JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PHILIPPE BRETON

Théorie géométrique des centres multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 430-434.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__430_0>

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE
DES CENTRES MULTIPLES,

PAR M. PHILIPPE **BRETON**,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

(Extrait par l'auteur.)

On sait depuis longtemps que, si un lieu géométrique a deux centres situés sur une ligne droite, il y en a un nombre infini situé sur cette droite à des distances égales.

Un lieu géométrique à plusieurs centres peut en avoir de plusieurs espèces. Si, par exemple, on pratique une entaille cylindrique dans un cylindre droit, et si l'on fait rouler indéfiniment le cylindre sur un plan, l'arête de l'entaille se développe une fois à chaque tour, et la courbe plane, ainsi engendrée, embrasse une série indéfinie de contours fermés : le système entier a des centres équidistants, alternativement intérieurs et extérieurs.

Je nomme *espèce de centres* la collection de tous les centres d'un lieu géométrique autour desquels le lieu géométrique est disposé de la même manière. Si A et A′ sont deux centres de même espèce ou *homogènes,* tout rayon mené de A à un point du lieu géométrique est égal et parallèle à un rayon mené de A′ à un autre point du même lieu géométrique. Si A et B sont deux centres tels qu'en menant par A un rayon, et par B une droite égale et parallèle à ce rayon, l'extrémité de cette droite puisse ne pas être dans le lieu géométrique, les centres A et B sont *hétérogènes.*

Soient A et B deux centres quelconques d'un lieu géométrique ; si l'on prolonge AB d'une longueur $BA' = AB$, non-seulement A′ est un nouveau centre, mais il est homogène avec A.

Réciproquement, si A et A′ sont deux centres homogènes, le milieu B de leur distance est encore un centre.

Mais si A et B sont deux centres hétérogènes, le milieu de leur distance ne peut être un centre.

Si l'on continue indéfiniment la bissection de la distance de deux centres homogènes, on arrivera à trouver un centre d'une espèce différente de celle des deux premiers, à moins que tous les points de la droite ne soient des centres, et qu'elle ne soit un *axe central*.

Trois centres en ligne droite étant connus, si l'on applique à leur distance le procédé du plus grand commun diviseur, tous les points de division sont des centres. Si donc les distances des trois centres sont incommensurables, tous les points de la ligne droite sont des centres d'une seule espèce, et cette droite est un axe central.

Un lieu géométrique à centres multiples ne peut avoir sur une même droite qu'*une* ou *deux* espèces de centres, savoir, une seule si tous les points de la droite sont des centres, et deux si les centres sont séparés par des intervalles finis. Dans ce cas, les deux espèces alternent ensemble à des distances égales. Je nomme une telle série de centres de deux espèces *alignement de centres*.

Si A, B, C sont trois centres d'espèces quelconques non situés en ligne droite, en achevant le parallélogramme ABCD, le quatrième sommet D sera encore un centre.

En divisant tout le plan en une infinité de parallélogrammes égaux à ABCD par deux systèmes de droites parallèles équidistantes, tous les sommets d'angle sont des centres.

Si les quatre sommets d'un parallélogramme sont des centres homogènes, les milieux des côtés et le centre du parallélogramme sont des centres du lieu géométrique. Les milieux des côtés opposés du parallélogramme sont homogènes entre eux. Ceux des côtés adjacents ne peuvent être homogènes, à moins que le centre du parallélogramme ne soit homogène avec les angles.

Si l'on a quatre centres en parallélogramme, dont deux homogènes entre eux, les deux autres seront aussi homogènes entre eux.

Si l'on a des centres de trois espèces différentes à trois des angles d'un parallélogramme, le quatrième angle sera un centre d'une quatrième espèce.

Lorsqu'on a dans un plan des centres de quatre espèces, on ne peut trouver dans le même plan une cinquième espèce de centres.

Si un lieu géométrique a quatre centres non situés dans un plan, en achevant le parallélipipède dont ces centres sont quatre sommets, les quatre nouveaux sommets sont des centres. Et si les quatre premiers sont de quatre espèces différentes, les quatre autres ne sont homogènes ni entre eux ni avec un des quatre premiers. Les espèces sont alors au nombre de huit.

