JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Notes sur quelques questions de priorité, au sujet d'un Mémoire de M. Mac Cullagh

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 120-123.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__120_0>

Notes sur quelques questions de priorité, au sujet d'un Mémoire de M. Mac Cullagh;

Par M. CHASLES.

I. Depuis mes dernières recherches sur les lignes géodésiques, j'ai eu connaissance d'un Mémoire de M. Mac Cullagh sur les surfaces du second degré [*]. Je m'empresse de dire que la propriété des tangentes communes à deux surfaces homofocales, relative aux segments qu'une troisième surface homofocale fait sur ces droites, se trouve énoncée (sans démonstration) dans ce Mémoire.

J'ai été conduit naturellement à ce théorème, par cette considération, que les tangentes aux lignes géodésiques jouissant déjà de plusieurs propriétés des tangentes aux lignes de courbure, le théorème en question, qui m'était connu depuis longtemps relativement aux lignes de courbure [**], s'appliquait probablement aussi aux lignes géodésiques, et par conséquent aux tangentes communes à deux surfaces homofocales. L'expression générale du rapport $\frac{\mathrm{EE}'}{\mathrm{O}e^2}$, qui m'avait déjà été d'un grand usage dans mon Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes cité précédemment, m'a conduit sans difficulté à la généralisation que j'avais entrevue.

L'intéressant Mémoire de M. Mac Cullagh pourra me donner lieu à plusieurs observations dans un autre moment; je m'arrêterai ici seulement sur quelques questions de priorité où, faute d'avoir connu certains documents que j'avais cru inutile, jusqu'à ce jour, de rappeler, M. Mac Cullagh s'est trouvé induit en erreur.

II. Il suppose que je n'ai fait connaître qu'en 1837, par la publication de mon *Aperçu historique,* mes idées et mes résultats concernant la théorie des *coniques focales* des surfaces du second degré, sur laquelle il a donné lui-même quelques théorèmes dans ses Leçons à l'Université de Dublin, dans le cours de 1836. Sans qu'il soit nécessaire d'examiner ici le théorème principal de M. Mac Cullagh et la manière dont il envisage cette théorie, ce en quoi nos vues sont différentes, il me suffira de citer quelques dates antérieures à 1836, et qui se rapportent à la théorie complète, telle que je l'ai reproduite depuis dans mon *Aperçu historique,* et telle que, à mon sens, elle doit être entendue, pour donner lieu, dans les surfaces du second degré, à des théorèmes analogues (on peut dire identiques) aux propriétés des foyers dans les coniques.

---

[*] Ce Mémoire, dont M. Mac Cullagh m'a fait l'honneur de m'adresser un exemplaire, est extrait des derniers numéros des *Proceedings* de l'Académie royale d'Irlande.

[**] Ce cas se trouve démontré dans mon Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes, page 668.

1°. J'ai adressé le 2 janvier 1835 à l'Académie des Sciences, une ample collection de théorèmes, sous le titre de *Propriétés nouvelles des surfaces du second degré analogues à celles des foyers dans les coniques*. A ces théorèmes étaient jointes beaucoup d'autres propositions relatives notamment aux axes permanents de rotation des corps, et qui offraient des applications variées de cette théorie des focales.

2°. Le journal *l'Institut* fait mention de ce Mémoire, sous son titre, à la date du 7 janvier 1835 (tome III, page 8).

3°. Il est question de la même théorie des focales dans le *Bulletin de l'Académie de Bruxelles*, séance du 7 février 1835, où on lit : « M. Chasles, dans une Lettre adressée » à M. Quetelet, fait connaître différents résultats géométriques sur l'analogie de *cer-* » *taines courbes* considérées dans les surfaces du second degré, et les *foyers* dans les » coniques ou les *lignes focales* dans les cônes.... »

4°. Le journal *l'Institut*, numéro du 22 avril 1835 (tome III, page 129), a reproduit en partie ce passage du *Bulletin de l'Académie de Bruxelles*.

