JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACOBI

Sur les fonctions de Laplace, qui résultent du développement de $\{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\theta-\theta')] + a'^2\}^{-\frac{1}{2}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 229-232.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__229_0>

Sur les fonctions de Laplace, qui résultent du développement de $\{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\theta-\theta')] + a'^2\}^{-\frac{1}{2}}$;

Par M. JACOBI [*].

I.

Toute expression de la forme

$$V = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

peut se représenter par l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + iB\cos\alpha + iC\sin\alpha},$$

où $i = \sqrt{-1}$. Soient donc

$A = a\cos\omega - a'\cos\varphi,\quad B = a\sin\omega\cos\theta - a'\sin\varphi\cos\theta',\quad C = a\sin\omega\sin\theta - a'\sin\varphi\sin\theta'.$

L'expression que nous nous proposons de développer s'exprimera ainsi :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\theta-\theta')] + a'^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{a[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\theta-\alpha)] - a'[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta'-\alpha)]}. \end{aligned}$$

Soit, pour le développement en question,

$$V = \frac{Y_0}{a} + Y_1\frac{a'}{a^2} + Y_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots.$$

D'après la formule précédente, le terme général Y_n sera fourni par l'intégrale définie

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta'-\alpha)]^n\, d\alpha}{[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\theta-\alpha)]^{n+1}}.$$

En posant

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta'-\alpha)]^n = X_n + 2iX'_n\cos(\theta'-\alpha) - 2X''_n\cos 2(\theta'-\alpha)\ldots,$$

$$[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\theta-\alpha)]^{-(n+1)} = P_n + 2iP'_n\cos(\theta-\alpha) - 2P''_n\cos 2(\theta-\alpha)\ldots,$$

l'expression précédente de Y_n devient

$$Y_n = P_nX_n - 2P'_nX'_n\cos(\theta-\theta') + 2P''_nX''_n\cos 2(\theta-\theta')\ldots.$$

[*] Dans cette Note, que nous empruntons à un journal italien, M. Jacobi a reproduit, mais avec quelques différences de détail, un précédent article écrit en allemand et que les géomètres, curieux à si juste titre des moindres idées de l'illustre analyste, trouveront dans le *Journal de M. Crelle*, tome XXVI, page 81. (J. L.)

Les quantités P_n, P'_n,... dépendent seulement de ω; les quantités X_n, X'_n,... seulement de φ. En outre, les quantités correspondantes $P_n^{(m)}$, $X_n^{(m)}$ doivent être les mêmes fonctions (du moins à un facteur numérique près) l'une de ω et l'autre de φ. C'est une conséquence immédiate de la nature même de la fonction V qui reste la même (d'où il résulte que le coefficient Y_n reste aussi le même) lorsqu'on change l'une dans l'autre les deux quantités ω et φ.

En faisant $\omega=0$, l'intégrale par laquelle on vient d'exprimer la valeur de Y_n se réduit à

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta'-\alpha)]^n\, d\alpha,$$

et en substituant à la quantité sous le signe $\int$ son développement écrit ci-dessus, on en conclut pour ce cas particulier $Y_n = X_n$. En même temps V se change en

$$V = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2}}.$$

Donc l'équation

$$V = \frac{Y_0}{a} + Y_1\frac{a'}{a^2} + Y_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots$$

devient, par la supposition de $\omega = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2}} = \frac{X_0}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + X_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots.$$

De la même manière, en posant $\varphi = 0$, on obtient

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\omega + i\sin\omega\cos(\theta-\alpha)]^{-(n+1)}\, d\alpha = P_n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\omega + a'^2}} = \frac{P_0}{a} + P_1\frac{a'}{a^2} + P_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots.$$

Quant aux premiers coefficients, dans ces deux cas on a $X_0 = P_0 = 1$, comme on le voit en faisant $a'=0$. Dans les intégrales qui déterminent les autres X_n, P_n, on peut écrire simplement α au lieu de $\theta'-\alpha$ et de $\theta-\alpha$. D'ailleurs ce sont deux fonctions toutes pareilles de φ et de ω qui ne diffèrent pas même l'une de l'autre par quelque facteur numérique puisque les deux radicaux dont ces fonctions proviennent sont identiques quand $\varphi = \omega$. De là on conclut ce théorème :

« Soient

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2}} = \frac{1}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + \ldots + X_n\frac{a'^n}{a^{n+1}} + \ldots,$$

» et P_n ce que devient X_n lorsqu'on y change φ en ω ; on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos(\theta-\theta')] + a'^2}} = \frac{1}{a} + P_1X_1\frac{a'}{a^2} + P_2X_2\frac{a'^2}{a^3} + \ldots.\text{»}$$

Ce beau résultat a été donné pour la première fois par Legendre dans ses Recherches sur la figure de la Terre.

II.

Les valeurs de X_n, $X'_n, \ldots$, P_n, $P'_n, \ldots$ peuvent se trouver au moyen du théorème de Taylor et d'une extension importante de ce théorème relative au cas d'une fonction de $p+z$ dont le développement doit contenir tout à la fois des puissances positives et des puissances négatives de z.

