JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C. BRIOT

Théorie des points singuliers dans les courbes planes algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 368-378.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__368_0>

THÉORIE
DES POINTS SINGULIERS
DANS LES COURBES PLANES ALGÉBRIQUES;

Par C. BRIOT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

§ I.

Caractère général des points singuliers.

L'idée fondamentale de la théorie que je vais exposer est due à M. Sturm, et a été indiquée par M. Liouville dans son cours à l'École Polytechnique. J'ai cru faire une chose utile en lui donnant ici tous les développements qu'elle comporte.

Une équation algébrique à deux inconnues x et y peut être mise sous la forme

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

$F(x, y)$ représentant un polynôme entier du degré n par rapport à x et y. Traçons dans un plan deux axes rectangulaires de coordonnées; la série des points du plan dont les coordonnées satisfont à l'équation (1) peut être considérée comme la représentation géométrique des solutions réelles de cette équation.

Soient M l'un de ces points, a et b ses coordonnées; nous nous proposons de rechercher quels sont les points voisins du point M qui jouissent de la propriété énoncée. Appelons $a + h$, $b + k$ les coordonnées d'un point voisin, l'équation (1) se développe ainsi :

$$\frac{dF}{da} h + \frac{dF}{db} k + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{da^2} h^2 + 2\frac{d^2F}{da\,ab} hk + \frac{d^2F}{db^2} k^2\right) + \ldots = 0. \tag{2}$$

Du point M comme centre avec un rayon ρ infiniment petit, décrivons une circonférence (*Pl. II, fig.* 1), et recherchons les points de cette circonférence qui satisfont à l'équation proposée. En appelant θ l'angle du rayon vecteur avec une parallèle à l'axe des x, on a

$$h = \rho \cos \theta,$$
$$k = \rho \sin \theta;$$

d'ailleurs il est toujours possible de déterminer un module H et un angle α, tels que

$$\frac{d\mathrm{F}}{da} = -\mathrm{H} \sin \alpha,$$
$$\frac{d\mathrm{F}}{db} = \mathrm{H} \cos \alpha;$$

l'équation (1) prend alors la forme

$$(3) \qquad \mathrm{H} \sin(\theta - \alpha) + \mathrm{P}\rho + \mathrm{Q}\rho^2 + \ldots = 0.$$

Le rayon ρ étant infiniment petit, si H n'est pas nulle, l'équation (3) ne pourra être satisfaite que par des valeurs de θ voisines de celles qui annulent $\sin(\theta - \alpha)$, c'est-à-dire voisines de α ou de $180° + \alpha$. Par le point M menons donc une droite faisant l'angle α avec l'axe des x, les points cherchés ne pourront se trouver que dans le voisinage des points A et A' où cette droite coupe la circonférence. En effet, donnons à θ une valeur différant de α ou de $180° + \alpha$ d'une quantité supérieure ou égale à l'angle Θ très-petit, mais déterminé, il sera possible de trouver une quantité très-petite e, telle que, pour toute valeur de ρ inférieure ou égale à e, le premier terme du polynôme

$$(4) \qquad \mathrm{H} \sin(\theta - \alpha) + \mathrm{P}\rho + \mathrm{Q}\rho^2 + \ldots$$

obtienne une valeur numérique plus grande que la somme de tous les autres termes, et par conséquent donne son signe au polynôme. Considérons la dérivée

$$(5) \qquad \mathrm{H} \cos(\theta - \alpha) + \frac{d\mathrm{P}}{d\theta}\rho + \ldots$$

du polynôme (4) par rapport à θ. Le premier terme de cette dérivée ne s'annulant pour aucune des valeurs de θ comprises entre $\alpha - \Theta$

et $\alpha + \Theta$, ou bien entre $180^\circ + \alpha - \Theta$ et $180^\circ + \alpha + \Theta$, on pourra de même pour chacune de ces valeurs de θ trouver une quantité très-petite e' telle que toute valeur de ρ inférieure ou égale à e' rende ce premier terme supérieur numériquement à la somme de tous les autres. Appelons ε la plus petite des quantités e et e', et supposons que le rayon de la circonférence décrite autour du point M soit égal ou inférieur à ε; menons d'ailleurs deux droites BB′ et CC′ qui fassent de part et d'autre avec AA′ l'angle Θ. De ce qui précède on conclura : 1° Que le polynôme (4) étant positif pour tous les points de l'arc BC′ et négatif pour tous les points de l'arc B′C, ces deux arcs ne renferment aucune solution de l'équation (1); 2° que ce même polynôme, fonction continue de θ (car il est facile de démontrer qu'un polynôme entier par rapport au sinus et au cosinus d'un arc est une fonction continue de cet arc), ayant des valeurs de signes contraires aux deux extrémités de chacun des arcs BC et B′C′, chacun de ces deux arcs contient une solution au moins de l'équation proposée; 3° qu'enfin, la dérivée du polynôme (4) ne s'annulant pour aucun des points des arcs BC et B′C′, chacun de ses deux arcs ne renferme qu'une solution.

