JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les deux formes $x^2 + y^2 + z^2 + t^2, x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 169-170.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__169_0>

SUR LES DEUX FORMES

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$;

PAR J. LIOUVILLE.

M. Jacobi a fait voir [*] que tout nombre entier N peut s'exprimer sous la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2.$$

D'un autre côté, en vertu d'un théorème de Fermat aujourd'hui bien démontré, N est la somme de quatre carrés au plus. J'ai trouvé qu'on peut passer facilement de l'un quelconque de ces théorèmes à l'autre.

1°. Admettons comme démontré le théorème de M. Jacobi, c'est-à-dire admettons qu'on ait

$$\mathrm{N} = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2.$$

Il en résultera identiquement

$$\mathrm{N} = x^2 + (y + z + t)^2 + (y - z - t)^2 + (2t - z)^2.$$

Ainsi N est la somme de quatre carrés; c'est le théorème de Fermat.

2°. Réciproquement, si N est la somme de quatre carrés, en sorte que

$$\mathrm{N} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

le théorème de M. Jacobi s'en déduira comme il suit :

La racine de chacun des quatre carrés prise avec un signe convenable est nécessairement de l'une des deux formes $3n + 1$, $3n$; car lors même qu'elle aurait une valeur absolue de forme $3p + 2$, en la prenant négativement et posant $n = -(p + 1)$, on la ramènerait à la forme $3n + 1$. Parmi les quatre racines x, y, z, t, ainsi affectées du

[*] Tome VII de ce Journal, page 109.

signe + ou du signe —, on en trouvera donc toujours ou deux ou plus de deux ayant la même forme. Dans le dernier cas, la somme de trois racines semblables sera divisible par 3. Dans le premier, on obtiendra encore un nombre divisible par 3, si, à la différence des deux racines de forme $3n + 1$, on ajoute une des deux racines restantes. Ainsi, dans tous les cas, il y a une somme $x + y + z$ de trois racines, prises positivement ou négativement, qui est divisible par 3, et dont on peut représenter le carré par $9v^2$. J'observe, de plus, que parmi les trois nombres x, y, z, deux au moins (x et y par exemple) sont à la fois pairs ou à la fois impairs.

Cela étant, je pars de l'équation identique

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2 + 2\left(\frac{x+y}{2} - z\right)^2 + 6\left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

qu'on peut écrire

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2 + 2(s - z)^2 + 6u^2,$$

où s et u sont des entiers. Le premier membre et le dernier terme du second membre sont multiples de 3; $(x + y + z)^2 = 9v^2$ l'est aussi; il faut donc que $(s - z)^2$ soit également multiple de 3 et de forme $9w^2$. Dès lors, en divisant par 3, on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2u^2 + 3v^2 + 6w^2,$$

puis, en ajoutant t^2 de part et d'autre,

$$\mathrm{N} = t^2 + 2u^2 + 3v^2 + 6w^2,$$

ce qu'il fallait trouver.