JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Développements sur un théorème de géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 337-349.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__337_0>

DÉVELOPPEMENTS SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

Par J. LIOUVILLE.

1. Le centre des moyennes distances des points de contact d'une courbe géométrique plane avec la série complète des tangentes qu'on peut lui mener parallèlement à une droite donnée, est un point fixe qui ne dépend en aucune façon de la position de cette droite. Cette proposition curieuse de géométrie a été donnée d'abord par M. Chasles qui l'a déduite fort élégamment d'un théorème de Newton sur les diamètres des courbes. Je l'ai démontrée ensuite dans le tome VI de ce Journal (page 363), en faisant usage d'une méthode particulière d'élimination.

Représentons, en effet, par

$$M(x, y) = 0, \quad \text{ou simplement par} \quad M = 0,$$

l'équation de la courbe géométrique rapportée à deux axes quelconques ox, oy, et par a un paramètre arbitraire. Soient m le degré de M, et x_1 l'abscisse du centre des moyennes distances des $m(m-1)$ points de contact dont nous venons de parler; $m(m-1)x_1$ aura pour valeur la somme $\sum x$ des racines x de l'équation finale résultant de l'élimination de y entre

$$M = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0.$$

Or, en décomposant M dans la somme des groupes homogènes de degrés m, $m-1$,... qui le composent, à savoir,

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

j'ai obtenu pour $\sum x$ l'expression suivante

$$\sum x = -\sum \frac{f''(\alpha)\alpha' + f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

où le $\sum$ du second membre s'étend à toutes les racines α de $f(\alpha) = 0$ et où l'on doit faire

$$\alpha' = -\frac{f_1(\alpha)}{f'(\alpha)};$$

je n'ai pas besoin d'ajouter que

$$f'(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}, \quad f''(\alpha) = \frac{df'(\alpha)}{d\alpha}.$$

Cette valeur de $\sum x$ étant indépendante de a, x_1 n'en dépend pas non plus, et c'est en cela précisément que le théorème énoncé consiste.

2. Mais en discutant de plus près la valeur de x_1 et se rappelant que les équations des m asymptotes de la courbe sont comprises dans la formule générale

$$y = \alpha x + \alpha',$$

on est conduit à un résultat assez intéressant que je vais faire connaître, à savoir, que le point fixe C est aussi le centre des $\frac{m(m-1)}{2}$ points de rencontre mutuelle des asymptotes de la courbe géométrique à laquelle on mène les tangentes.

Pour le faire voir de la manière la plus simple, observons que la valeur de x_1 dépendant des seules fonctions f et f_1 ne dépend, par cela même, que de la position des asymptotes de la courbe; celle-ci pourra donc sans inconvénient être remplacée soit par une autre ligne de degré m ayant les mêmes asymptotes, soit encore par le groupe de ces asymptotes qu'on peut regarder comme composant une ligne de degré m; dans ce dernier cas, au lieu de M on prendra le produit

$$\Pi(y - \alpha x - \alpha'),$$

qui, lorsqu'on l'égale à zéro, fournit successivement toutes les asymptotes; on pourra d'ailleurs faire $a = 0$, puisque $\sum x$ ne dépend pas de a, et au lieu des deux équations

$$M = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0,$$

on aura celles-ci :

$$\Pi(y - \alpha x - \alpha') = 0, \quad \frac{d}{dx}\Pi(y - \alpha x - \alpha') = 0.$$

Pour $m = 3$, par exemple, ces équations sont de la forme

$$(y - \alpha x - \alpha')(y - \alpha_1 x - \alpha'_1)(y - \alpha_2 x - \alpha'_2) = 0,$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\ (y - \alpha_1 x - \alpha'_1)(y - \alpha_2 x - \alpha'_2) \\ +\alpha_1 (y - \alpha x\ \ - \alpha')(y - \alpha_2 x - \alpha'_2) \\ +\alpha_2 (y - \alpha x\ \ - \alpha')(y - \alpha_1 x - \alpha'_1) \end{array}\right\} = 0.$$

L'une a pour premier membre le produit des facteurs $(y - \alpha x - \alpha')$, et l'autre la somme de leurs produits $(m - 1)$ à $(m - 1)$, multipliés respectivement par les diverses valeurs de α.

