JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACOBI

Mémoire sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 313-333.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__313_0>

MÉMOIRE
SUR L'ÉLIMINATION DES NOEUDS
DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. JACOBI [*].

Les illustres géomètres du siècle passé, en traitant le problème des trois corps, ont cherché le mouvement de deux d'entre eux autour du troisième ou autour du centre de gravité de tous les trois. Mais, en réduisant de cette manière le problème de trois corps qui s'attirent mutuellement à un problème de deux corps qui se meuvent autour d'un point fixe, on fait perdre aux équations différentielles du problème cette forme précieuse dont elles jouissent dans leur état primitif, savoir, que les secondes différentielles des coordonnées soient égalées aux dérivées d'une même fonction. C'est par cette raison que les principes de la conservation des forces vives et des aires cessent d'avoir lieu par rapport aux deux corps. On pourra cependant éviter cet inconvénient en agissant de la manière suivante :

Supposons, pour plus de généralité, que le système se compose de n corps, du Soleil et de $n-1$ planètes. Comme il est permis de supposer que son centre de gravité reste en repos, on aura une équation linéaire entre chacun des trois systèmes de coordonnées du même nom. Donc les n coordonnées parallèles à un même axe pourront être exprimées linéairement par $n-1$ autres quantités, en établissant $n-1$

[*] Cet article est extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (séance du 8 août 1842).

équations de condition entre les $n(n-1)$ constantes qui entrent dans ces n expressions linéaires. Comme on peut disposer encore d'un nombre $(n-1)^2$ de constantes, on les déterminera de manière que, dans l'expression de la force vive du système, s'évanouissent les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ produits des différentielles premières des nouvelles variables. En se servant de formules parfaitement semblables pour chaque système de coordonnées du même nom, et en considérant les nouvelles variables comme les coordonnées de $n-1$ autres corps, *on aura réduit de cette manière la force vive du système des n corps proposés à celle d'un système de $n-1$ corps,* des masses convenables étant attribuées à ces derniers. Il y aura même dans les formules de réduction un nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ de constantes arbitraires et dont on pourra profiter de différentes manières.

D'après ce qu'on vient de dire, le principe de la conservation des forces vives donnera une équation dans laquelle la somme des forces vives des $n-1$ corps fictifs sera égalée à une fonction de leurs coordonnées. En se servant des règles générales de Lagrange, on en déduira, par de simples différentiations partielles, les équations différentielles du problème réduit, et l'on reconnaîtra aisément que la conservation des aires a lieu dans le mouvement des $n-1$ corps par lesquels on a remplacé le système proposé. Ces $n-1$ corps ne s'écartent d'ailleurs des $n-1$ planètes que de petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices, de manière que la première approximation peut être la même pour les uns et pour les autres. Le changement que, dans cette analyse, doit subir l'expression de la force perturbatrice n'augmente pas la difficulté de son développement.

En appliquant la méthode que je viens d'exposer au problème des trois corps, on réduit celui-ci à un problème du mouvement de deux corps qui jouit de propriétés remarquables. En effet, les trois équations fournies par la conservation des aires font voir :

1°. Que l'intersection commune des plans des orbites des deux corps reste constamment dans un plan fixe : c'est le plan invariable du système;

2°. Que les inclinaisons des plans des deux orbites à ce plan fixe et les paramètres de ces orbites regardées comme des ellipses variables, sont quatre éléments, dont deux quelconques déterminent rigoureusement les deux autres.

Choisissons pour variables du problème les inclinaisons des deux orbites au plan invariable, les deux rayons vecteurs, les angles qu'ils forment avec l'intersection commune des plans des deux orbites, enfin l'angle que forme cette intersection située, comme on a vu, dans le plan invariable, avec une droite fixe de ce plan. On trouvera *que ce dernier angle disparaît entièrement du système des équations différentielles et se détermine après leur intégration par une quadrature.* Donc, dans cette nouvelle forme des équations différentielles n'entre aucune trace des nœuds. Les six équations différentielles du second ordre, qui expriment le mouvement relatif des trois corps, s'y trouvent réduites à cinq équations du premier ordre et une seule du second. Par suite, l'on a fait cinq intégrations. Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra donc dire que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde. Je dis dans le système du monde, puisque la même méthode s'applique à un nombre quelconque de corps.

ANALYSE.

1. Soient m la masse du Soleil, m_1 et m_2 celles des deux planètes; soient $\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ les coordonnées rectangulaires des trois corps m, m_1, m_2, rapportées à leur centre de gravité. Comme on a les trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 &= 0,\\ m\eta + m_1\eta_1 + m_2\eta_2 &= 0,\\ m\zeta + m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 &= 0,\end{aligned}\right.$$

il sera permis de faire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta x_1, & \eta &= \alpha y + \beta y_1, & \zeta &= \alpha z + \beta z_1,\\ \xi_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \eta_1 &= \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & \zeta_1 &= \alpha_1 z + \beta_1 z_1,\\ \xi_2 &= \alpha_2 x + \beta_2 x_1, & \eta_2 &= \alpha_2 y + \beta_2 y_1, & \zeta_2 &= \alpha_2 z + \beta_2 z_1,\end{aligned}\right.$$

les six constantes α, β, etc., devant satisfaire aux deux conditions

$$(3) \qquad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Supposons de plus que, par les substitutions (2), la somme des forces vives du système $2\mathrm{T}$ se change en cette expression

$$(4) \qquad \begin{cases} 2\mathrm{T} = \mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad + \mu_1\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right], \end{cases}$$

on aura les trois équations

$$(5) \qquad \begin{cases} \mu = m\alpha\alpha + m_1\alpha_1\alpha_1 + m_2\alpha_2\alpha_2, \\ \mu_1 = m\beta\beta + m_1\beta_1\beta_1 + m_2\beta_2\beta_2, \\ 0 = m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2. \end{cases}$$