Concevons maintenant que ρ décroisse d'une manière continue de ε à o, chacune des valeurs de ρ donnera dans chacun des deux angles infiniment petits BMC, B′MC′ un point particulier, et la série de ces points formera évidemment une courbe continue passant au point M. Ainsi :

THÉORÈME. *Une équation algébrique à deux inconnues représente généralement une courbe continue.*

Comme l'angle 2Θ peut être rendu aussi petit que l'on voudra, la droite AA′, qui a pour équation

$$\frac{dF}{da}(x-a) + \frac{dF}{db}(y-b) = 0,$$

est tangente à la courbe au point M.

Étudions la forme de la courbe dans le voisinage de ce point. Pour cela, dans le polynôme (4), faisons $\theta = \alpha$ ou $\theta = 180^\circ + \alpha$; le premier terme s'annule, de sorte que le polynôme se réduit à

$$P\rho + Q\rho^2 + \ldots; \tag{6}$$

on pourra trouver une quantité petite e'' telle que pour toute valeur de ρ inférieure ou égale à e'', le premier terme du polynôme (6) qui ne s'annule pas donne son signe au polynôme. Appelons ε' la plus petite des quantités ε et e'', et supposons que la circonférence décrite autour du point M ait un rayon inférieur à ε'. Observons d'ailleurs que pour $\theta = \alpha$ et pour $\theta = 180^\circ + \alpha$, les coefficients P, Q,... ont la même valeur numérique, les coefficients d'ordre impair avec le même signe, ceux d'ordre pair avec des signes contraires. Cela posé, si le premier terme qui ne s'annule pas dans le polynôme (6) est de rang impair, le polynôme (4) aura même signe, par exemple le signe +, en A et A', et, par suite, les deux points de la courbe seront situés, l'un entre A et C, l'autre entre A' et B'; dans ce cas la courbe est convexe et la concavité est dirigée dans le sens des x négatives : si le signe commun était —, la courbe serait encore convexe, mais la concavité serait dirigée dans le sens des x positives. Dans le cas où le premier terme qui ne s'annule pas dans le polynôme (6) est d'ordre pair, il est aisé de voir que la courbe passe d'un côté à l'autre de la tangente, c'est-à-dire que le point M est un point d'inflexion (*fig.* 2).

L'ordre du premier terme qui ne s'annule pas indique l'ordre de contact entre la courbe et sa tangente. En effet, on peut appeler ordre de contact entre une courbe et sa tangente l'ordre de petitesse du rapport de l'arc compris entre ces deux lignes au rayon ρ du cercle (en regardant ρ comme l'infiniment petit du premier ordre), ou, en d'autres termes, l'ordre de petitesse de l'angle formé par la tangente et le rayon vecteur allant du point M à un point voisin, en prenant pour infiniment petit du premier ordre la distance de ces deux points. Soit $\theta - \alpha = \theta'$; l'équation (3) devient

$$H \sin \theta' + P\rho + Q\rho^2 + \ldots + U\rho^m + \ldots = 0, \tag{7}$$

dans laquelle U représente le premier coefficient qui ne s'annule pas pour $\theta' = 0$. En observant que les coefficients qui s'annulent pour $\theta' = 0$ contiennent $\sin \theta'$ en facteur commun, nous verrons que pour satisfaire à l'équation (7), $\sin \theta'$, et par suite θ' doivent être des infiniment petits de l'ordre m.

On peut trouver par les mêmes considérations le cercle osculateur;

appelons K la valeur de P pour $\theta = \alpha$, l'équation

$$H \sin(\theta - \alpha) + K\rho = 0$$

représente un cercle qui a un contact du second ordre avec la courbe; le rayon du cercle osculateur est donc $\frac{H}{2K}$.

De tout ce qui précède, on déduit la conclusion générale suivante :

THÉORÈME. *Étant donnés une équation algébrique*

$$F(x, y) = 0$$

et un point dont les coordonnées satisfaisant à l'équation proposée n'annulent pas à la fois les deux dérivées du premier membre par rapport à x et à y, en ce point passe une branche de courbe simple avec ou sans inflexion.