La première ne peut être satisfaite qu'en égalant à zéro un des facteurs $y - \alpha x - \alpha'$, ce qui fournit une quelconque des asymptotes, et pour que la seconde ait lieu ensuite, il faut qu'un autre de ces facteurs soit aussi nul. Donc les valeurs de x, y formant une solution appartiennent aux points de rencontre des asymptotes entre elles, lesquels points doivent d'ailleurs être pris chacun deux fois; la somme des valeurs de x répondant à ces points, et ainsi doublée, fournit la valeur de $\sum x$. Pour avoir x_1, il faut la diviser par $m(m - 1)$ ou par le double du nombre des points de rencontre mutuelle des m asymptotes. L'abscisse x_1 coïncide donc (et cela quel que soit l'axe des x) avec l'abscisse du centre des moyennes distances de ces points de rencontre mutuelle. De là le théorème que nous voulions établir.

3. Il n'est peut-être pas inutile d'observer ici que, quand on a remplacé la courbe géométrique proposée par son groupe d'asymptotes, il n'y a plus à proprement parler de tangentes parallèles à une droite quelconque; mais ces tangentes sont analytiquement remplacées par des droites passant aux points de rencontre des asymptotes entre elles; droites dont chacune jouit, en effet, de la propriété fondamentale des tangentes de couper la ligne de degré m que nous considérons actuellement (le groupe des asymptotes) en deux points infiniment voisins. Si l'on ajoute que les points de rencontre des asymptotes sont des points *doubles*, on comprendra que notre théorème pourrait être ainsi démontré sans aucun calcul. Mais la marche que nous avons suivie paraît plus nette et plus claire. En tous cas il était essentiel d'insister sur ce qu'on peut à la courbe géométrique donnée substituer pour la recherche du point C toute autre courbe géométrique ayant les mêmes asymptotes. Quelquefois, en effet, il arrivera que les points de contact étant imaginaires pour la courbe primitive cesseront de l'être pour une autre courbe par laquelle on la remplacera. On pourra de cette manière, et en opérant sur la nouvelle figure, trouver graphiquement le point C.

4. La démonstration du n° **2** est à la fois simple et directe. Mais il est bon d'en donner une autre toute analytique et déduite de l'expression même de $\sum x$ rapportée au n° **1**.

Et d'abord cette valeur peut être simplifiée et réduite à

$$\sum x = -\sum \frac{f''(\alpha)\alpha'}{f'(\alpha)},$$

en effaçant le terme

$$\sum \frac{f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

qui est nul, d'après un théorème connu, puisque $f'_1(\alpha)$ est au plus de degré $m-2$, tandis que l'équation $f(\alpha)=0$ est de degré m.

Soient $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ les m racines de $f(\alpha)=0$, et $\alpha', \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}$ les valeurs correspondantes de α'. On aura, quel que soit t,

$$f(t) = (t-\alpha)(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_{m-1}) = (t-\alpha)\varphi(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t-\alpha)\varphi'(t) + \varphi(t), \\ f''(t) &= (t-\alpha)\varphi''(t) + 2\varphi'(t); \end{aligned}$$

par suite, pour $t=\alpha$,

$$f'(\alpha) = \varphi(\alpha), \quad f''(\alpha) = 2\varphi'(\alpha),$$

et de là

$$\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = 2\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = 2\left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha - \alpha_{m-1}}\right).$$

La valeur de $\sum x$ ou de $m(m-1)x_1$ peut donc s'écrire

$$m(m-1)x_1 = 2\sum\left(\frac{\alpha'}{\alpha_1 - \alpha} + \frac{\alpha'}{\alpha_2 - \alpha} + \ldots + \frac{\alpha'}{\alpha_{m-1} - \alpha}\right).$$

Le signe $\sum$ se rapporte ici aux diverses valeurs que α peut prendre, les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ devant être changées en même temps de manière à ne contenir jamais que les racines qui restent quand on a mis α de côté. Ainsi on pourra écrire encore

$$m(m-1)x_1 = \sum\sum\frac{\alpha'_i - \alpha'_s}{\alpha_s - \alpha_i},$$

et

$$x_1 = \frac{1}{m(m-1)}\sum\sum\frac{\alpha'_i - \alpha'_s}{\alpha_s - \alpha_i}.$$

en donnant à i et s toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (m-1)$, sans pourtant jamais faire $i = s$ dans un même terme. Mais les équations de deux asymptotes quelconques étant

$$y = \alpha_i x + \alpha'_i, \quad y = \alpha_s x + \alpha'_s,$$

on en conclut, pour l'abscisse de leur point de rencontre,

$$\frac{\alpha'_i - \alpha'_s}{\alpha_s - \alpha_i};$$

par suite, x_1 est l'abscisse du centre des moyennes distances de ces points de rencontre; c'est ce qu'il fallait démontrer.