J'observe qu'en vertu des formules (3) on peut faire

$$(6) \qquad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \varepsilon.m, \quad \alpha_2\beta - \alpha\beta_2 = \varepsilon.m_1, \quad \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \varepsilon.m_2,$$

ε étant un facteur indéterminé. Des formules (5) et (6) on tire aussi celle-ci :

$$(7) \qquad \mu\mu_1 = mm_1m_2 + (m + m_1 + m_2)\varepsilon\varepsilon.$$

Si l'on fait

$$(8) \qquad \begin{cases} xx + yy + zz = rr, \\ x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = r_1r_1, \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 = rr_1\cos\mathrm{V}, \end{cases}$$

on aura

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho\rho = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ \quad = \gamma^2 rr + 2\gamma\delta rr_1\cos\mathrm{V} + \delta^2 r_1r_1, \\ \rho_1\rho_1 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2 \\ \quad = \gamma_1^2 rr + 2\gamma_1\delta_1 rr_1\cos\mathrm{V} + \delta_1^2 r_1r_1, \\ \rho_2\rho_2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 \\ \quad = \gamma_2^2 rr + 2\gamma_2\delta_2 rr_1\cos\mathrm{V} + \delta_2^2 r_1r_1, \end{cases}$$

où l'on a mis, pour plus de simplicité,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} \gamma = \alpha_1 - \alpha_2, & \delta = \beta_1 - \beta_2, \\ \gamma_1 = \alpha_2 - \alpha, & \delta_1 = \beta_2 - \beta, \\ \gamma_2 = \alpha - \alpha_1, & \delta_2 = \beta - \beta_1, \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{U} = \frac{m m_1}{\rho_2} + \frac{m m_2}{\rho_1} + \frac{m_1 m_2}{\rho} = \sum \frac{m_1 m_2}{\rho},$$

le principe des forces vives fournit l'équation

$$(12)\quad \mathrm{T} = \mathrm{U} - h = \sum \frac{m_1 m_2}{\rho} - h,$$

h étant une constante arbitraire. Or, si dans cette équation l'on substitue les valeurs des quantités T, ρ, ρ_1, ρ_2 tirées des formules (4) et (9), on aura tout de suite, par les règles générales données par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*,

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \gamma(\gamma x + \delta x_1)}{\rho^3} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dx}, \\ \mu \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \gamma(\gamma y + \delta y_1)}{\rho^3} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dy}, \\ \mu \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \gamma(\gamma z + \delta z_1)}{\rho^3} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dz}, \\ \mu_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \delta(\gamma x + \delta x_1)}{\rho^3} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dx_1}, \\ \mu_1 \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \delta(\gamma y + \delta y_1)}{\rho^3} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dy_1}, \\ \mu_1 \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = -\sum \dfrac{m_1 m_2 \delta(\gamma z + \delta z_1)}{\rho^3} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dz_1}. \end{array}\right.$$

On tire de ces formules les suivantes :

$$(14)\quad \begin{cases} \mu\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-\mu_1\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) \\ \qquad\qquad = -(yz_1-zy_1)\sum\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}, \\ \mu\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=-\mu_1\left(z_1\frac{d^2x_1}{dt^2}-x_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) \\ \qquad\qquad = -(zx_1-xz_1)\sum\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}, \\ \mu\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=-\mu_1\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right) \\ \qquad\qquad = -(xy_1-yx_1)\sum\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}. \end{cases}$$

Ces équations donnent les trois intégrales

$$(15)\quad \begin{cases} \mu\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\mu_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)=c, \\ \mu\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\mu_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right)=c_1, \\ \mu\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\mu_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right)=c_2, \end{cases}$$

c, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires. Je remarque à cette occasion les formules

$$(16)\quad \begin{cases} \mu\left(y_1\frac{d^2z}{dt^2}-z_1\frac{d^2y}{dt^2}\right)=(yz_1+zy_1)\sum\frac{m_1m_2\gamma\gamma}{\rho^3}, \\ \mu_1\left(y\frac{d^2z_1}{dt^2}-z\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)=-(yz_1-zy_1)\sum\frac{m_1m_2\delta\delta}{\rho^3}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(17)\quad \begin{cases} \mu\mu_1\dfrac{d\left(y_1\frac{dz}{dt}-z_1\frac{dy}{dt}+y\frac{dz_1}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}\right)}{dt} \\ =(yz_1-zy_1)\sum\frac{m_1m_2(\mu_1\gamma\gamma-\mu\delta\delta)}{\rho^3}. \end{cases}$$

On a deux autres systèmes de formules semblables à celui des formules (16) et (17), et qui se rapportent aux coordonnées z et x et aux coordonnées x et y.

D'après une propriété connue des fonctions homogènes, il suit des formules (13),

$$\left.\begin{aligned} &\mu\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right)\\ &+\mu_1\left(x_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+y_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+z_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)\end{aligned}\right\}=-\mathrm{U}. \tag{18}$$

Donc, en faisant usage des formules (4) et (12), on obtient la suivante :

$$\frac{d^2(\mu rr+\mu_1 r_1 r_1)}{dt^2}=2(\mathrm{U}-2h). \tag{19}$$

Les six équations (13) pourront servir à déterminer les six quantités x, y, etc., en fonction du temps. Mais on pourra aussi choisir pour cet effet six autres équations indépendantes entre elles et qui se déduisent des équations (13) par des combinaisons différentes, par exemple, les quatre équations (12) et (15), une des équations (14) et l'équation (19). En effet, on reviendra sans peine de ces dernières aux équations (13).

