JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. LEFORT

Expression numérique des intégrales définies qui se présentent, quand on cherche les termes généraux du développement des coordonnées d'une planète, dans son mouvement elliptique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 142-152.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__142_0>

Expression numérique des intégrales définies qui se présentent, quand on cherche les termes généraux du développement des coordonnées d'une planète, dans son mouvement elliptique;

PAR M. F. LEFORT,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

En désignant, conformément aux notations de la *Mécanique céleste*, par u l'anomalie excentrique, v l'anomalie vraie, nt l'anomalie moyenne d'une planète; par r le rayon vecteur, a le demi-grand axe, et e l'excentricité de son orbite, on a

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u,$$

$$nt = u - e\sin u,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u;$$

d'où l'on déduit, par le développement en séries, à l'aide du théorème de Lagrange,

$$(1)\qquad u - nt = A_1 \sin nt + A_2 \sin 2nt + \ldots + A_i \sin int + \ldots,$$

$$(2)\qquad \frac{r}{a} = B_0 + B_1 \cos nt + B_2 \cos 2nt + \ldots + B_i \cos int + \ldots,$$

$$(3)\qquad v - nt = C_1 \sin nt + C_2 \sin 2nt + \ldots + C_i \sin int + \ldots.$$

On sait que les coefficients des sinus et cosinus des arcs multiples de l'anomalie moyenne peuvent être exprimés par des intégrales définies, de telle manière que

$$(4)\qquad A_i = \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\,du,$$

$$(5) \qquad B_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1 - e\cos u)^2 \cos i(u - e\sin u)\, du,$$

$$(6) \qquad C_i = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{i\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos i(u - e\sin u)}{1 - e\cos u}\, du,$$

i étant un nombre entier et positif.

On a, d'ailleurs,

$$B_0 = 1 + \tfrac{1}{2}e^2.$$

La détermination de ces intégrales définies a fait l'objet de deux Mémoires insérés par Poisson dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1825 et pour 1836. Le second Mémoire seul contient une méthode explicite pour la détermination numérique de ces intégrales.

Poisson a fait dépendre les valeurs de B_i et de C_i de celle de A_i et de ses dérivées relatives à e.

L'expression de B_i est fort simple : en effet, en différentiant A_i par rapport à e, et comparant le résultat à B_i, on trouve

$$B_i = -\frac{e}{i}\frac{dA_i}{de} \text{ [*]}.$$

L'expression de C_i est, au contraire, tellement compliquée que, tout en indiquant la manière de la composer, Poisson a dû renoncer à l'écrire. Elle ne permet pas, d'ailleurs, de saisir la loi de formation des nombres, ce qui est, si je ne me trompe, le véritable but de semblables recherches, aujourd'hui que la détermination numérique des coefficients a été poussée aussi loin au moins que le comportent les applications astronomiques.

Quant à l'intégrale A_i, Poisson la résout à l'aide de deux autres intégrales définies, dont il avait donné la solution dans un Mémoire considérable imprimé au XIX^e^ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

M. Bessel s'était occupé du même objet bien avant Poisson. Les

[*] C'est par une erreur d'impression que le facteur $\frac{1}{i}$ a été omis dans la formule (6) du Mémoire cité. (Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1836, page 6.)

recherches de ce savant remontent, en effet, à 1816 : elles ont été publiées dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*.

Dans son important Mémoire de 1824, M. Bessel, s'appuyant sur ses travaux antérieurs, détermine un assez grand nombre d'intégrales définies qui se rattachent à la théorie des perturbations planétaires, et il donne, entre autres, la solution de trois intégrales qui peuvent être facilement ramenées à celles que nous avons désignées par A_i, B_i, C_i.

L'expression trouvée par M. Bessel pour C_i n'est pas explicitement développée suivant les puissances ascendantes de l'excentricité, et elle ne fait pas connaître, plus que celle de Poisson, la loi de formation des coefficients numériques de ces diverses puissances, loi qui est très-apparente dans les séries relatives à A_i et B_i [*].

Après avoir attentivement examiné ces publications, dont j'ai dû la connaissance à deux savants qui m'honorent d'une bienveillante amitié, j'ai pensé que les géomètres ne verraient peut-être pas sans intérêt la solution à laquelle j'ai été conduit par des études sur le même sujet.