5. Reprenons la formule

$$\sum x = -\sum\frac{f''(\alpha)\alpha' + f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

ou plutôt, en supprimant le second terme qui donne une somme nulle, et remplaçant α' par sa valeur,

$$\sum x = \sum \frac{f''(\alpha) f_1(\alpha)}{f'(\alpha)^2}.$$

En représentant par $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_{m-2}$ les $(m-1)$ racines de $f'(\mu) = 0$, on a

$$\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{1}{\alpha - \mu} + \frac{1}{\alpha - \mu_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha - \mu_{m-2}};$$

il vient donc

$$\sum x = \sum \left[\frac{f_1(\alpha)}{(\alpha - \mu) f'(\alpha)} + \frac{f_1(\alpha)}{(\alpha - \mu_1) f'(\alpha)} + \ldots + \frac{f_1(\alpha)}{(\alpha - \mu_{m-2}) f'(\alpha)} \right].$$

Or on sait que généralement

$$\sum \frac{f_1(\alpha)}{(\alpha - \mu) f'(\alpha)} = - \frac{f_1(\mu)}{f(\mu)}.$$

Donc

$$\sum x = - \left[\frac{f_1(\mu)}{f(\mu)} + \frac{f_1(\mu_1)}{f(\mu_1)} + \text{etc.} \right] = - \sum \frac{f_1(\mu)}{f(\mu)},$$

et par conséquent

$$x_1 = - \frac{1}{m(m-1)} \sum \frac{f_1(\mu)}{f(\mu)},$$

le signe $\sum$ se rapportant cette fois aux racines μ de $f'(\mu) = 0$.

Cette transformation va nous fournir une nouvelle propriété du centre C.

6. Les deux équations

$$\frac{d\mathrm{M}(x, y)}{dx} = 0, \quad \frac{d\mathrm{M}(x, y)}{dy} = 0,$$

considérées à la fois, déterminent en général $(m-1)^2$ points qui ne sont situés que dans des cas très-particuliers sur la courbe représentée par $\mathrm{M}(x, y) = 0$ dont ils deviennent alors des points multiples. La position de ces $(m-1)^2$ points ne dépend pas des axes particuliers ox, oy

auxquels il nous plaît de rapporter la courbe [*]. Ils ont avec cette courbe une liaison intime et se présentent utilement dans la théorie des polaires. Je me propose de montrer ici que leur centre des moyennes distances coïncide avec le point C.

Continuons à poser

$$\mathrm{M}(x, y) = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

et faisons de plus

$$\begin{aligned} m f(t) - t f'(t) &= \mathrm{F}(t), \\ (m-1) f_1(t) - t f'_1(t) &= \mathrm{F}_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots; \end{aligned}$$

les équations

$$\frac{d\mathrm{M}(x, y)}{dy} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{M}(x, y)}{dx} = 0,$$

prendront la forme

$$x^{m-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

$$x^{m-1} \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} \mathrm{F}_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

et la somme $\sum x$ des abscisses des points dont elles déterminent la

---

[*] Soient, en effet, x', y' les coordonnées pour d'autres axes $o'x'$, $o'y'$; les valeurs de x, y en x', y' étant linéaires, on aura

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx'} = p\frac{d\mathrm{M}}{dx} + q\frac{d\mathrm{M}}{dy}, \qquad \frac{d\mathrm{M}}{dy'} = p'\frac{d\mathrm{M}}{dx} + q'\frac{d\mathrm{M}}{dy},$$

où p, q, p', q' sont des constantes. Les équations

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{M}}{dy} = 0,$$

entraînent donc celles-ci

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx'} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{M}}{dy'} = 0,$$

qui réciproquement les reproduiraient à leur tour.