Si donc on ne range pas parmi les singularités des courbes les inflexions et les contacts d'ordres supérieurs, on peut dire :

THÉORÈME. *Les points singuliers ne se trouvent que parmi ceux dont les coordonnées annulent à la fois les deux premières dérivées du premier membre de l'équation proposée.*

§ II.

Distinction des points singuliers.

Soit M un point dont les coordonnées satisfont aux trois équations

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{dF(x, y)}{dx} = 0, \quad \frac{dF(x, y)}{dy} = 0;$$

l'équation (3) se réduit à la forme générale

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{r} \left(\frac{d^m F}{da^m} \cos^m \theta + \frac{m}{1} \frac{d^m F}{da^{m-1}\, db} \cos^{m-1}\theta \sin\theta + \ldots + \frac{d^m F}{db^m} \sin^m \theta \right) \\ + S\rho + T\rho^2 + \ldots \end{array} \right\} = 0,$$

m étant un nombre entier au plus égal au degré n de l'équation.

Pour satisfaire à l'équation (8), il faut donner à θ des valeurs voisines de celles qui annulent son premier terme; cherchons donc les solutions de l'équation

$$(9)\qquad \frac{d^mF}{db^m}\sin^m\theta + \frac{m}{1}\frac{d^mF}{db^{m-1}\,da}\sin^{m-1}\theta\cos\theta + \ldots + \frac{d^mF}{da^m}\cos^m\theta = 0.$$

Si $\frac{d^mF}{db^m}$ n'est pas nul, la valeur o donnée à $\cos\theta$ ne satisfaisant pas à l'équation (9), on peut diviser tous les termes par $\cos^m\theta$, ce qui met cette équation sous la forme

$$(10)\qquad \frac{d^mF}{db^m}\operatorname{tang}^m\theta + \frac{m}{1}\frac{d^mF}{db^{m-1}\,da}\operatorname{tang}^{m-1}\theta + \ldots = 0,$$

ou, si l'on pose $\operatorname{tang}\theta = u$,

$$(11)\qquad \frac{d^mF}{db^m}u^m + \frac{m}{1}\frac{d^mF}{db^{m-1}\,da}u^{m-1} + \ldots = 0;$$

l'équation (8) peut aussi s'écrire de la même manière,

$$(12)\qquad \left(\frac{d^mF}{db^m}u^m + \frac{m}{1}\frac{d^mF}{db^{m-1}\,da}u^{m-1} + \ldots\right) + \cos\theta\, S'\rho + \cos^2\theta\, T'\rho^2 + \ldots = 0,$$

S', T',... représentant des polynômes entiers par rapport à u. Cette équation, résolue par les méthodes ordinaires, a m racines; ce qui donne sur la circonférence $2m$ points diamétralement opposés deux à deux.

Si les m' premiers coefficients du premier membre de l'équation (9) sont nuls (m' étant un nombre inférieur à m), cette équation se décompose en deux équations

$$(13)\qquad \cos^{m'}\theta = 0,$$

et

$$(14)\qquad \frac{d^mF}{db^{m-m'}\,da^{m'}}u^{m-m'} + \ldots = 0.$$

La première donne une racine du degré m' de multiplicité; cette racine est $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$. La seconde donne $m-m'$ racines différentes de la précédente. Ainsi, en résumé, si nous ne faisons varier θ que de 0° à 180°, en convenant de regarder deux points diamétralement opposés comme une seule solution, nous pourrons dire que l'équation (9) a m racines. Il n'y a lieu à considérer parmi ces m racines que les racines réelles; nous les distinguerons en racines simples et en racines multiples.

Soient (*fig.* 3) A_1, A_2, A_3,..., A'_1, A'_2, A'_3,... les diverses solutions de l'équation (9); B_1, C_1, B_2, C_2, B_3, C_3,... des points distants des premiers de l'angle très-petit Θ, plus petit que la plus petite différence qui existe entre les racines de l'équation (9). Le premier membre de l'équation (9), et, par suite, le premier membre de l'équation (8), si ρ est suffisamment petit, ne s'annulent pas et conservent le même signe dans toute l'étendue des arcs B_1C_2, B_2C_3, B_3C_4,.... Les solutions cherchées ne peuvent donc se trouver que dans les arcs infiniment petits B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3,.... Or il est facile de voir que les polynômes dont nous venons de parler auront aux deux extrémités de chacun de ces arcs, même signe, si cet arc correspond à une racine d'un degré pair de multiplicité, et des signes contraires si le degré de multiplicité est impair. En effet, distinguons la solution $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$ qui, si elle existe, provient de l'équation (13), et les autres solutions qui toutes proviennent de l'équation (14). Dans le premier cas, nous mettrons le polynôme (8) sous la forme

