même courbe à double courbure AMB, les composantes de ces forces parallèles à un quelconque des plans coordonnés et exprimées en fonction des coordonnées relatives à ce plan, agissant séparément, feront aussi décrire la même courbe plane A′M′B′ projection de AMB sur le plan considéré; donc la relation hypothétique entre les vitesses initiales étant satisfaite, la résultante des composantes des forces F, F′,... exprimées en fonction de deux coordonnées, fera aussi décrire la courbe plane A′M′B′; cela ayant lieu pour les trois plans des coordonnées, on voit, par un raisonnement assez simple, que la courbe à double courbure AMB sera décrite par le mobile sous l'action de la résultante des forces F, F′, F″,....

ADDITION.

J'ai fait voir, à la fin du § III de la Note précédente, que la figure d'équilibre de la chaînette d'égale résistance n'est autre chose que la courbe qu'affecte, dans l'état d'équilibre, une chaîne dont les divers éléments sont sollicités par des forces de direction constante et d'une intensité telle que la composante normale à la chaîne soit constante. Ce résultat est susceptible d'une extension assez remarquable : « La » figure d'équilibre d'une chaîne d'égale résistance, et dont les élé- » ments sont soumis à l'action d'une force centrale proportionnelle » à la distance, n'est autre chose que la courbe qu'affecte, dans l'état » d'équilibre, une chaîne dont les divers éléments sont sollicités par » une force centrale d'une intensité telle que la composante normale » à la chaîne soit constante. »

En effet, adoptant les notions ordinaires et prenant pour origine le centre des forces agissant sur les éléments de la chaîne, on trouve aisément pour les équations de la dernière courbe

$$T\frac{r^2 d\theta}{ds} = C, \quad dT + R\,dr = 0,$$

avec la condition

$$\frac{R\,r\,d\theta}{ds} = a;$$

éliminant R et T entre ces trois équations, il vient

$$d.\frac{ds}{r^2 d\theta} + \frac{a}{C}\frac{ds}{d\theta}\frac{dr}{r} = 0,$$

d'où, développant en prenant θ pour variable indépendante,

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} - 2\frac{ds}{d\theta}\frac{dr}{rd\theta} + \frac{a}{C}\frac{ds}{d\theta}\frac{rdr}{d\theta} = 0,$$

ou

$$\frac{\frac{d^2 s}{d\theta^2}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{2dr}{rd\theta} - \frac{a}{C}\frac{rdr}{d\theta},$$

et, intégrant,

$$\frac{ds}{r^2 d\theta} = C' e^{-\frac{a}{2C}r^2},$$

d'où, enfin,

$$\theta + \alpha = \int \frac{dr}{r\sqrt{C'^2 r^2 e^{-\frac{a}{C}r^2} - 1}}.$$

Il est facile de voir maintenant que cette équation coïncide avec celle que l'on obtient en posant $R = r$ dans l'équation (3) de la page 98 de ce volume : or cette dernière équation représente la courbe d'équilibre d'une chaîne d'égale résistance soumise à l'action de la force centrale R ; cela prouve ce que nous avions avancé.