Ainsi mes premières communications authentiques sur cette théorie datent du commencement de 1835, et elles ne se sont pas bornées à quelques théorèmes isolés, dénotant une analogie ou incomplète et restreinte, ou simplement apparente et spécieuse, comme celle que peuvent présenter, sur quelques points, des théories très-différentes: mais elles comprenaient, avec le principe et le point de vue véritable de cette théorie, nouvelle alors et dont même je crois qu'il ne se trouvait aucun germe antérieur, un grand nombre de théorèmes qui constituaient cette théorie dans un état de développement déjà très-avancé, et montraient toute l'importance qu'elle devait acquérir dans la Géométrie, importance qui ne peut être aujourd'hui douteuse aux yeux de personne.

III. M. Mac Cullagh suppose encore que le théorème sur les cônes de même sommet circonscrits à deux surfaces homofocales, savoir, que ces cônes ont les mêmes lignes focales, a été donné en premier lieu par M. Jacobi, dans le Journal de M. Crelle (tome XII, page 137, année 1834), et il ajoute que lui-même l'a fait connaître en 1836 dans ses Leçons à l'Université de Dublin, avant la publication de mon *Aperçu historique*.

Or, dans un Mémoire sur les surfaces de révolution, imprimé en 1829 dans le tome V des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, j'ai d'abord démontré le cas relatif à deux surfaces de révolution; et ayant à démontrer, dans ce même Mémoire, quelques propriétés des deux *coniques conjuguées* déjà connues comme étant, chacune, le lieu des sommets des cônes de révolution passant par l'autre, j'ai annoncé que ces courbes jouissaient de plusieurs autres propriétés, et j'ai cité celle-ci : *De quelque point de l'espace qu'on regarde les deux coniques, elles paraissent toujours se couper à angles droits*. Ainsi voilà déjà, en 1829, deux cas du théorème général. Peu de temps après, dans un Mémoire sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques, communiqué en 1831 à la Société philomathique, j'ai démontré, comme lemme qui m'était nécessaire, cette proposition : *De quelque point de l'espace qu'on considère deux surfaces homofocales, leurs contours apparents paraissent se couper à angles droits;*

c'est-à-dire, que les cônes circonscrits aux deux surfaces se coupent à angles droits, et que dès lors ils ont les mêmes lignes focales, ainsi qu'il résultait de mes Mémoires sur les surfaces de révolution et sur les cônes du second degré, où se trouvait, pour la première fois, cette propriété des cônes. Voilà donc le théorème général démontré dans un Mémoire communiqué à la Société philomathique en 1831.

En outre, ce théorème général est énoncé dans une Lettre à M. Quetelet, dont un extrait a paru dans le *Bulletin de l'Académie de Bruxelles* du 6 décembre 1834 (pages 216 à 219); et on lit ensuite cet autre passage relatif aux surfaces homofocales: « Ces » surfaces jouissent de beaucoup d'autres propriétés qui font le sujet d'un Mémoire de » Géométrie pure, que j'aurais eu l'honneur, depuis longtemps, de vous communi- » quer, si je n'avais été occupé de mes recherches historiques. »

Ce passage du *Bulletin de l'Académie de Bruxelles* a été reproduit par le Journal *l'Institut* du 24 décembre 1834 (tome II, page 421).

On remarquera que dès cette époque j'annonçais beaucoup d'autres propriétés des surfaces homofocales, formant un Mémoire composé *depuis longtemps*.

En effet, cette théorie, à laquelle se liaient les recherches qui ont fait le sujet de mes Mémoires sur les surfaces de révolution, sur les cônes, et sur les coniques sphériques, était terminée, en grande partie du moins, dès 1829, quand j'ai publié le premier de ces Mémoires, qui a été bientôt suivi des deux autres, auxquels devait faire suite le Mémoire sur les focales dans les surfaces à trois axes inégaux. Il m'était nécessaire de procéder ainsi progressivement et pas à pas, non-seulement parce que c'était l'ordre naturel des choses, puisque toutes ces recherches se rapportaient à une même théorie, mais surtout parce que je m'astreignais à la condition, parfois pénible, de n'employer que des considérations de Géométrie; ce qui oblige de préparer les voies par des recherches préliminaires qui peuvent prendre beaucoup d'extension. Depuis, diverses autres occupations, notamment des recherches historiques, m'ont toujours fait ajourner la publication de ce Mémoire; et c'est pour cela que je me suis décidé à faire connaître, par une analyse, vers la fin de 1834, mes principaux résultats dans cette théorie qui comblait une vaste lacune existante dans la Géométrie des surfaces du second degré.