On déterminera α, β, etc., par les quantités γ, δ, etc., au moyen des formules

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M}\alpha &= m_1\gamma_2-m_2\gamma_1, & \mathrm{M}\beta &= m_1\delta_2-m_2\delta_1,\\ \mathrm{M}\alpha_1 &= m_2\gamma-m\gamma_2, & \mathrm{M}\beta_1 &= m_2\delta-m\delta_2,\\ \mathrm{M}\alpha_2 &= m\gamma_1-m_1\gamma, & \mathrm{M}\beta_2 &= m\delta_1-m_1\delta,\end{aligned}\right. \tag{20}$$

où

$$\mathrm{M}=m+m_1+m_2.$$

Ces formules étant substituées dans l'équation (5), on aura

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M}\mu &= m_1m_2\gamma\gamma+m_2m\gamma_1\gamma_1+mm_1\gamma_2\gamma_2,\\ \mathrm{M}\mu_1 &= m_1m_2\delta\delta+m_2m\delta_1\delta_1+mm_1\delta_2\delta_2,\\ 0 &= m_1m_2\gamma\delta+m_2m\gamma_1\delta_1+mm_1\gamma_2\delta_2,\end{aligned}\right. \tag{21}$$

formules analogues aux équations (5).

2. Je veux discuter à présent la grandeur des différentes constantes qui entrent dans les formules précédentes. Ces constantes n'étant pas entièrement déterminées, il s'agira de faire telles suppositions sur leur grandeur respective qui pourront subsister avec les équations de condition établies entre ces constantes et qui permettront en même temps de faire usage des méthodes d'approximation connues.

Les équations de condition que l'on a établies entre les constantes α, β, etc., sont les suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0, \\ m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 = 0; \end{cases}$$

celles que l'on a entre les six constantes γ, δ, etc., seront

$$(2) \qquad \begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0, \\ m_1m_2\gamma\delta + m_2m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2 = 0. \end{cases}$$

Les masses des planètes étant très-petites par rapport au Soleil, les fractions $\frac{m_1}{m}$, $\frac{m_2}{m}$ seront des quantités très-petites du premier ordre. Cela posé, les équations (1) font voir qu'il est permis de supposer α_1 et β_2 très-proches de l'unité, pendant que les constantes α, α_2, β, β_1 seront des quantités du premier ordre. En effet, si l'on fait

$$(3) \qquad \alpha_2 = \frac{m_1\theta}{m}, \quad \beta_1 = \frac{m_2\lambda}{m},$$

on tirera des équations (1) les formules approchées

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{m_1}{m}, \quad \alpha_1 = 1, \quad 1 + \lambda + \theta = 0; \\ \beta = -\frac{m_2}{m}, \quad \beta_2 = 1, \end{cases}$$

d'où l'on tire les valeurs approchées correspondantes des quantités γ, δ, etc.,

$$(5) \qquad \begin{cases} \gamma = 1, \quad \gamma_1 = -\frac{m_1}{m}\lambda, \quad \gamma_2 = -1, \\ \delta = -1, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \frac{m_2}{m}\theta. \end{cases}$$

Enfin les quantités μ et μ_1 s'écarteront peu des masses m_1 et m_2. Tous les écarts de ces valeurs approchées avec les véritables valeurs pourront être supposés de l'ordre des forces perturbatrices.

Il suit des considérations précédentes, que les quantités x, y, z ne s'écarteront de ξ_1, η_1, ζ_1, et que les quantités x_1, y_1, z_1 ne s'écarteront de ξ_2, η_2, ζ_2 que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. Donc, si l'on imagine deux corps dont les coordonnées respectives sont x, y, z, et x_1, y_1, z_1, leur mouvement autour du centre de gravité du système des trois corps pourra, en première approximation, être regardé comme elliptique. La même chose aura lieu si le mouvement est rapporté à tout autre point qui ne s'écarte de ce centre que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. En négligeant ces quantités, on déduit des formules (3) et (13) du n° **1** les équations différentielles qui servent à la première approximation, et que l'on intégrera par les formules elliptiques connues,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{x}{r^3},\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{y}{r^3},\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{z}{r^3},\\
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{x_1}{r_1^3},\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{y_1}{r_1^3},\\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{z_1}{r_1^3},
\end{aligned}\right.$$

où les facteurs $-\frac{m}{\gamma_2\mu}$, $\frac{m_2}{\delta_1\mu_1}$ ne s'écartent de l'unité que de quantités du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices. Si l'une des deux planètes, par exemple la seconde, est beaucoup plus éloignée du Soleil que l'autre, il conviendra de substituer aux trois dernières de ces équations celles-ci :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{x_1}{r_1^3},\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{y_1}{r_1^3},\\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{z_1}{r_1^3}.
\end{aligned}\right.$$

Dans les approximations successives l'on pourra laisser indéterminées les quantités μ, μ_1, γ, δ, etc.; seulement il sera bon de fixer la valeur de la quantité $\frac{\delta}{\gamma}$. Si l'on fait exactement

$$\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 = 1, \quad \delta = \beta_1 - \beta_2 = -1,$$

on aura

$$(8) \quad \xi_1 - \xi_2 = x - x_1, \quad \eta_1 - \eta_2 = y - y_1, \quad \zeta_1 - \zeta_2 = z - z_1.$$