$$G\cos^{m'}\theta + S\rho + T\rho^2 + \ldots; \tag{15}$$

G ne s'annulant pas pour $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$, on peut choisir Θ assez petit pour que cette quantité conserve le même signe de $90^\circ - \Theta$ à $90^\circ + \Theta$, et de $270^\circ - \Theta$ à $270^\circ + \Theta$. Dans le second cas, en appelant u_0 la tangente de l'angle qu'on considère, et m' le degré de multiplicité, le polynôme (8) s'écrira

$$G(u - u_0)^{m'} + S\rho + T\rho^2 + \ldots. \tag{16}$$

Ainsi chacun des arcs B_1C_1, B_2C_2,... *renferme un nombre pair* (o étant compris dans les nombres pairs) *ou un nombre impair de solutions, suivant que le degré de multiplicité correspondant est pair ou impair.* En outre, *ce nombre de points sera au plus égal au degré m' de multiplicité;* car s'il était plus grand, il faudrait que la dérivée d'ordre m' des polynômes (15) ou (16) s'annulât dans l'étendue de l'arc dont il s'agit, ce qui est impossible, puisque l'une et l'autre de ces dérivées contiennent un terme de la forme $G\sin^{m'}\theta$ ou G.

Les racines simples n'offrent aucune difficulté; chacune d'elles fournit une branche de courbe particulière, avec ou sans inflexion.

Étudions une racine double $\theta = \alpha$, et soit AA′ (*fig.* 4) la droite correspondante. Nous pouvons diviser par G les polynômes (15) et (16), ce qui nous donne

$$(17) \qquad \cos^2\theta + S'\rho + T'\rho^2 + \ldots,$$

$$(18) \qquad (u - u_0)^2 + S'\rho + T'\rho^2 + \ldots.$$

Aux extrémités des arcs BC et B′C′, ces polynômes ont le signe +.

Si le premier terme du polynôme

$$(19) \qquad S'\rho + T'\rho^2 + \ldots,$$

qui, pour $\theta = \alpha$ ou $\theta = 180^\circ + \alpha$, ne s'annule pas, est d'ordre pair, ce terme, et, par suite, le polynôme auront le même signe en A et A′. Supposons que ce soit le signe $-$; dans ce cas, il y a une solution de chaque côté des points A et A′, et la courbe a la forme représentée par la *fig.* 4. Lorsque ce signe commun est +, il y a ambiguïté; chacun des deux arcs BC et B′C′ peut ne contenir aucune solution, ou bien en contenir deux placées d'un même côté de A et A′. Si le premier terme du polynôme (19), qui, pour $\theta = \alpha$ ou $\theta = 180^\circ + \alpha$, ne s'annule pas, est d'ordre impair, ce premier terme, et, par suite, le polynôme auront des signes contraires en A et A′, par exemple le signe $-$ en A et le signe + en A′; l'arc BC renferme alors deux solutions, une de chaque côté de A, mais il y a incertitude pour l'autre arc B′C′. Cette incertitude peut être levée aisément si le premier terme dont nous avons parlé est S′. Écrivons, en effet, les polynômes sous la forme

$$\cos^2\theta + \rho\,(S' + T'\rho + \ldots),$$
$$(u - u_0)^2 + \rho\,(S' + T'\rho + \ldots);$$

S′ donne son signe à la parenthèse dans toute l'étendue de l'arc B′C′, et, par suite, le polynôme, somme de deux quantités positives, ne peut s'annuler. Dans ce cas, la courbe offre donc en M un rebroussement de première espèce (*fig.* 5).

Cherchons maintenant un moyen de faire disparaître l'incertitude que nous avons rencontrée dans la discussion de la racine double. Laissons de côté, pour le moment, la solution $\theta = 90°$ ou $\theta = 270°$ si elle existe; il sera permis, dans l'étude des autres racines, de substituer à la circonférence décrite autour du point M deux parallèles à l'axe des y, situées de part et d'autre de M à une distance infiniment petite h (*fig.* 6). De cette manière, l'équation de la courbe prend la forme

$$G(u-u_0)^2 + Sh + Th^2 + \ldots = 0, \tag{20}$$

dans laquelle G, S, T,... représentent des polynômes entiers en u, et G ne s'annule pas pour $u = u_0$. Pour satisfaire à cette équation, il faut nécessairement que $u - u_0$ soit une quantité infiniment petite; posons donc

$$u = u_0 + u'h,$$

l'équation (20) devient (S_0 étant nulle)

$$\left(G_0 u'^2 + \frac{dS_0}{du_0} u' + T_0\right) + S'h + T'h^2 + \ldots = 0. \tag{21}$$