Posons $\cos\varphi = x$, $i\sin\varphi . e^{i\alpha} = z$, nous obtiendrons l'équation remarquable

$$2z(\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\alpha) = (x+z)^2 - 1.$$

En écrivant α au lieu de $\theta' - \alpha$ dans la série donnée ci-dessus pour le développement de $[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\theta'-\alpha)]^n$, et introduisant des exponentielles au lieu des cosinus, on a

$$\begin{aligned}
[(x+z)^2 - 1]^n &= 2^n z^n (\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\alpha)^n \\
&= 2^n z^n \begin{pmatrix} X_n + iX'_n e^{i\alpha} - X''_n e^{2i\alpha} - iX'''_n e^{3i\alpha} \ldots \\ + iX'_n e^{-i\alpha} - X''_n e^{-2i\alpha} - iX'''_n e^{-3i\alpha} \ldots \end{pmatrix} \\
&= 2^n z^n \begin{pmatrix} X_n + X'_n \dfrac{z}{\sin\varphi} + X''_n \dfrac{z^2}{\sin^2\varphi} + X'''_n \dfrac{z^3}{\sin^3\varphi} \ldots \\ - X'_n \sin\varphi . z^{-1} + X''_n \sin^2\varphi . z^{-2} - X'''_n \sin^3\varphi . z^{-3} \ldots \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or $\sin\varphi = \sqrt{1-x^2}$, et les quantités $X_n^{(m)}$ sont des fonctions de x seule. La série précédente est donc une série ordonnée suivant les puissances de z, et le coefficient de z^{n+m} dans cette série est exprimé par la fonction de x suivante

$$\frac{2^n}{\sin^m\varphi} X_n^{(m)} = \frac{2^n}{\sqrt{(1-x^2)^m}} . X_n^{(m)}.$$

Mais par le théorème de Taylor, ce même coefficient est égal à

$$\frac{d^{n+m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n+m)\, dx^{n+m}},$$

où $\Pi(k) = 1.2.3\ldots k$. Par suite, il vient

$$X_n^{(m)} = \frac{\sin^m\varphi}{2^n} . \frac{d^{n+m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n+m)\, dx^{n+m}}.$$

Pour $m = 0$, cela fournit

$$X_n = \frac{d^n.(x^2-1)^n}{2^n\,\Pi(n)\, dx^n},$$

d'où pour $X_n^{(m)}$ cette expression générale

$$X_n^{(m)} = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+m)} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n}{dx^m}.$$

Pour trouver maintenant $P_n^{(m)}$, je fais

$$\cos\omega = p, \quad i\sin\omega . e^{i\alpha} = z,$$

d'où résulte encore

$$[(p+z)^2-1]^{-(n+1)} = (2z)^{-(n+1)}(\cos\omega + i\sin\omega\cos\alpha)^{-(n+1)}$$

$$= (2z)^{-(n+1)}\left(P_n + P'_n\frac{z}{\sin\omega} + P''_n\frac{z^2}{\sin^2\omega} + \ldots - P'_n\sin\omega . z^{-1} + P''_n\sin^2\omega . z^{-2} - \ldots\right).$$

Le coefficient de $z^{-(n+1)+m}$ dans cette formule est $\frac{2^{-(n+1)}}{\sin^m\omega}P_n^{(m)}$. Pour obtenir une autre valeur de ce même coefficient du développement de $[(p+z)^2-1]^{-(n+1)}$, j'observe que le principe sur lequel repose la formule de Taylor (à savoir l'égalité des dérivées partielles par rapport à p et z d'une fonction de $p+z$) reste applicable même aux développements qui, comme le précédent, contiennent à la fois des puissances positives et des puissances négatives de z à l'infini. Dans un développement de ce genre, soit u le coefficient de $z^{-(n+1)}$; et le coefficient de $z^{-(n+1)+m}$ sera $(-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\cdot\frac{d^m u}{dp^m}$. Dans le développement proposé de $[(p+z)^2-1]^{-(n+1)}$, le coefficient de $z^{-(n+1)}$ est $2^{-(n+1)}P_n$, et généralement le coefficient de $z^{-(n+1)+m}$ est $\frac{2^{-(n+1)}}{\sin^m\omega}\cdot P_n^{(m)}$. En appliquant donc à ce développement la règle générale qu'on vient d'indiquer, et multipliant par $2^{n+1}\sin^m\omega$, on obtient

$$P_n^{(m)} = (-1)^m.\sin^m\omega\frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)}\cdot\frac{d^m P_n}{dp^m}.$$

Mais P_n est fonction de p comme X_n l'est de x, en sorte que

$$P_n = \frac{d^n.(p^2-1)^n}{2^n\Pi(n)\,dp^n};$$

on aura donc, en général,

$$P_n^{(m)} = (-1)^m\frac{\Pi(n-m)}{2^n\Pi(n).\Pi(n)}\cdot(1-p^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^{n+m}.(p^2-1)^n}{dp^{n+m}}.$$

En substituant les valeurs trouvées pour $X_n^{(m)}$, $P_n^{(m)}$, l'expression de Y_n rapportée ci-dessus,

$$Y_n = P_n X_n - 2P'_n X'_n\cos(\theta-\theta') + 2P''_n X''_n\cos 2(\theta-\theta')\text{ etc.},$$

devient

$$Y_n = P_n X_n + \frac{2\Pi(n-1)\sin\omega\sin\varphi}{\Pi(n+1)}\cdot\frac{dP_n}{dp^2}\,\frac{dX_n}{dx^2}\cos(\theta-\theta')$$
$$+\frac{2\Pi(n-2)\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\Pi(n+2)}\cdot\frac{d^2P_n}{dp}\cdot\frac{d^2X_n}{dx}\cos 2(\theta-\theta') + \text{etc.}$$

Telle est l'expression du terme général Y_n auquel Laplace a appliqué un procédé tout à fait différent.