Dans ce cas, on peut envisager les quantités x, y, z et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées des deux planètes elles-mêmes, mais rapportées à un autre point que le centre de gravité du système. En effet, on pourra faire, en même temps,

$$(9) \quad \begin{cases} \xi_1 = x + \mathrm{a}, & \eta_1 = y + \mathrm{b}, & \zeta_1 = z + \mathrm{c}, \\ \xi_2 = x_1 + \mathrm{a}, & \eta_2 = y_1 + \mathrm{b}, & \zeta_2 = z_1 + \mathrm{c}, \end{cases}$$

a, b, c étant déterminées par les équations

$$(10) \quad \mathrm{a} = \alpha_2 x + \beta_1 x_1, \quad \mathrm{b} = \alpha_2 y + \beta_1 y_1, \quad \mathrm{c} = \alpha_2 z + \beta_1 z_1.$$

Or, des équations

$$\xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, \quad \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1,$$

on tire

$$\alpha_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 = (\alpha_1 + \beta_1)\alpha_2 x + (\alpha_2 + \beta_2)\beta_1 x_1;$$

et comme on a

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2,$$

on aura aussi

$$\mathrm{a} = \frac{\alpha_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

On trouve de la même manière

$$\mathrm{b} = \frac{\alpha_2 \eta_1 + \beta_1 \eta_2}{\alpha_1 + \beta_1}, \quad \mathrm{c} = \frac{\alpha_2 \zeta_1 + \beta_1 \zeta_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

Si l'on retranche des coordonnées a, ξ_1 et ξ_2 la même quantité

$$\frac{m\xi + m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{\mathrm{M}},$$

M étant la somme des masses, on trouvera, après quelques réductions, la valeur suivante de a, et de la même manière les valeurs ci-jointes de b et de c,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{\xi+\gamma_1\xi_1-\delta_2\xi_2}{1+\gamma_1-\delta_2}, \\ \mathrm{b} &= \frac{\eta+\gamma_1\eta_1-\delta_2\eta_2}{1+\gamma_1-\delta_2}, \\ \mathrm{c} &= \frac{\zeta+\gamma_1\zeta_1-\delta_2\zeta_2}{1+\gamma_1-\delta_2}. \end{aligned}\right.$$

Les constantes γ_1 et δ_2 qui entrent dans ces formules pourront être des quantités quelconques remplissant l'équation de condition

$$(12)\qquad \left(\gamma_1 - \frac{m_1}{m}\right)\left(\delta_2 + \frac{m_2}{m}\right) = \frac{\mathrm{M}}{m}\gamma_1\delta_2;$$

il sera donc, entre autres, permis de faire

$$(13)\qquad \delta_2 = 0,\quad \gamma_1 = \frac{m_1}{m},\quad \text{ou}\quad \gamma_1 = 0,\quad \delta_2 = -\frac{m_2}{m}.$$

En supposant toujours

$$\gamma = -\delta = 1,$$

on aura encore

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}\alpha &= -[(m_1+m_2)\gamma_1 + m_1], & \mathrm{M}\beta &= (m_1+m_2)\delta_2 - m_1, \\ \mathrm{M}\alpha_1 &= m\gamma_1 + m + m_2, & \mathrm{M}\beta_1 &= -(m\delta_2 + m_2), \\ \mathrm{M}\alpha_2 &= m\gamma_1 - m_1, & \mathrm{M}\beta_2 &= -m\delta_2 + m + m_1, \\ \gamma_2 &= -(1+\gamma_1), & \delta_1 &= 1 - \delta_2, \\ \mu &= mm_2\gamma_1\frac{1+\gamma_1-\delta_2}{m\delta_2+m_2} = \frac{m_2(m\gamma_1-m_1)}{\mathrm{M}\delta_2}(1+\gamma_1-\delta_2), \\ \mu_1 &= mm_1\delta_2\frac{1+\gamma_1-\delta_2}{m\gamma_1-m_1} = \frac{m_1(m\delta_2+m_2)}{\mathrm{M}\gamma_1}(1+\gamma_1-\delta_2). \end{aligned}\right.$$

Les formules (11) sont indépendantes de l'origine des coordonnées; elles font voir que le point autour duquel on suppose les deux planètes décrire des orbites elliptiques variables est le centre de gravité des trois corps, si l'on donne respectivement au Soleil, à la première et à la deuxième planète, les masses 1, γ_1, $-\delta_2$. Si l'on fait $\delta_2 = 0$, ce point deviendra le centre de gravité du Soleil et de la première planète, en leur attribuant leurs masses effectives m et m_1. On aura dans ce cas

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha = -\frac{m_1}{m}, & \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0,\\ \beta = -\frac{m_1}{M}, & \beta_1 = -\frac{m_2}{M}, & \beta_2 = \frac{m+m_1}{M},\\ \gamma = 1, & \gamma_1 = \frac{m_1}{m}, & \gamma_2 = -\left(1+\frac{m_1}{m}\right).\\ \delta = -1, & \delta_1 = 1, & \delta_2 = 0,\\ \mu = m_1\left(1+\frac{m_1}{m}\right), & & \mu_1 = m_2\frac{m+m_1}{M}. \end{array}\right.$$

On voit donc qu'il faudra attribuer aux planètes des masses un peu différentes dont la raison n'est plus $\frac{m_1}{m_2}$, mais $\frac{m_1}{m_2}\frac{M}{m}$.

3. Ayant établi entre les quantités x, y, etc., les équations (6) du n° **2**, les corps dont les coordonnées sont x, y, z et x_1, y_1, z_1, décriront autour de l'origine des coordonnées comme foyer des orbites elliptiques. Nommons, par rapport au premier de ces corps,

$2a$ le grand axe de son orbite,
$2p$ le paramètre,
i l'inclinaison du plan de l'orbite à un plan fixe,
Ω la longitude du nœud ascendant du plan de l'orbite sur le plan fixe,

et notons d'un trait les mêmes quantités rapportées au deuxième corps; cela posé, on aura par les formules connues, pour le mouvement elliptique d'une planète autour du Soleil:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{p}\cos i,\\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega,\\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = -k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega,\\ x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy}{dt} = k_1\sqrt{p_1}\cos i_1,\\ y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt} = k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1,\\ z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt} = -k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1, \end{array}\right.$$

où l'on a

$$(2)\qquad kk = -\frac{1}{\gamma_2}\frac{mm_1}{\mu}, \quad k_1 k_1 = \frac{1}{\delta_1}\frac{mm_2}{\mu_1},$$

et où pour le plan des x et y est pris le plan fixe, et pour l'axe des x la droite fixe de laquelle les nœuds ascendants sont comptés.