On étudiera l'équation (21) de la même manière que l'équation (20) par la considération des deux racines de l'équation du deuxième degré

$$G_0 u'^2 + \frac{dS_0}{du_0} u' + T_0 = 0.$$

Lorsque les racines sont imaginaires, les arcs BC et B'C' ne renferment aucune solution. Lorsque les racines sont réelles et inégales, l'équation (21), et, par suite, l'équation (20) admet deux solutions dans chacun des arcs; on a, dans ce cas, une branche double. Enfin, lorsque les racines sont réelles et égales, l'équation (21) peut s'écrire

$$G_0(u' - u'_0)^2 + S'h + T'h^2 + \ldots = 0. \tag{22}$$

Si $\frac{S'_0}{G_0}$ n'est pas nulle et a, par exemple, le signe $-$, l'équation (22) a deux solutions pour $h > 0$, et aucune pour $h < 0$; dans ce cas, la courbe offre en M un rebroussement de deuxième espèce (*fig.* 6), à moins que u'_0 ne soit nulle, auquel cas le rebroussement serait de première espèce. Si $S'_0 = 0$ et que l'ambiguïté se présente, on fera subir à l'équation (22) la même transformation que nous avons fait subir tout à l'heure à l'équation (21); et ainsi de suite.

La méthode que nous venons d'employer dans la discussion d'une racine double peut être généralisée et étendue à une racine d'un degré quelconque de multiplicité; afin d'éviter les imaginaires, on posera

$$h = i\varepsilon,$$

ε représentant une quantité positive infiniment petite, i le nombre $+ 1$ pour la parallèle de droite, et le nombre $- 1$ pour celle de gauche.

§ III.

Autre méthode pour la distinction des points singuliers.

Remplaçons encore la circonférence décrite autour du point M par deux parallèles à l'axe des y situées à la distance infiniment petite ε et de part et d'autre du point M; l'équation de la courbe se met sous la forme générale

$$(23) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \left(\dfrac{d^m F}{db^m} u^m + \dfrac{m}{1} \dfrac{d^m F}{db^{m-1} da} u^{m-1} + \ldots + \dfrac{d^m F}{da^m}\right) \\ + iS\varepsilon + T\varepsilon^2 + iU\varepsilon^3 + \ldots \end{array} \right\} = 0,$$

dans laquelle S, T, U,... représentent des polynômes entiers en u.

Commençons par résoudre l'équation

$$(24) \qquad \frac{d^m F}{db^m} u^m + \frac{m}{1} \frac{d^m F}{db^{m-1} da} u^{m-1} + \ldots + \frac{d^m F}{da^m} = 0,$$

et soient $u_0, u_1, \ldots$ ses différentes racines; ordonnons ensuite le polynôme (23) par rapport à u, et appliquons à ce polynôme le théorème de M. Sturm, c'est-à-dire divisons-le par sa dérivée, celle-ci par le reste changé de signe, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste indépendant de u. Les coefficients étant des polynômes entiers en ε, il sera souvent nécessaire, pour effectuer une division, de multiplier par un polynôme en ε; or il faut avoir soin que ces multiplicateurs soient positifs: pour cela, comme ε est infiniment petit, il suffira que le terme le moins élevé en ε soit positif. Appelons

$$(25) \qquad A, \quad B, \quad C, \ldots, \quad F$$

la série des polynômes ainsi obtenus et ordonnés par rapport aux puissances croissantes de ε. Donnons à u une valeur un peu plus petite que l'une quelconque des racines de l'équation (24), que u_0 par exemple, et comptons le nombre des variations que présente la série (25); chaque polynôme prenant le signe de son premier terme, on considérera simplement les premiers termes. Donnons ensuite à u la valeur u_0, puis une valeur un peu plus grande, et comptons de même les variations. Les nombres de variations perdues dans ces deux intervalles indiquent exactement les nombres de solutions situées dans le voisinage de la racine u_0, soit d'un côté, soit de l'autre.

La méthode que nous venons d'exposer pour la discussion d'une courbe plane peut s'appliquer aux surfaces courbes; ce sera l'objet d'un autre Mémoire.