position sera, d'après la méthode d'élimination citée plus haut,

$$\sum x = -\sum \frac{F'(\mu)\mu' + F_1(\mu)}{F(\mu)},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les racines μ de $f'(\mu) = 0$ et aux valeurs de μ' corespondantes, savoir

$$\mu' = -\frac{f'_1(\mu)}{f''(\mu)}.$$

Or on a

$$F(\mu) = mf'(\mu), \quad F'(\mu) = -\mu f''(\mu), \quad F_1(\mu) = (m-1)f_1(\mu) - \mu f'_1(\mu).$$

Donc

$$\sum x = \sum \frac{\mu f''(\mu)\mu' - (m-1)f_1(\mu) + \mu f'_1(\mu)}{mf(\mu)},$$

et de là

$$\sum x = -\frac{m-1}{m}\sum \frac{f_1(\mu)}{f(\mu)},$$

en ayant égard à la valeur de μ'. Il en résulte, pour l'abscisse du centre des moyennes distances des $(m-1)^2$ points dont nous avons parlé, la valeur suivante:

$$-\frac{1}{m(m-1)}\sum \frac{f_1(\mu)}{f(\mu)} = x_1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

7. On peut présenter cette même analyse sous une forme un peu différente, ainsi qu'il suit. En prenant deux droites quelconques pour axes des x et des y, l'abscisse x_1 du centre C sera fournie par l'égalité

$$x_1 = \frac{\sum x}{m(m-1)},$$

$\sum x$ désignant la somme des racines de l'équation finale en x résultant de

$$\mathrm{M} = 0, \quad \frac{d\mathrm{M}}{dy} = 0.$$

D'un autre côté, $\sum' x$ désignant une somme analogue pour

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0,$$

la formule

$$x'_1 = \frac{\sum' x}{(m-1)^2}$$

donne l'abscisse x'_1 du centre des moyennes distances des $(m-1)^2$ points déterminés par ces deux équations. Il s'agit donc de prouver que

$$\sum' x = \frac{m-1}{m} \sum x.$$

Or on a

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.$$

d'où

$$\frac{dM}{dy} = x^{m-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.$$

Cela étant, servons-nous encore, pour trouver $\sum x$, de notre méthode d'élimination, mais en prenant comme point de départ la seconde équation $\frac{dM}{dy} = 0$ dont on substituera les racines dans la première. Il viendra, réduction faite,

$$\sum x = -\sum \frac{f_1(\alpha)}{f(\alpha)},$$

le signe $\sum$ du second membre s'appliquant aux racines de $f'(\alpha) = 0$, ce qui a fait disparaître un terme multiplié par $f'(\alpha)$.

Quant à la somme $\sum' x$, j'observe d'abord que la première de nos deux équations

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0,$$

peut sans inconvénient être remplacée ici par

$$x \frac{dM}{dx} = 0,$$

ce qui n'introduit dans l'équation finale en x que des racines nulles, soit même par

$$x\frac{dM}{dx}+y\frac{dM}{dy}=0,$$

qui a le même degré que

$$x\frac{dM}{dx}=0,$$

et dont le dernier terme est nul en vertu de la seconde équation. De là, par le théorème des fonctions homogènes, l'équation

$$mx^m f\left(\frac{y}{x}\right)+(m-1)x^{m-1}f_1\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots=0,$$

qu'il faut combiner avec

$$\frac{dM}{dy}=x^{m-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)+x^{m-2}f'_1\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots=0.$$

D'après la méthode indiquée, on en conclut

$$\sum{}'x=-\frac{m-1}{m}\sum\frac{f_1(\alpha)}{f(\alpha)}=\frac{m-1}{m}\sum x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

8. La méthode du n° **7** s'étend aux surfaces. Soit

$$M(x,y,z)\quad \text{ou}\quad M=0,$$

une équation de degré m représentant une surface géométrique quelconque. On sait que le centre C des moyennes distances des $m(m-1)^2$ points de contact de cette surface avec la série complète des plans tangents qu'on peut lui mener parallèlement à un plan donné reste fixe aussi lorsqu'on change à la fois la direction commune de tous ces plans tangents sans altérer leur parallélisme. Nous allons montrer que ce point C jouit d'une propriété toute semblable à celle que nous avons reconnue pour le point analogue dans les lignes planes. Les trois équations suivantes

$$\frac{dM}{dx}=0,\quad \frac{dM}{dy}=0,\quad \frac{dM}{dz}=0,$$

déterminent, en effet, $(m-1)^3$ points évidemment toujours les mêmes quelle que soit la position ou l'inclinaison mutuelle des axes ox, oy, oz auxquels la surface est rapportée, et qui ne sont situés sur la surface que dans des cas très-particuliers. Ces points se présentent utilement dans la théorie des polaires, et leur liaison avec les points singuliers de la surface est manifeste. Or je dis que leur centre des moyennes distances coïncide précisément avec le point C.