Pour le véritable mouvement donné par les équations (13) du n° **1**, on laisse subsister la forme des expressions elliptiques, en en faisant varier les éléments. Dans cette supposition, *l'on a entre les six éléments troublés* p, i, Ω, p_1, i_1, Ω_1, *trois équations au moyen desquelles on exprime immédiatement les trois quantités*

$$\sqrt{p_1}\cos i_1, \quad \sqrt{p_1}\sin i_1 \sin\Omega_1, \quad \sqrt{p_1}\sin i_1 \cos\Omega_1,$$

par les trois autres

$$\sqrt{p}\cos i, \quad \sqrt{p}\sin i\sin\Omega, \quad \sqrt{p}\sin i\cos\Omega.$$

En effet, en substituant les formules (1) dans les formules (15) du n° **1**, l'on trouve entre ces quantités les simples relations suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu k\sqrt{p}\cos i + \mu_1 k_1 \sqrt{p_1}\cos i_1 = c_2,\\ &\mu k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin i_1 \sin\Omega_1 = c,\\ &\mu k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1 = c_1,\end{aligned}\right.$$

c, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires.

On sait que l'on peut disposer de la direction des axes des coordonnées de manière à faire évanouir deux des trois constantes c, c_1, c_2. Supposons donc

$$c = 0, \quad c_1 = 0,$$

le plan des x et y sera celui auquel Laplace a donné le nom de *plan invariable*. En faisant

$$c = c_1 = 0,$$

les équations (3) se changent dans les suivantes :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu k\sqrt{p}\cos i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\cos i_1 = c_2,\\ &\mu k\sqrt{p}\sin i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin i_1 = 0,\\ &\qquad\qquad \Omega = \Omega_1.\end{aligned}\right.$$

Les deux premières de ces formules font voir *que les inclinaisons des* *plans des deux orbites au plan invariable sont parfaitement déterminées par les deux paramètres*, et *vice versâ*. Nommant $I = i_1 - i$ l'inclinaison mutuelle des deux plans, on déterminera I par la formule

$$(5)\qquad 4\mu\mu_1 kk_1\sqrt{pp_1}\sin I^2 = \{\mu k\sqrt{p} + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\}^2 - c,$$

et ensuite on aura i et i_1 eux-mêmes par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} c_2 \sin i_1 = \mu k\sqrt{p}\sin I, \\ c_2 \sin i = -\mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin I. \end{cases}$$

Il suit de ces formules *que le plan invariable passera constamment entre les plans des deux orbites*. On voit par la troisième des formules (4), que *l'intersection commune des plans des deux orbites se meut dans le plan invariable*. Je remarque que la position du plan d'une orbite est indépendante de la forme que l'on suppose à cette orbite, et qu'elle est entièrement déterminée dès que le centre du mouvement ou l'origine des coordonnées est fixé. En effet, ce plan est celui qui passe, dans chaque moment du temps, par l'origine des coordonnées et par deux positions consécutives de la planète.

4. L'intersection commune des plans des deux orbites tournant autour du centre des coordonnées dans un plan fixe dans l'espace, et que l'on prendra pour celui des x et des y, il paraît naturel de prendre pour variables,

Les deux rayons vecteurs.	r et r_1,
Leurs distances au nœud ascendant commun des plans des deux orbites.	υ et υ_1,
Les inclinaisons de ces plans au plan invariable.	i et i_1,
La longitude du nœud ascendant commun des deux plans ou sa distance à l'axe des x.	Ω.

Par les formules connues de la trigonométrie sphérique, on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos\upsilon - \sin\Omega\cos i\sin\upsilon), \\ y = r(\sin\Omega\cos\upsilon + \cos\Omega\cos i\sin\upsilon), \\ z = r\sin i\sin\upsilon, \\ x_1 = r_1(\cos\Omega\cos\upsilon_1 - \sin\Omega\cos i_1\sin\upsilon_1), \\ y_1 = r_1(\sin\Omega\cos\upsilon_1 + \cos\Omega\cos i_1\sin\upsilon_1), \\ z_1 = r_1\sin i_1\sin\upsilon_1. \end{cases}$$

Nommons δv l'angle de deux rayons vecteurs consécutifs de la première planète fictive; comme dans le plan de l'orbite d'une planète se trouve aussi sa position consécutive, on tirera des formules (1) les deux systèmes de formules

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} d\frac{x}{r} &= -(\cos\Omega\sin v + \sin\Omega\cos i\cos v)\,\delta v = \mathrm{A}\delta v,\\ d\frac{y}{r} &= -(\sin\Omega\sin v - \cos\Omega\cos i\cos v)\,\delta v = \mathrm{B}\delta v,\\ d\frac{z}{r} &= \sin i\cos v\,\delta v = \mathrm{C}\delta v;\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} d\frac{x}{r} &= \mathrm{A}dv + \mathrm{A}'di - \frac{y}{r}\,d\Omega,\\ d\frac{y}{r} &= \mathrm{B}dv + \mathrm{B}'di + \frac{x}{r}\,d\Omega,\\ d\frac{z}{r} &= \mathrm{C}dv + \mathrm{C}'di,\end{aligned}\right.$$

en faisant

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}' &= \sin\Omega\sin i\sin v,\\ \mathrm{B}' &= -\cos\Omega\sin i\sin v,\\ \mathrm{C}' &= \cos i\sin v.\end{aligned}\right.$$

