JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUGUSTE MIQUEL

Mémoire de Géométrie, (deuxième partie.) Angles curvilignes, intersections des cercles et des sphères

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 347-350.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__347_0>

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. AUGUSTE MIQUEL.

(DEUXIÈME PARTIE.)

ANGLES CURVILIGNES, INTERSECTIONS DES CERCLES ET DES SPHÈRES.

I.

Dans la première partie de ce Mémoire (*voir* le tome IX de ce Journal, page 20), j'ai prouvé que, lorsque quatre circonférences de cercle tracées sur un plan se coupent consécutivement deux à deux sur une même circonférence de cercle, les quatre autres points d'intersection de ces mêmes circonférences se trouvent sur une sixième circonférence de cercle. Je vais faire voir que cette proposition est encore vraie lorsque la figure est tracée sur une surface de sphère. Auparavant, je démontrerai le théorème suivant de M. Guénaud d'Aumont : *Lorsqu'un quadrilatère, formé sur la surface d'une sphère par quatre arcs de cercle, est inscrit à une circonférence, la somme de deux angles opposés est égale à celle des deux autres.* Soient, en effet, ab, bc, cd, da les arcs de cercle qui forment le quadrilatère inscrit à la circonférence $abcd$; il est évident que la somme des trois angles formés à chacun de ses sommets dans l'intérieur de cette circonférence est égale à deux angles droits; donc la somme des six angles formés aux sommets opposés a et c est égale à la somme des six autres angles formés aux points b et d; retranchant de part et d'autre les angles qui sont égaux comme symétriques, on a la somme des angles $a + c$ du quadrilatère curviligne égale à la somme des deux autres $b + d$.

Pour démontrer la réciproque du théorème précédent, supposons qu'on ait un quadrilatère curviligne A'B'C'D' (*fig.* 2 de la première partie) dans lequel la somme de deux angles opposés soit égale à celle des deux autres; faisons passer une circonférence de cercle par les trois points A', D', C', et prolongeons les arcs de cercle suffisamment;

il est clair que la somme des trois angles adjacents formés au point A′ intérieurement à la circonférence C′A′D′ égale deux droits, et qu'il en est de même de la somme des trois angles intérieurs formés au point C′; remplaçant dans la somme de ces six angles la somme des deux angles A′ et C′ du quadrilatère A′B′C′D′ par la somme des deux autres qui leur est égale par hypothèse, et retranchant ensuite du résultat, qui est toujours égal à quatre angles droits, la somme des trois angles du triangle A′C′D dont les trois côtés passent par un même point D′, en ayant égard à l'égalité des angles symétriques et à celle des angles opposés par le sommet, on trouve que la somme des trois angles intérieurs du triangle A′BC′ égale deux droits. Donc, d'après une proposition démontrée dans la première partie de ce Mémoire, les trois arcs de cercle qui forment ce triangle se coupent en un même point B′, et par suite, la circonférence A′D′C′ passant par le point B′, on voit que, réciproquement, un quadrilatère tracé sur une surface plane ou sphérique est inscriptible à une circonférence de cercle lorsque la somme de deux de ses angles opposés est égale à celle des deux autres.

Venons maintenant à l'extension qu'il s'agit de prouver (la *fig.* 2 de la première partie étant supposée tracée sur la surface d'une sphère), en supposant qu'on ait cercle ABCD, cercle AA′B′B, cercle BB′C′C, cercle CC′D′D et cercle DD′A′A, je dis qu'il en résultera cercle A′B′C′D′. En effet, de ce qu'on a cercle ABCD, il est clair que dans le quadrilatère AA′BB′CC′DD′A la somme des deux angles intérieurs formés aux points A et C est égale à la somme des deux angles D et B du même quadrilatère. Remplaçant chacun de ces angles par son symétrique, et celui-ci par son opposé au sommet, on voit que, dans le quadrilatère A′B′C′D′, la somme de deux angles opposés est égale à celle des deux autres; donc ce quadrilatère se trouve inscrit à une même circonférence de cercle; ce qu'il fallait démontrer.

II.

Le théorème précédent revient évidemment au suivant : *Lorsque trois circonférences de cercle* ABB′, CBB′, ACB *ont un point commun* B, *si, après avoir pris trois points* A′, C′, D, *respectivement sur chacun des trois côtés du triangle curviligne* ACB′, *on fait passer une circonférence de cercle par chacun de ses sommets, et par chacun des points pris sur les* *côtés qui aboutissent à ce sommet, les trois circonférences* AA′D, CC′D, B′C′A′ *ainsi obtenues se couperont en un même point* D′.