En prenant un plan quelconque pour plan des yz, l'abscisse x_1 du point C pour ce plan sera fournie par l'égalité

$$x_1 = \frac{\sum x}{m(m-1)^2}.$$

$\sum x$ désignant la somme des $m(m-1)^2$ racines de l'équation finale en x résultant de

$$\mathrm{M} = 0, \quad \frac{d\mathrm{M}}{dy} = 0, \quad \frac{d\mathrm{M}}{dz} = 0.$$

D'un autre côté, $\sum' x$ désignant une somme analogue pour les racines x de

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx} = 0, \quad \frac{d\mathrm{M}}{dy} = 0, \quad \frac{d\mathrm{M}}{dz} = 0,$$

la formule

$$x'_1 = \frac{\sum' x}{(m-1)^3}$$

donne l'abscisse x'_1 du centre des moyennes distances des $(m-1)^3$ points déterminés par ces trois équations. Il s'agit donc de prouver que

$$\sum' x = \frac{m-1}{m} \sum x.$$

Or, en groupant les termes homogènes, on peut écrire

$$\mathrm{M} = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots;$$

de là découlent, par la différentiation, les valeurs de

$$\frac{dM}{dx}, \quad \frac{dM}{dy}, \quad \frac{dM}{dz},$$

mises sous une forme analogue. Cela posé, en appliquant aux équations

$$M = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0,$$

la méthode d'élimination déjà tant de fois citée, et prenant pour point de départ les racines des deux dernières, on obtiendra, réduction faite,

$$\sum x = -\sum \frac{f_1(\alpha, \beta)}{f(\alpha, \beta)},$$

le signe $\sum$ du second membre s'étendant à toutes les racines (α, β) des deux équations simultanées

$$\frac{df(\alpha, \beta)}{d\alpha} = 0, \quad \frac{df(\alpha, \beta)}{d\beta} = 0.$$

Quant à la somme $\sum' x$, j'observe d'abord que la première de nos trois équations

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0,$$

peut être remplacée ici sans inconvénient par

$$x\frac{dM}{dx} = 0,$$

ce qui n'introduit dans l'équation finale en x que des racines nulles, soit même par

$$x\frac{dM}{dx} + y\frac{dM}{dy} + z\frac{dM}{dz} = 0,$$

eu égard aux deux dernières. De là, par le théorème des fonctions homogènes, l'équation

$$mx^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + (m-1)x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots = 0,$$

qu'il faut combiner avec

$$\frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0.$$

De là, par une application nouvelle de nos principes,

$$\sum{}' x = -\frac{m-1}{m} \sum \frac{f_1(\alpha, \beta)}{f(\alpha, \beta)} = \frac{m-1}{m} \sum x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

9. Ces propriétés géométriques répondent à des théorèmes d'analyse qu'on peut étendre aux fonctions algébriques d'un nombre quelconque i de variables $x, y, \ldots, z$. Soit

$$M(x, y, \ldots, z) \quad \text{ou} \quad M = 0,$$

une équation algébrique d'un degré m quelconque. A cette équation, joignons en $(i-1)$ autres dont le premier membre soit de la forme

$$a\frac{dM}{dx} + b\frac{dM}{dy} + \ldots + c\frac{dM}{dz} = 0,$$

$a, b, \ldots, c$ étant des constantes. La somme $\sum x$ des racines de l'équation finale en x résultant de l'élimination de $y, \ldots, z$ entre les i équations indiquées sera indépendante des valeurs de a, b, etc. De plus, elle aura cette relation très-simple,

$$\sum{}' x = \frac{m-1}{m} \sum x,$$

avec la somme $\sum' x$ des racines de l'équation finale résultant de l'élimination de $y, \ldots, z$, entre ces i autres équations

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \ldots, \quad \frac{dM}{dz} = 0.$$

Ai-je besoin d'ajouter qu'il existe beaucoup d'autres théorèmes du même genre que nos formules démontrent facilement, ou plutôt font connaître *à priori* lorsqu'on les examine avec quelque attention?