En divisant tout l'espace par trois systèmes de plans parallèles équidistants, en parallélipipèdes égaux à celui aux sommets duquel on a trouvé huit espèces de centres, on aura des centres à tous les sommets. Il ne peut y avoir un centre d'une neuvième espèce.

Si un lieu géométrique a un axe central et un centre hors de cet axe, on a, dans le plan qui contient ce centre et l'axe, des axes centraux parallèles et de deux espèces différentes, excepté dans le cas où tous les points du plan sont des centres; dans ce cas, je nomme ce plan un *plan central*.

Lorsqu'on a des axes centraux parallèles, tous ceux qui sont situés dans un même plan sont équidistants, et il ne peut y avoir de centre situé hors des axes centraux.

On peut avoir dans l'espace des axes centraux de quatre espèces : ils sont nécessairement parallèles, et disposés comme les quatre espèces de centres qui peuvent exister dans un plan, c'est-à-dire en parallélogrammes égaux.

Si un lieu géométrique a un plan central et un centre hors de ce plan, en menant par ce centre un plan parallèle au plan central, on a un nouveau plan central, et l'on arrive à un système de plans centraux parallèles, équidistants, et de deux espèces.

Les nombres des espèces de centres, d'axes centraux ou de plans centraux sont toujours des puissances de 2. Cette remarque, jointe à la régularité de la distribution des deux, quatre ou huit espèces de centres, donne lieu de présumer qu'il est possible de déduire toutes les propriétés des centres multiples d'un seul et même théorème analytique. Mais l'énoncé même de ce théorème paraît difficile à déterminer.

Comme exemple de surface à huit espèces de centres, on peut étudier celle qui est représentée par l'équation

$$m \cos x + n \cos y + \cos z = a,$$

dans laquelle x, y, z sont trois coordonnées rectangulaires, et m et n deux coefficients numériques. En rapportant cette surface à ses huit espèces de centres prises successivement pour origine des coordonnées, son équation prend une des huit formes

$$\pm m \cos x \pm n \cos y \pm \cos z = a.$$

En faisant dans cette équation

$$a = m + n + 1,$$

elle représente des points isolés, situés aux sommets d'un système de cubes dont les côtés égaux à 2π sont parallèles aux coordonnées. En faisant décroître a, il se forme autour de chacun de ces points des cellules fermées, qui s'allongent dans le sens des z si l'on suppose $m > n > 1$; a continuant à décroître, les cellules se joignent en pointes; puis les pointes sont remplacées par des étranglements, et la surface se compose d'une infinité de tubes alternativement renflés et étranglés; a décroissant encore, les renflements des tubes s'agrandissent et se joignent en pointes dans le sens des y, et les tubes sont remplacés par des nappes ondulées illimitées dans le sens des x et des y : par un nouveau décroissement de a, les sommets des ondes se rapprochent et se joignent en pointes dans le sens des x, puis il se forme des ouvertures à la place de ces pointes, et dès lors toutes les parties de la surface communiquent entre elles. Quand on fait $a = 0$, les huit espèces de centres se confondent deux à deux, mais alors on a quatre espèces de centres superficiels, et la surface rapportée à ces quatre nouvelles espèces de centres prend une des formes

$$m \sin x \pm n \sin y \pm n \sin z = 0,$$

qui, avec celles-ci,

$$m \cos x \pm n \cos y \pm \cos z = 0,$$

complètent les huit especes de centres.

En faisant

$$m = n = 1 \quad \text{et} \quad a = 0,$$

on a la surface qui peut être représentée par une des huit formes

$$\sin x \pm \sin y \pm \sin z = 0,$$
$$\cos x \pm \cos y \pm \cos z = 0.$$

Si l'on coupe cette surface par un plan parallèle aux plans coordonnés et passant par un des centres superficiels, on obtient un système de carrés égaux dont les côtés font avec les axes des angles de $\frac{1}{4}\pi$ et de $\frac{3}{4}\pi$. Les plans tangents à la surface en un centre superficiel la coupent suivant un système de triangles équilatéraux égaux dont les sommets sont tous des centres superficiels de la surface.