Il suit des formules (2) et (3),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \mathrm{A}(dv - \delta v) + \mathrm{A}'di - \frac{y}{r}\,d\Omega,\\ 0 &= \mathrm{B}(dv - \delta v) + \mathrm{B}'di + \frac{x}{r}\,d\Omega,\\ 0 &= \mathrm{C}(dv - \delta v) + \mathrm{C}'di.\end{aligned}\right.$$

On tire des formules (1), (2) et (4),

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\Omega.\mathrm{A} + \sin\Omega.\mathrm{B} &= -\sin v,\\ \cos\Omega.\mathrm{A}' + \sin\Omega.\mathrm{B}' &= 0,\\ -\cos\Omega.y + \sin\Omega.x &= -r\cos i\sin v.\end{aligned}\right.$$

On aura donc, d'après les formules (5),

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \partial v - dv &= \cos i d\Omega = \operatorname{tang} v . \frac{di}{\operatorname{tang} i},\\ d\Omega &= \operatorname{tang} v . \frac{di}{\sin i}.\end{aligned}\right.$$

La formule

$$\partial v - dv = \cos i d\Omega$$

peut être déduite aisément de la considération d'un triangle sphérique formé par les côtés

$$d\Omega, \quad v + \partial v, \quad v + dv.$$

Soient

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\Omega &= n\cos p, & \sin\Omega &= n'\cos p',\\ \cos i \sin\Omega &= n\sin p, & \cos i\sin\Omega &= n'\sin p',\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= r.n\cos(v+p), & y &= r.n'\cos(v-p'),\\ d.\frac{x}{r} &= -n\sin(v+p)\partial v, & d.\frac{y}{r} &= -n'\sin(v-p')\partial v.\end{aligned}\right.$$

Il s'ensuit de ces formules,

$$xd.\frac{y}{r} - yd.\frac{x}{r} = rnn'\sin(p+p')\partial v,$$

$$yd.\frac{z}{r} - zd.\frac{y}{r} = r\sin i.n'\cos p'.\partial v,$$

$$zd.\frac{x}{r} - xd.\frac{z}{r} = -r\sin i.n\cos p.\partial v,$$

ou, en substituant les formules (8),

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} xdy - ydx &= rr\cos i.\partial v,\\ ydz - zdy &= rr\sin\Omega\sin i.\partial v,\\ zdx - xdz &= -rr\cos\Omega\sin i.\partial v.\end{aligned}\right.$$

Ajoutant les carrés de ces équations, on a, d'après des formules connues,

$$rr(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2) = r^4\partial v^2,$$

où

$$dx\,dx + dy\,dy + dz\,dz = dr\,dr + rr\,\delta v\,\delta v. \tag{11}$$

Pour avoir des formules semblables par rapport à la deuxième des planètes fictives, on n'a qu'à ajouter un trait à chaque lettre dans les formules (2), (10) et (11), pourvu qu'on nomme dv_1 l'angle que forment ses deux rayons vecteurs consécutifs. Donc, puisqu'on a $\Omega_1 = \Omega$, il viendra, d'après la seconde des formules (7),

$$\operatorname{tang} v \,.\, \frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} v_1 \,.\, \frac{di_1}{\sin i}. \tag{12}$$

Mettant $c = c_1 = 0$ dans les formules (15), n° **1**, et substituant les formules (10), ainsi que leurs semblables relatives à la deuxième planète, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \mu rr \cos i \,.\, \delta v + \mu_1 r_1 r_1 \cos i_1 \,.\, \delta v_1 = c_2\, dt, \\ \mu rr \sin i \,.\, \delta v + \mu_1 r_1 r_1 \sin i_1 \,.\, \delta v_1 = 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

De ces formules on tire les valeurs suivantes de δv et de δv_1,

$$\left\{\begin{array}{l} \delta v \;= dv + \operatorname{tang} v\, \dfrac{di}{\operatorname{tang} i} = \dfrac{c_2 \sin i}{\mu rr \sin \mathrm{I}}\, dt, \\ \delta v_1 = dv_1 + \operatorname{tang} v_1 \dfrac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} = -\, \dfrac{c_2 \sin i}{\mu_1 r_1 r_1 \sin \mathrm{I}}\, dt, \end{array}\right. \tag{14}$$

où, comme ci-dessus, on a fait $\mathrm{I} = i_1 - i$. Substituant la première de ces formules dans la première des formules (10), il vient

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \frac{c_2 \sin i_1 \cos i}{\mu \sin \mathrm{I}}. \tag{15}$$

La différentielle de cette quantité sera égale à

$$-\frac{c_2}{\mu} \cdot \frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin \mathrm{I}^2}\, d \,.\, \frac{\sin \mathrm{I}}{\sin i_1 \cos i} = \frac{c_2}{\mu} \cdot \frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin \mathrm{I}^2}\, d \,.\, \operatorname{tang} i c \,.\, \operatorname{tang} i_1\,;$$

on aura donc

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{c_2}{\mu \sin \mathrm{I}^2} \left(\sin i_1 \cos i_1 \frac{di}{dt} - \sin i \cos i \frac{di_1}{dt} \right). \tag{16}$$

On tire encore des formules (11) et (14) la suivante

$$(17)\qquad \cos i_1 dv - \cos i dv_1 = \frac{c_2}{\sin \mathrm{I}}\left(\frac{\sin i_1 \cos i_1}{\mu rr} + \frac{\sin i \cos i}{\mu_1 r_1 r_1}\right) dt.$$

