JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. CAQUÉ

Note sur la formule de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 379-382.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__379_0>

NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR;

Par M. J. CAQUÉ.

1. Soit $y = f(x)$ une fonction donnée de x, et désignons par y_1, $y_2, \ldots$ les valeurs qu'elle prend quand x augmente successivement de la constante Δx, en sorte que $y_k = f(x + k\Delta x)$. En représentant par $\Delta^n y_k$ la différence $n^{ième}$ de y_k, on a, quels que soient n et k,

$$\text{(A)} \qquad \Delta^n y_k = \Delta^n y + (\Delta^{n+1} y + \Delta^{n+1} y_1 + \ldots + \Delta^{n+1} y_{k-1}),$$

équation qui n'est, en effet, que la différence $n^{ième}$ de l'équation évidente

$$y_k = y + \Delta y + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{k-1}.$$

Cette dernière, en remplaçant k par m et posant $m\Delta x = h$, donne aussi

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + (\Delta y + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{m-2} + \Delta y_{m-1}).$$

Mais, si dans l'équation (A) on fait $n = 1$, puis successivement $k = 1$, $k = 2, \ldots$, $k = m - 1$, on aura des valeurs de Δy_1, $\Delta y_2, \ldots$, Δy_{m-1}, qui, portées dans l'équation (1), nous donneront, réduction faite,

$$(2) \quad f(x+h) = f(x) + m\Delta y + \left[(m-1)\Delta^2 y + (m-2)\Delta^2 y_1 + \ldots + 2\Delta^2 y_{m-3}\,\Delta^2 + y_{m-2}\right]$$

On pourrait reprendre de nouveau l'équation (A), y poser $n = 2$, puis successivement $k = 1$, $k = 2, \ldots$, $k = m - 2$, et reporter dans l'équation (2) les valeurs de $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2, \ldots$, $\Delta^2 y_{m-2}$ ainsi obtenues; en réduisant, on aurait

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x+h) = f(x) + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y \\ & + \left[\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\Delta^3 y_1 + \ldots + 3\Delta^3 y_{m-4} + \Delta^3 y_{m-3}\right]. \end{aligned} \right.$$

Et l'on pourrait continuer ce mode d'élimination, qui conduirait finalement à la formule

$$(4) \quad f(x+h) = f(x) + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n y + \mathrm{R}_n,$$

R_n remplaçant la quantité suivante, dans laquelle, en général, C_n^{m-g} représente le nombre des combinaisons de $m - g$ lettres n à n :

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{C}_n^{m-1}\Delta^{n+1}y + \mathrm{C}_n^{m-2}\Delta^{n+1}y_1 + \mathrm{C}_n^{m-3}\Delta^{n+1}y_2 + \ldots + \mathrm{C}_n^{n+1}\Delta^{n+1}y_{m-n-2} + \mathrm{C}_n^{n}\Delta^{n+1}y_{m-n-1}.$$

Mais, sans avoir même besoin de passer par l'équation (3), nous allons prouver directement que l'équation (4) a toujours lieu.

D'abord elle est vérifiée pour $n = 1$, puisqu'elle coïncide alors avec l'équation (2). Pour démontrer généralement l'équation (4), il suffit donc de faire voir que, si elle est exacte pour une valeur de n, elle l'est encore pour la valeur suivante.

Dans l'équation (A), remplaçons n par $n + 1$, puis posons successivement $k = 1$, $k = 2, \ldots$, $k = m - n - 1$; les divers résultats, multipliés par des facteurs convenables, forment le tableau suivant :

$$\mathrm{C}_n^{m-1}\Delta^{n+1}y = \mathrm{C}_n^{m-1}\Delta^{n+1}y,$$

$$\mathrm{C}_n^{m-2}\Delta^{n+1}y_1 = \mathrm{C}_n^{m-2}\Delta^{n+1}y + \mathrm{C}_n^{m-2}\Delta^{n+2}y,$$

$$\mathrm{C}_n^{m-3}\Delta^{n+1}y_2 = \mathrm{C}_n^{m-3}\Delta^{n+1}y + \mathrm{C}_n^{m-3}\Delta^{n+2}y + \mathrm{C}_n^{m-3}\Delta^{n+2}y_1,$$

. . . .

. . . .

$$\mathrm{C}_n^{n+1}\Delta^{n+1}y_{m-n-2} = \mathrm{C}_n^{n+1}\Delta^{n+1}y + \mathrm{C}_n^{n+1}\Delta^{n+2}y + \mathrm{C}_n^{n+1}\Delta^{n+2}y_1 + \ldots + \mathrm{C}_n^{n+1}\Delta^{n+2}y_{m-n-3},$$

$$\mathrm{C}_n^{n}\Delta^{n+1}y_{m-n-1} = \mathrm{C}_n^{n}\Delta^{n+1}y + \mathrm{C}_n^{n}\Delta^{n+2}y + \mathrm{C}_n^{n}\Delta^{n+2}y_1 + \ldots + \mathrm{C}_n^{n}\Delta^{n+2}y_{m-n-3} + \mathrm{C}_n^{n}\Delta^{n+2}y_{m-n-2}.$$