L'équation (6) peut être présentée sous une autre forme. En effet, en retranchant l'équation (1) de l'équation (3), multipliant les deux membres par $\sin int\, d.nt$, et intégrant entre les limites o et π, on trouve

$$C_i = A_i + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (v - u)\sin int\, d.nt;$$

mais si l'on pose

$$\lambda = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

on a

$$v - u = \frac{2\lambda}{1}\sin u + \frac{2\lambda^2}{2}\sin 2u + \ldots + \frac{2\lambda^m}{m}\sin mu + \ldots = \sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{2\lambda^m}{m}\sin mu.$$

On aura donc, en substituant à $v - u$ sa valeur, intégrant par parties,

---

[*] Je n'ai aucunement la prétention d'avoir analysé dans cet exposé rapide les savantes recherches de M. Bessel : je n'avais à considérer ici son Mémoire qu'au point de vue des trois intégrales dont je présente une solution.

et ayant égard aux limites,

$$C_i = A_i + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\, du.$$

Ainsi les déterminations de A_i, B_i, C_i sont ramenées à la seule intégrale

$$\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\, du,$$

puisqu'en faisant $m = 0$ on retombe sur l'intégrale relative à A_i, et que B_i se déduit de A_i par une simple dérivation par rapport à e.

Pour résoudre cette intégrale, nous remarquerons que

$$\cos i(u - e\sin u) = \cos(ie\sin u)\cos iu + \sin(ie\sin u)\sin iu,$$

$$\cos iu \cos mu = \tfrac{1}{2}\cos(i+m)u + \tfrac{1}{2}\cos(i-m)u,$$

$$\sin iu \cos mu = \tfrac{1}{2}\sin(i+m)u + \tfrac{1}{2}\sin(i-m)u,$$

en sorte que

$$\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(i+m)u\, du + \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(i+m)u\, du\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(i-m)u\, du + \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(i-m)u\, du\right].$$

Mais

$$\cos(i-m)u = \cos(m-i)u,$$

$$\sin(i-m)u = -(\sin m - i)u.$$

Ainsi le problème est ramené à la détermination de

$$\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos xu\, du \pm \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin xu\, du,$$

x étant un nombre entier et positif de la forme $2y$ ou $2y + 1$.

Par des formules connues,

$$\cos(ie\sin u) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \frac{i^{2r} e^{2r}}{1.2\ldots 2r} \sin^{2r} u,$$

$$\sin(ie\sin u) = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{i^{2r+1} e^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)} \sin^{2r+1} u,$$

$$\sin^{2r} u = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}} \left\{ \begin{array}{l} \cos 2ru + \displaystyle\sum_{n=1}^{n=r-1} (-1)^n \frac{2r(2r-1)\ldots(2r-n+1)}{1.2\ldots n} \cos 2(r-n)u \\ \quad + \dfrac{(-1)^r}{2} \dfrac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots r} \end{array} \right\},$$

$$\sin^{2r+1} u = \frac{(-1)^r}{2^{2r}} \left[\sin(2r+1)u + \sum_{n=1}^{n=r} (-1)^n \frac{(2r+1)2r\ldots(2r-n+2)}{1.2\ldots n} \sin(2r+1-2n)u \right].$$

Si nous posons, pour abréger,

$$A = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{2^{2r-1}} \frac{i^{2r} e^{2r}}{1.2\ldots 2r},$$

$$B = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{2^{2r}} \frac{i^{2r+1} e^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)},$$

$$C = \sum_{n=1}^{n=r-1} (-1)^n \frac{2r(2r-1)\ldots(2r-n+1)}{1.2\ldots n},$$

$$D = \sum_{n=1}^{n=r} (-1)^n \frac{(2r+1)2r\ldots(2r-n+2)}{1.2\ldots n},$$

$$E = \frac{(-1)^r}{2} \frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots r},$$

nous aurons

$$\cos(ie\sin u) = 1 + A\left[\cos 2ru + C\cos 2(r-n)u + E\right],$$
$$\sin(ie\sin u) = B\left[\sin(2r+1)u + D\sin(2r+1-2n)u\right],$$

et l'on voit immédiatement que

$$\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(2y+1)\,u\,du = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin 2yu\,du = 0.$$