Dans tout quadrilatère complet formé par quatre arcs de cercle qui, prolongés, se coupent en un même point, les circonférences de cercle circonscrites à chacun des quatre triangles qu'on obtient en faisant successivement abstraction d'un des côtés du quadrilatère se coupent toutes quatre en un même point. Soit le quadrilatère CSMNFA de la *fig.* 5 de la première partie, dont les côtés passent tous par le point I; je dis que les quatre circonférences FMN, ASM, ANC, CMF se coupent en un même point M′. La démonstration de ce théorème revient, au moyen de ce qui vient d'être dit précédemment, à celle que j'en ai donnée pour le quadrilatère rectiligne, dans le tome III de ce Journal, page 485.

Dans tout pentagone étoilé formé par des arcs de cercle qui, prolongés suffisamment, se coupent tous en un même point I, *les cinq circonférences de cercle circonscrites aux cinq triangles extérieurs* ASM, FMN, ENL, CLR, BRS, *se coupent consécutivement deux à deux en cinq points* N′, L′, R′, S′, M′, *qui se trouvent sur une même circonférence de cercle* (*fig.* 5 de la première partie).

En effet, d'après le théorème précédent, le point M′ d'intersection des deux circonférences consécutives FMN et ASM peut être considéré comme le point d'intersection des deux circonférences FMN et FSC; pareillement, le point R′ peut être considéré comme l'intersection de la circonférence CLR avec la circonférence FSC. Or les quatre circonférences FMN, FSC, LRC, ENL se coupent consécutivement deux à deux en quatre points F, N, L, C qui sont évidemment sur une même circonférence de cercle; donc les quatre autres intersections M′, R′, L′, N′ sont sur une même circonférence de cercle.

On démontrerait absolument de la même manière que les quatre points S′, R′, L′, N′ sont sur une même circonférence; donc les cinq points M′, N′, L′, R′, S′ sont sur une même circonférence de cercle.

La proposition précédente étant également vraie sur un plan et sur la surface de la sphère, comme dans le premier cas le point I peut passer à l'infini sans que les sommets M, N, L, R, S changent de position, auquel cas les côtés du pentagone deviennent des lignes droites, il en résulte le théorème analogue que j'ai déjà démontré directement dans le tome III de ce Journal.

III.

Lorsque six sphères se coupent consécutivement trois à trois en huit points situés sur une même surface sphérique, leurs huit autres points d'intersection symétriques des premiers sont sur une huitième surface de sphère.

Les six circonférences de cercle de la *fig.* 2 de la première partie, étant supposées tracées sur une surface sphérique que j'appellerai S, supposons que par chacune d'elles on fasse passer une surface de sphère de rayon arbitraire, mais suffisamment grand. Ces sphères, qui peuvent être appelées sphère A′B′C′D′, sphère AA′B′B, etc., se coupent évidemment trois à trois sur la sphère S aux points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′. Elles se couperont encore généralement en huit autres points de l'espace que je désignerai par a, b, c, d, a', b', c', d' sans les marquer sur la figure. Avec les huit premiers, ces points appartiendront évidemment deux à deux à trois mêmes sphères.

Cela posé, les quatre points a', b', c', d', par exemple, peuvent être considérés comme formés sur la sphère A′B′C′D′ par la rencontre des circonférences consécutives suivant lesquelles cette sphère A′B′C′D′ se trouve coupée par les sphères AA′B′B, BB′C′C, CC′D′D, DD′A′A. Or il est clair que ces quatre circonférences tracées sur la sphère A′B′C′D′ s'y coupent consécutivement en quatre points A′, B′, C′, D′ qui sont sur une circonférence de cercle A′B′C′D′; donc, d'après un des théorèmes précédents, les quatre autres intersections a', b', c', d' sont sur une même circonférence de cercle, ce que nous pouvons exprimer en disant qu'on a cercle $a'b'c'd'$. On obtiendrait, par des raisonnements analogues, cercle $abcd$, cercle $aa'b'b$, cercle $bb'c'c$,....

Imaginons maintenant une sphère qui passe par les quatre points a, a', b', c', elle passera encore par le point d'; car la circonférence $a'b'c'd'$ ayant trois points a', b', c' sur la surface sphérique, $aa'b'c'$ y est tout entière; donc on a sphère $aa'b'c'd'$. Par la même raison, ayant à la fois sphère $aa'b'c'd'$ et cercle $aa'b'b$, il en résulte sphère $aba'b'c'd'$; or on a cercle $bb'c'c$; on en déduit donc encore sphère $abca'b'c'd'$. On obtiendrait enfin de la même manière, à cause de cercle $cc'd'd$, sphere $abcda'b'b'c'd'$; ce qui démontre la proposition énoncée.