En faisant la somme des premiers membres, on reproduit la valeur de R_n; on peut donc écrire que cette quantité est égale à la somme des seconds membres; celle-ci se présentera sous une forme plus simple, en faisant usage de ce théorème d'algèbre :

« La somme des nombres des combinaisons n à n, de $m-g$,
» $m-g-1, \ldots, n+1$, n lettres, est égale au nombre des combi-
» naisons $n+1$ à $n+1$ de $m-g+1$ lettres. »

Conséquemment on aura

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{C}^m_{n+1}\,\Delta^{n+1}y + \mathrm{R}_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2\ldots n.(n+1)}\,\Delta^{n+1}y + \mathrm{R}_{n+1},$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{R}_{n+1} = \mathrm{C}^{m-1}_{n+1}\,\Delta^{n+2}y + \mathrm{C}^{m-2}_{n+1}\,\Delta^{n+2}y_1 + \ldots + \mathrm{C}^{n+2}_{n+1}\,\Delta^{n+2}y_{m-n-3} + \mathrm{C}^{n+1}_{n+1}\,\Delta^{n+2}y_{m-n-2}.$$

Or cette valeur de R_n, mise dans l'équation (4), donne le même résultat que la substitution de $n+1$ à n dans la même équation; donc l'équation (4) a lieu généralement.

2. Si, dans l'équation (4), on remplace m par sa valeur tirée de $m\Delta x = h$, on trouve aisément

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \ldots + \frac{h(h-\Delta x)\ldots[h-(n-1)\Delta x]}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} + \mathrm{R}_n.$$

Le terme complémentaire R_n peut évidemment se mettre sous cette forme

$$\Delta x^{n+1}\left(\mathrm{C}^{m-1}_n\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}} + \mathrm{C}^{m-2}_n\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}} + \ldots + \mathrm{C}^n_n\frac{\Delta^{n+1}y_{m-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right),$$

de sorte qu'en représentant par M la somme des termes entre parenthèses, divisée par la somme C^{m-1}_n + etc. de leurs coefficients, il vient

$$\mathrm{R}_n = \Delta x^{n+1}.(\mathrm{C}^{m-1}_n + \mathrm{C}^{m-2}_n + \ldots + \mathrm{C}^n_n)\,\mathrm{M},$$

c'est-à-dire, en vertu d'un théorème déjà invoqué,

$$\mathrm{R}_n = \Delta x^{n+1}\,\mathrm{C}^m_{n+1}\,\mathrm{M};$$

en mettant donc pour C^m_{n+1} son expression connue, et remplaçant dans cette dernière m par $\frac{h}{\Delta x}$, nous aurons enfin

$$\mathrm{R}_n = \frac{h(h-\Delta x)\ldots(h-n\Delta x)}{1.2\ldots(n+1)}\,\mathrm{M},$$

d'où

$$(5)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\ldots+\frac{h(h-\Delta x)\ldots[h-(n-1)\Delta x]}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}+\frac{h(h-\Delta x)\ldots(h-n\Delta x)}{1.2\ldots(n+1)}\mathrm{M}.$$

Revenons sur l'expression de M, savoir,

$$\mathrm{M}=\frac{\mathrm{C}_n^{m-1}\dfrac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}+\mathrm{C}_n^{m-2}\dfrac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}+\ldots+\mathrm{C}_n^n\dfrac{\Delta^{n+1}y_{m-n-1}}{\Delta x^{n+1}}}{\mathrm{C}_n^{m-1}+\mathrm{C}_n^{m-2}+\ldots+\mathrm{C}_n^n}.$$

Nous voyons que cette quantité est une moyenne entre les quotients

$$\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\quad \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ldots,\quad \frac{\Delta^{n+1}y_{m-n-1}}{\Delta x^{n+1}},$$

de manière qu'elle est toujours comprise entre le plus grand et le plus petit d'entre eux; il suffit donc, pour que M soit finie, que tous le soient, et alors la remarque que nous venons de faire fournit des limites simples de R_n ou du terme complémentaire de la formule (5).

3. Quand on prend la valeur de Δx infiniment petite, les quotients $\frac{\Delta^k y}{\Delta x^k}$ deviennent les dérivées $f^k(x)$, et les numérateurs des coefficients de l'équation (5) deviennent les puissances entières et croissantes de h. La quantité y_{m-n-1} devient $f(x+h)$. Les quotients dont la quantité M dépend se réduisent donc aux valeurs de $f^{n+1}(z)$, en faisant varier z de x à $x+h$. Donc, si dans cet intervalle $f^{n+1}(z)$ reste finie, M le sera aussi, puisqu'elle est toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de cette dérivée.

De plus, si $f^{n+1}(z)$ est continue, elle atteindra au moins une fois la valeur de M, et l'on pourra poser

$$\mathrm{M}=f^{n+1}(x+\Theta h),$$

en désignant par Θ une quantité positive plus petite que l'unité. Ainsi on retrouve par cette méthode la formule connue

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x)$$
$$+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}f^{n+1}(x+\Theta h).$$