Il suffit donc de trouver

$$\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos 2yu\,du,$$

et

$$\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(2y+1)u\,du.$$

Or

$$\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos 2yu\,du = \int_0^\pi \cos 2yu\,du$$

$$+ \mathrm{A}\int_0^\pi \cos 2ru\cos 2yu\,du + \mathrm{AC}\int_0^\pi \cos 2(r-n)\,u\cos 2yu\,du$$

$$+ \mathrm{A\,E}\int_0^\pi \cos 2yu\,du;$$

mais

$$\int_0^\pi \cos 2yu\,du = 0,$$

puisque, par hypothèse, y n'est pas nul; la seconde intégrale n'a de valeur que pour $y = r$, elle est alors égale à $\frac{\pi}{2}$, et A se réduit à

$$\frac{1}{2^{2y-1}}\,\frac{i^{2y}e^{2y}}{1.2\ldots 2y};$$

la troisième intégrale n'a de valeur que pour $r - n = y$, puisque $n < r$: sa valeur est alors $\frac{\pi}{2}$, et AC devient

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2y+2n-1}}\,\frac{i^{2y+2n}e^{2y+2n}}{1\ 2\ldots(2y+2n)}\,\frac{(2y+2n)(2y+2n-1)\ldots(2y+n+1)}{1.2\ldots n};$$

on a donc

$$\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos 2yu\,du$$
$$= \pi\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2y}}{1.2\ldots 2y}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(2y+1)\ldots(2y+n)}\right].$$

On trouve de la même manière

$$\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(2y+1)u\,du$$
$$= \pi\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2y+1}}{1.2\ldots(2y+1)}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(2y+2)\ldots(2y+n+1)}\right].$$

Ainsi, x étant un nombre entier et positif, on a généralement

$$(7)\qquad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos xu\,du+\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin xu\,du\\&=\pi\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{x}}{1.2\ldots x}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(x+1)\ldots(x+n)}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos xu\,du-\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin xu\,du\\&=\pi\frac{\left(-\frac{ie}{2}\right)^{x}}{1.2\ldots x}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(x+1)\ldots(x+n)}\right].\end{aligned}\right.$$

Quand les facteurs $\cos xu$ et $\sin xu$ sont remplacés par l'unité, on a simplement

$$(9)\qquad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\,du\pm\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\,du\\&\qquad=\pi\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{(1.2\ldots n)^2}\right].\end{aligned}\right.$$

Les intégrales définies données par les formules (7), (8) et (9) conduisent immédiatement aux valeurs de A_i, B_i, C_i; en effet,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} A_i &= \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\,du \\ &= \frac{2}{i\pi}\left[\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos iu\,du + \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin iu\,du\right] \\ &= \frac{2}{i}\,\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{1.2\ldots i}\left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i+1)\ldots(i+n)}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} B_i &= -\frac{e}{i}\frac{dA_i}{de} \\ &= -\frac{2}{i}\,\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{1.2\ldots i}\left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \frac{(i+2n)\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i+1)\ldots(i+n)}\right], \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} C_i &= A_i + \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\,du \\ &= A_i + \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty}\lambda^m \left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(i+m)u\,du \\ +&\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(i+m)u\,du \end{aligned}\right\} \\ &+ \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=i-1}\lambda^m \left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(i-m)u\,du \\ +&\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(i-m)u\,du \end{aligned}\right\} \\ &+ \frac{2}{i\pi}\lambda^i\left[\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\,du + \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\,du\right] \\ &+ \frac{2}{i\pi}\sum_{m=i+1}^{m=\infty}\lambda^m \left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(m-i)u\,du \\ +&\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(m-i)u\,du \end{aligned}\right\}; \end{aligned}$$

substituant à A_i et aux intégrales définies leurs valeurs déjà trouvées, et réduisant par la considération des limites relatives aux sommes $\sum$,

$$\begin{aligned}
C_i &= \frac{2}{i}\sum_{m=0}^{m=\infty} \lambda^m \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i+m}}{1.2\ldots(i+m)}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i+m+1)\ldots(i+m+n)}\right] \\
&+ \frac{2}{i}\sum_{m=1}^{m=i} \lambda^m \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-m}(i-m+1)}{1.2\ldots(i-m+1)}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i-m+1)\ldots(i-m+n)}\right] \\
&+ \frac{2}{i}\sum_{m-i=1}^{m-i=\infty} (-1)^{m-i}\lambda^m \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{m-i}}{1.2\ldots(m-i)}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(m-i+1)\ldots(m-i+n)}\right].
\end{aligned}$$