L'expression de la force vive du système est fournie par la formule (4), n° **1**, et par les formules (11) et (14) données ci-dessus,

$$(18)\qquad \begin{cases} 2\mathrm{T} = \mu\left[rr\left(\dfrac{\delta v}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta r}{dt}\right)^2\right] + \mu_1\left[r_1 r_1\left(\dfrac{\delta v_1}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta r_1}{dt}\right)^2\right] \\ \quad = \dfrac{c_2^2}{\sin \mathrm{I}^2}\left(\dfrac{\sin i_1^2}{\mu rr} + \dfrac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right) + \mu\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\dfrac{dr_1}{dt}\right)^2. \end{cases}$$

Les formules (12) et (19), n° **1**, donnent

$$(19)\qquad \begin{cases} 2\mathrm{T} = 2\mathrm{U} - 2h, \\ \mu r\dfrac{d^2 r}{dt^2} + \mu_1 r_1\dfrac{d^2 r_1}{dt^2} + \mu\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\dfrac{dr_1}{dt}\right)^2 = \mathrm{U} - 2h, \end{cases}$$

d'où vient

$$(20)\qquad \begin{cases} \mu\left[2r\dfrac{d^2 r}{dt^2} + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2\right] + \mu_1\left[2r_1\dfrac{d^2 r_1}{dt^2} + \left(\dfrac{dr_1}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad - \dfrac{c_2^2}{\sin \mathrm{I}^2}\left[\dfrac{\sin i_1^2}{\mu rr} + \dfrac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right] + 2h = 0. \end{cases}$$

Remarquons encore la formule qui dérive des formules (1),

$$(21)\qquad xy_1 - yx_1 = rr_1(\cos i_1 \sin v_1 \cos v - \cos i \sin v \cos v_1).$$

Des formules (12) et (16) on tire

$$(22)\qquad \begin{cases} x\dfrac{d^2 y}{dt^2} - y\dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{c_2 \sin i_1}{\mu \cos v \sin v_1 \sin \mathrm{I}^2}(\cos i_1 \sin v_1 \cos v - \cos i \sin v \cos v_1)\dfrac{di}{dt} \\ \qquad = \dfrac{c_2 \sin i_1 (xy_1 - yx_1)}{\mu \cos v \sin v_1 \sin \mathrm{I}^2 rr_1}\dfrac{di}{dt}. \end{cases}$$

Substituant cette formule dans la dernière des formules (14), n° **1**, il vient

$$(23)\qquad \frac{c_2 \sin i_1}{\cos v \sin v_1 \sin \mathrm{I}^2 rr_1}\frac{di}{dt} = -\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\rho_2^3} + \frac{mm_1\gamma_1\delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m_1 m_2 \gamma\delta}{\rho^3}\right).$$

Comme on a, d'après les formules (11) et (14),

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z &= \tfrac{1}{2}\,d^2.rr - (dr\,dr + rr\,\partial\upsilon^2)\\ &= r\,d^2r - c_2^2\,\frac{\sin i_1^2}{\mu^2 r^2 \sin \mathrm{I}^2}\,dt^2,\end{aligned}\right.$$

il suit des formules (13), n° **1**,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\,\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c_1c_2}{\mu}.\frac{\sin i_1^2}{\sin \mathrm{I}^2 r^3} &- \frac{mm_1\gamma_2(\gamma_2 r + \delta_2 r_1 \cos \mathrm{V})}{\rho_2^3}\\ &- \frac{mm_2\gamma_1(\gamma_1 r + \delta_1 r_1 \cos \mathrm{V})}{\rho_1^3} - \frac{m_1m_2\gamma\,(\gamma r + \delta r_1 \cos \mathrm{V})}{\rho^3}.\end{aligned}\right.$$

Des formules (18) et (25) on peut déduire la suivante

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{c_2^2}{\mu rr}\,d.\frac{\sin i_1^2}{\sin \mathrm{I}^2} + \frac{c_2^2}{\mu_1 r_1 r_1}\,d\,\frac{\sin^2 i^2}{\sin \mathrm{I}^2}\\ &= 4rr_1 \sin \mathrm{V}\,d\mathrm{V}\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\rho_2^3} + \frac{mm_2\gamma_1\delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}\right).\end{aligned}\right.$$

On obtient aussi la valeur de $d\mathrm{V}$ en observant que, dans l'équation

$$\cos \mathrm{V} = \cos\upsilon \cos\upsilon_1 + \cos \mathrm{I} \sin\upsilon \sin\upsilon_1,$$

on peut mettre en même temps $\mathrm{V} + d\mathrm{V}$, $\upsilon + \partial\upsilon$, $\upsilon_1 + \partial\upsilon_1$ au lieu de V, υ, υ_1, ce qui donne

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \sin \mathrm{V}\,d\mathrm{V} = (\sin\upsilon\cos\upsilon_1 &- \cos \mathrm{I}\cos\upsilon\sin\upsilon_1)\,\partial\upsilon\\ &+ (\cos\upsilon\sin\upsilon_1 - \cos \mathrm{I}\sin\upsilon\cos\upsilon_1)\,\partial\upsilon_1.\end{aligned}\right.$$

Si, dans le triangle sphérique formé par les côtés V, υ, υ_1, on nomme φ et φ_1 les angles opposés aux côtés υ et υ_1, on a

$$(28)\qquad d\mathrm{V} = \cos\varphi\,\partial\upsilon + \cos\varphi_1\,\partial\upsilon_1,$$

formule qui fournit l'interprétation géométrique de la formule (27).

Les formules (14), (23) et (27) pourront servir à vérifier la formule (26).

