JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Rapport sur ce mémoire

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^re série, tome 10 (1845), p. 290-293.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__290_0>

Rapport sur ce Mémoire.

(Commissaires, MM. Lamé, Liouville rapporteur.)

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome XXI, page 281.)

« Le Mémoire de M. Serret, dont nous venons rendre compte à l'Académie, a pour objet la représentation géométrique des intégrales elliptiques et ultrà-elliptiques de Legendre, c'est-à-dire des intégrales dont l'élément est la racine carrée d'une fonction rationnelle. L'auteur se propose de représenter, du moins quand cela est possible, leur valeur indéfinie, par un arc de courbe algébrique, en se bornant, toutefois, au cas où les deux coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe sont exprimables rationnellement en fonction de la variable à laquelle se rapporte l'intégration. En d'autres termes, il cherche les solutions réelles et rationnelles que peut avoir l'équation

$$dx^2 + dy^2 = \mathrm{Z}dz^2,$$

où x, y et Z désignent des fonctions de z.

» Ce problème d'analyse indéterminée, très-intéressant en lui-même, indépendamment de ses applications, est résolu d'une manière simple dans le Mémoire de M. Serret. On arrive à une formule générale. Mais les calculs auxquels il faut ensuite se livrer, quand on veut compléter la solution pour une intégrale de forme donnée, étant longs et compliqués, M. Serret ne s'est occupé avec détail que des fonctions elliptiques de première espèce. Il suppose ces fonctions mises sous la forme

$$\int \frac{\mathrm{C}dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)}},$$

C étant une constante réelle, a et α deux constantes imaginaires conjuguées, et il n'a plus ainsi à traiter que l'équation

$$dx^2 + dy^2 = \frac{\mathrm{C}^2dz^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)};$$

il se borne même à chercher les solutions pour lesquelles les expressions rationnelles de x et y ne contiennent, en dénominateur, aucun facteur différent de ceux du second membre, $z \pm a$, $z \pm \alpha$.

» Dans ce cas particulier, qui paraît du reste un des plus importants, et qui suffit pour montrer comment la méthode générale se prête aux applications, M. Serret prouve que les constantes imaginaires conjuguées a et α doivent satisfaire à une certaine condition nécessaire et suffisante; la valeur du rapport du carré de leur somme au quadruple de leur produit, qui compose le carré du module de la fonction elliptique ramenée à la forme ordinaire $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$, ne peut pas être prise à volonté; elle doit être choisie parmi les racines de certaines équations algébriques dont le degré est arbitraire, et qui contiennent en outre, dans leurs coefficients, un nombre entier indéterminé, de manière que pour chaque degré le nombre des racines est infini. Quand le module satisfait à une de ces équations, on obtient aisément les deux quantités $x + y\sqrt{-1}$, $x - y\sqrt{-1}$, et, par suite,

x et y. On a de la sorte une infinité de fonctions elliptiques de première espèce, dont les valeurs s'expriment par un arc de courbe algébrique, ou, réciproquement, une infinité de courbes algébriques, dont les arcs s'expriment par des fonctions elliptiques de première espèce, et participent, dès lors, aux propriétés de ces fonctions relativement à l'addition, la soustraction, la multiplication et la division en parties égales.

» On peut distinguer les courbes dont nous parlons, en classes, d'après le degré de l'équation à laquelle satisfait le carré du module. L'exemple déjà connu de la lemniscate, dont les arcs s'expriment par la fonction elliptique de première espèce au module $\sqrt{\frac{1}{2}}$, se trouve bien élégamment généralisé dans la première classe où l'on rencontre tous les modules de la forme $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. L'analyse de M. Serret suppose essentiellement n entier; mais nous nous sommes assurés que les formules auxquelles elle conduit finalement conservent leurs principales propriétés, lorsqu'on prend n fractionnaire. Ainsi les carrés des modules peuvent être des fractions proprement dites quelconques, sans que les courbes correspondantes cessent d'être algébriques, et d'offrir par leurs arcs une représentation des intégrales; seulement, les valeurs de x et y ne sont plus rationnelles en z.

» Le Mémoire de M. Serret renferme, comme on voit, des résultats utiles, remarquables. On savait depuis longtemps qu'il existe une courbe du sixième degré dont les arcs représentent, à une quantité algébrique près, les fonctions elliptiques de première espèce. On peut même, dans chaque cas, faire disparaître la quantité complémentaire algébrique, en prenant convenablement les extrémités de l'arc; mais, à cause des deux extrémités variables, il y a, en quelque sorte, deux arcs employés, et ce n'est pas par un élément $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, mais par la différence de deux éléments, que la différentielle de la fonction elliptique se trouve exprimée. Sous un certain point de vue, une telle représentation doit être regardée comme imparfaite. Nous avons, au contraire, un mode parfait de représentation dans la lemniscate; aussi les géomètres ont-ils étudié cette courbe avec beaucoup de soin. Or, M. Serret nous fait connaître une infinité de courbes algébriques dont les arcs jouissent aussi de la propriété d'avoir une différentielle identiquement égale à celle d'une fonction elliptique de première espèce; de là un nouveau champ ouvert aux spéculations géométriques. La réduction des quadratures aux rectifications, considérée en général, et la résolution des équations indéterminées dont elle dépend, appartiennent d'ailleurs à une branche étendue et difficile de l'analyse que l'on a jusqu'ici à peine effleurée. Le succès que M. Serret vient d'obtenir dans cette matière délicate donnera lieu, sans doute, à de nouvelles tentatives dont la science profitera. Nous pensons donc que le Mémoire de ce jeune géomètre mérite d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport ont été adoptées.