Pour obtenir C_i en série ordonnée suivant les puissances croissantes de e, il faut développer λ^m et effectuer le produit du développement par les seconds facteurs. Or

$$\begin{aligned}
\lambda^m &= \left(\frac{e}{2}\right)^m\left[1+\frac{m}{1}\left(\frac{e}{2}\right)^2+\frac{m(m+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^4+\ldots+\frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}+\ldots\right] \\
&= \left(\frac{e}{2}\right)^m\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\right].
\end{aligned}$$

Si l'on remarque que

$$\begin{aligned}
&(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots) \\
&= a_0b_0+(b_0a_1+a_0b_1)x+(b_0a_2+a_1b_1+b_2a_0)x^2+\ldots \\
&+ (b_0a_n+a_{n-1}b_1+b_2a_{n-2}+\ldots+b_{n-1}a_1+a_0b_n)x^n+\ldots,
\end{aligned}$$

on en déduira

$$\begin{aligned}
&\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\right]\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i+m+1)\ldots(i+m+n)}\right] \\
&= 1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{i^{2n}}{1.2\ldots n(i+m+1)\ldots(i+m+n)}-\dfrac{i^{2(n-1)}}{1.2\ldots(n-1)(i+m+1)\ldots(i+m+n-1)}\dfrac{m}{1}+\ldots \\
+(-1)^\alpha\dfrac{i^{2(n-\alpha)}}{1.2\ldots(n-\alpha)(i+m+1)\ldots(i+m+n-\alpha)}\dfrac{m(m+\alpha+1)\ldots(m+2\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha}+\ldots \\
+(-1)^n\dfrac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}
\end{array}\right\},
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$
\begin{aligned}
C_i = {} & \frac{2}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^i \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{i^{i+m}\left(\frac{e}{2}\right)^{2m}}{1.2\ldots(i+m)} \\
& \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left\{ \begin{aligned} & \frac{i^{2n}}{1.2\ldots n(i+m+1)\ldots(i+m+n)} + \ldots \\ & + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1.2\ldots(n-\alpha)(i+m+1)\ldots(i+m+n-\alpha)} \, \frac{m(m+\alpha+1)\ldots(m+2\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha} + \ldots \\ & + (-1)^n \frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n} \end{aligned} \right\} \right\} \\
& + \frac{2}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^i \sum_{m=1}^{m=i} \frac{i^{i-m}(i-m+1)}{1.2\ldots(i-m+1)} \\
& \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left\{ \begin{aligned} & \frac{i^{2n}}{1.2\ldots n(i-m+1)\ldots(i-m+n)} + \ldots \\ & + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1.2\ldots(n-\alpha)(i-m+1)\ldots(i-m+n-\alpha)} \, \frac{m(m+\alpha+1)\ldots(m+2\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha} + \ldots \\ & + (-1)^n \frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n} \end{aligned} \right\} \right\} \\
& + \frac{2}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^i \sum_{m-i=1}^{m-i=\infty} (-1)^{m-i} \frac{i^{m-i}\left(\frac{e}{2}\right)^{2(m-i)}}{1.2\ldots(m-i)} \\
& \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left\{ \begin{aligned} & \frac{i^{2n}}{1.2\ldots n(m-i+1)\ldots(m-i+n)} + \ldots \\ & + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1.2\ldots(n-\alpha)(m-i+1)\ldots(m-i+n-\alpha)} \, \frac{m(m+\alpha+1)\ldots(m+2\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha} + \ldots \\ & + (-1)^n \frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n} \end{aligned} \right\} \right\}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Cette expression est compliquée, sans aucun doute, mais elle présente dans ses termes une loi de formation facile à saisir.

En calculant jusqu'à la neuvième puissance de e à l'aide de cette formule, on trouve

$$C_1 = 2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4608}e^7 + \frac{6217}{368640}e^9 + \ldots.$$

On peut parvenir à l'expression de C_i, donnée ci-dessus, en partant de la formule (6) adoptée par MM. Bessel et Poisson. Il suffit de développer $\frac{1}{1 - e\cos u}$ en série croissante suivant les cosinus des multiples de u. On trouve facilement, par la méthode des coefficients indéterminés :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - e\cos u} &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}(1 + 2\lambda\cos u + 2\lambda^2\cos 2u + \ldots + 2\lambda^m\cos mu + \ldots)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \cos mu\right),\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}C_i &= \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\,du + \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\,du\\ &= A_i + \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\,du,\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'expression fondamentale à laquelle je suis arrivé par une autre méthode qui me paraît plus élégante et plus directe.