5. Entre les six quantités

$$r,\ r_1;\quad \upsilon,\ \upsilon_1;\quad i,\ i_1$$

et le temps t, on a, d'après les formules (12), (14), (19), (23) du précédent article, les équations suivantes, qui pourront servir à développer ces quantités en fonction du temps.

Équations différentielles du problème des trois corps.

$$\text{I.}\qquad \operatorname{tang} \upsilon \,\frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} \upsilon_1 \cdot \frac{di_1}{\sin i_1},$$

$$\text{II.}\qquad \operatorname{tang} \upsilon \,\frac{di}{\operatorname{tang} i} + d\upsilon = \frac{c_2}{\mu} \cdot \frac{\sin i_1}{\sin \mathrm{I}} \frac{dt}{rr},$$

$$\text{III.}\qquad \operatorname{tang} \upsilon \,\frac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} + d\upsilon_1 = \frac{c_2}{\mu_1} \cdot \frac{\sin i}{\sin \mathrm{I}} \frac{dt}{r_1 r_1},$$

$$\text{IV.}\qquad \frac{c_2 \sin i_1}{\cos \upsilon \sin \upsilon_1 \sin \mathrm{I}^2 r r_1}\, di = -\left(\frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\rho_2^3} + \frac{m m_2 \gamma_1 \delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\rho^3}\right) dt,$$

$$\text{V.}\qquad \frac{c_2^2}{\sin \mathrm{I}^2}\left(\frac{\sin i_1^2}{\mu r r} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right) + \mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1 \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{U} - 2h,$$

$$\text{VI.}\qquad \frac{d^2(\mu r r + \mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2\mathrm{U} - 4h.$$

On a mis dans ces formules

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \dfrac{m m_1}{\rho_2} + \dfrac{m m_2}{\rho_1} + \dfrac{m_1 m_2}{\rho}, \\ \rho\rho = \gamma\gamma r r + 2\gamma\delta r r_1 \cos \mathrm{V} + \delta\delta r_1 r_1, \\ \rho_1 \rho_1 = \gamma_1 \gamma_1 r r + 2\gamma_1 \delta_1 r r_1 \cos \mathrm{V} + \delta_1 \delta_1 r_1 r_1, \\ \rho_2 \rho_2 = \gamma_2 \gamma_2 r r + 2\gamma_2 \delta_2 r r_1 \cos \mathrm{V} + \delta_2 \delta_2 r_1 r_1, \\ \cos \mathrm{V} = \cos \upsilon \cos \upsilon_1 + \cos \mathrm{I} \sin \upsilon \sin \upsilon_1. \end{cases}$$

Entre les six constantes γ, δ, etc., on a les équations de condition

$$(2)\qquad \begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0, \\ m_1 m_2 \gamma \delta + m_2 m \gamma_1 \delta_1 + m m_1 \gamma_2 \delta_2 = 0, \end{cases}$$

où m, m_1, m_2 sont les masses du Soleil et des deux planètes. Donc trois des constantes γ, δ, etc., pourront être prises à l'arbitraire. Les quantités μ et μ_1 sont déterminées par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}\mu = m_1 m_2 \gamma\gamma + m_2 m \gamma_1 \gamma_1 + m m_1 \gamma_2 \gamma_2, \\ \mathrm{M}\mu_1 = m_1 m_2 \delta\delta + m_2 m \delta_1 \delta_1 + m m_1 \delta_2 \delta_2, \end{cases}$$

M étant la somme des trois masses.

Après avoir intégré complétement le système des six équations (I à VI), on a encore à déterminer l'angle Ω au moyen de la formule

$$\text{VII.}\qquad d\Omega = \operatorname{tang} \upsilon \cdot \frac{di}{\sin i},$$

ce qui se fait par une simple quadrature. On formera ensuite les six quantités

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x &= r\,(\cos\Omega\cos\upsilon - \sin\Omega\cos i\sin\upsilon),\\ y &= r\,(\sin\Omega\cos\upsilon + \cos\Omega\cos i\sin\upsilon),\\ z &= r\sin i\sin\upsilon,\\ x_1 &= r_1\,(\cos\Omega\cos\upsilon_1 - \sin\Omega\cos i_1\sin\upsilon_1),\\ y_1 &= r_1\,(\sin\Omega\cos\upsilon_1 + \cos\Omega\cos i_1\sin\upsilon_1),\\ z_1 &= r_1\sin i_1\sin\upsilon_1,\end{aligned}\right.$$

et les six constantes

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1}{M}, & \beta &= \frac{m_1\delta_2 - m_2\delta_1}{M},\\ \alpha_1 &= \frac{m_2\gamma - m\gamma_2}{M}, & \beta_1 &= \frac{m_2\delta - m\delta_2}{M},\\ \alpha_2 &= \frac{m\gamma_1 - m_1\gamma}{M}, & \beta_2 &= \frac{m\delta_1 - m_1\delta}{M},\end{aligned}\right.$$

après quoi on aura les coordonnées rectangulaires du Soleil et des deux planètes, rapportées à leur centre de gravité, le plan invariable étant pris pour celui des x et y,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta x_1, & \xi_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \xi_2 &= \alpha_2 x + \beta_2 x_1,\\ \eta &= \alpha y + \beta y_1, & \eta_1 &= \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & \eta_2 &= \alpha_2 y + \beta_2 y_1,\\ \zeta &= \alpha z + \beta z_1, & \zeta_1 &= \alpha_1 z + \beta_1 z_1, & \zeta_2 &= \alpha_2 z + \beta_2 z_1.\end{aligned}\right.$$

Voilà donc le problème des trois corps réduit à l'intégration des six équations (I à VI) et à une quadrature. *Les six équations différentielles* (I à VI) *sont toutes du premier degré, hors une seule qui est du second, et il n'y entre aucune trace des nœuds.*