Mais, pour revenir au théorème particulier sur lequel M. Mac Cullagh a élevé une question de priorité, peut-être pensera-t-on qu'indépendamment du Mémoire communiqué en 1831 à la Société philomathique et mentionné dans mon *Aperçu historique* (page 392), et de ma communication à M. Quetelet, insérée dans le *Bulletin de l'Académie de Bruxelles* du 7 décembre 1834, les deux cas du théorème, relatifs aux surfaces de révolution et aux deux coniques conjuguées, qui se trouvent dans mon Mémoire de 1829, présentaient eux-mêmes assez d'intérêt par leur nouveauté et leur importance [*], et comme mettant naturellement sur la voie du cas général, pour qu'on pût

[*] C'était le premier exemple de deux surfaces conjuguées formant le lieu des centres de courbure d'une même surface courbe, exemple qui manquait dans cette théorie de la courbure des surfaces, exposée avec tant de lucidité par M. Monge et M. Ch. Dupin.

en tenir compte et ne pas les passer absolument sous silence dans une question de priorité.

IV. J'ai communiqué en 1843 à l'Académie des Sciences, un Mémoire sur les propriétés des arcs de section conique dont la différence est rectifiable, où se trouvent, parmi beaucoup d'autres, ces deux théorèmes: 1°. « Quand deux coniques décrites » des mêmes foyers ne se coupent pas, la somme des deux tangentes menées d'un point » de la conique externe à la conique interne, moins l'arc de celle-ci compris entre les » deux points de contact, est une quantité constante. » 2°. « Quand les deux coniques » se coupent, la différence des deux tangentes menées d'un point de l'une à la seconde, » est égale à la différence des arcs de celle-ci, comptés depuis le point d'intersection » de la première courbe jusqu'aux points de contact des deux tangentes. »

M. Mac Cullagh, dans une Note qui termine son Mémoire, démontre ces deux théorèmes, pour les coniques planes et les coniques sphériques, et fait observer que le premier est dû à M. Graves qui l'a démontré relativement aux coniques sphériques, dans les *Notes et Additions* jointes à la traduction de mes Mémoires sur les cônes et les coniques sphériques; et qu'ensuite il a été reproduit dans les *Annuaires de l'Université de Dublin* des années 1842 et 1843. Quoique je doive avoir occasion, prochainement, de revenir sur ce sujet dans un Mémoire spécial, je m'empresse ici de faire mention de l'observation de M. Mac Cullagh. Comme elle ne paraît pas s'appliquer au second des deux théorèmes, qui n'est pas une conséquence du premier, et d'après le silence gardé par le savant géomètre sur les autres propriétés fort curieuses des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable, notamment celles qui concernent les conditions de maximum et de minimum des périmètres des polygones inscrits et circonscrits à ces courbes, je dois penser que le seul théorème en question était connu avant que je fisse ma communication à l'Académie, et que la priorité me reste à l'égard de tous les autres.

V. M. Mac Cullagh dit qu'il paraît que les élèves de l'École Polytechnique, de l'origine de cet établissement, ont découvert et démontré complétement la double génération de l'hyperboloïde à une nappe par une droite; que, toutefois, Wren (en 1669) avait fait connaître cette propriété à l'égard de l'hyperboloïde de révolution. J'ai fait moi-même mention de ce fait et cité le Mémoire de Wren, dans mon *Aperçu historique*, page 242. J'ai ajouté que Parent, en 1698, a aussi trouvé cette propriété de l'hyperboloïde de révolution, qu'il a démontrée de deux manières, géométriquement et par l'analyse, et que, dans le même temps, Sauveur en a aussi donné une démonstration; ce qu'on voit dans les *Essais et Recherches de mathématique et de physique*, de Parent; tome II, page 645, et tome III, pages 470 et 526.