JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. LOBATTO

Note sur les équations d'équilibre d'un système de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 193-196.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__193_0>

NOTE

SUR LES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE FORCES DIRIGÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE;

PAR M. R. LOBATTO,

Professeur d'analyse et de mécanique à l'Académie royale de Delft.

---

1. En m'occupant d'un problème de géométrie, j'ai eu lieu de remarquer qu'il existe une relation assez simple entre la longueur de la droite qui mesure la distance de l'origine d'un système de trois axes rectangulaires à une droite donnée dans l'espace, et les distances du même point aux projections de cette droite sur les trois plans coordonnés. Il est probable que la relation dont il s'agit se sera déjà présentée à d'autres géomètres. Cependant, comme je ne l'ai vue rapportée dans aucun Traité de Géométrie analytique, j'ai pensé qu'il pourrait être utile de la faire connaître ici, d'autant plus qu'elle offre un moyen de démontrer bien facilement les conditions d'équilibre d'un système de forces agissant d'une manière quelconque dans l'espace, ce qui forme le principal objet de la présente Note.

2. Désignons par α, β, γ les angles formés par une droite donnée avec ses trois projections sur les plans des xy, xz et yz; et par δ, δ_1, δ_2 les distances de l'origine des coordonnées à ces projections; soit, en outre, Δ la distance de ce point à la droite elle-même. On aura, entre les quatre quantités Δ, δ, δ_1, δ_2, la relation

$$\Delta^2 = \delta^2 \cos^2 \alpha + \delta_1^2 \cos^2 \beta + \delta_2^2 \cos^2 \gamma,$$

que l'on peut vérifier de la manière suivante.

Soient α', β', γ' les angles compris entre la droite donnée et les axes des x, y, z. Prenons sur cette droite un point quelconque (x', y', z').

La droite qui joindra ce point à l'origine forme avec la première un angle μ dont le cosinus aura pour expression

$$\frac{x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

d'où l'on tire, de suite,

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.\sin\mu \\ &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 - (x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma')^2},\end{aligned}$$

valeur qui pourra s'écrire encore sous cette forme plus symétrique :

$$\Delta^2 = (x'\cos\beta' - y'\cos\alpha')^2 + (z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma')^2 + (y'\cos\gamma' - z'\cos\beta')^2.$$

Les trois projections de la droite donnée auront pour équations

$$y - y' = \frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}(x - x'),$$

$$z - z' = \frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}(x - x'),$$

$$z - z' = \frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'}(y - y').$$

La perpendiculaire menée de l'origine sur la première de ces projections s'exprimera, d'après une formule connue, par

$$\delta = \pm\frac{y' - x'\dfrac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{\cos^2\beta'}{\cos^2\alpha'}\right)}} = \pm\frac{y'\cos\alpha' - x'\cos\beta'}{\sin\gamma'};$$

on aura de même

$$\delta_1 = \pm\frac{x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha'}{\sin\beta'}, \quad \delta_2 = \pm\frac{z'\cos\beta' - y'\cos\gamma'}{\sin\alpha'}.$$

Ces valeurs conduisent immédiatement à la relation

$$\Delta^2 = \delta^2\sin^2\gamma' + \delta_1^2\sin^2\beta' + \delta_2^2\sin^2\alpha',$$

qui, à cause de

$$\sin\gamma' = \cos\alpha, \quad \sin\beta' = \cos\beta \quad \text{et} \quad \sin\alpha' = \cos\gamma,$$

se changera en

$$\Delta^2 = \delta^2 \cos^2 \alpha + \delta_1^2 \cos^2 \beta + \delta_2^2 \cos^2 \gamma,$$

ce qu'il fallait prouver.

3. Cherchons l'équation du plan passant par l'origine et la droite. Soit

$$Ax + By + Cz = 0$$

l'équation dont il s'agit. Le plan passant en même temps par le point (x', y', z'), on aura évidemment

$$\begin{aligned} &Ax' + By' + Cz' = 0, \\ &A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0, \\ &A \cos \alpha' + B \cos \beta' + C \cos \gamma' = 0. \end{aligned}$$

Éliminant les quantités A et B entre la première et la troisième de ces dernières équations, on obtiendra les rapports

$$\frac{B}{C} = \frac{x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha'}{y' \cos \alpha' - x' \cos \beta'},$$

$$\frac{A}{C} = \frac{z' \cos \beta' - y' \cos \gamma'}{y' \cos \alpha' - x' \cos \beta'}.$$

On pourra ainsi représenter l'équation du plan par

$$(z' \cos \beta' - y' \cos \gamma')x + (x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha')y + (y' \cos \alpha' - x' \cos \beta')z = 0,$$

ou bien par

$$\delta_2 \cos \gamma . x + \delta_1 \cos \beta . y + \delta \cos \alpha . z = 0,$$

d'où l'on tire, pour les valeurs des angles φ, φ_1, φ_2, formés par ce plan avec ceux des xy, xz, yz,

$$\cos \varphi = \frac{\delta \cos \alpha}{\Delta}, \qquad \cos \varphi_1 = \frac{\delta_1 \cos \beta}{\Delta}, \qquad \cos \varphi_2 = \frac{\delta_2 \cos \gamma}{\Delta}.$$

4. Passons maintenant à la démonstration des équations d'équilibre d'un système de forces quelconques. Soit P l'intensité de la force agissant au point (x, y, z), et dont la direction forme les angles a, b, c avec les trois axes coordonnés. Transportons parallèlement cette force

à l'origine en y ajoutant un couple qui aura pour moment $P\Delta$, en désignant par Δ la distance de l'origine à la direction primitive de la force P. Celle-ci donnera lieu à trois forces composantes

$$P\cos a, \quad P\cos b, \quad P\cos c.$$

Le moment $P\Delta$ du couple se décomposera également en trois moments de couples agissant dans les trois plans coordonnés, et qui auront pour valeurs

$$P\Delta\cos\varphi, \quad P\Delta\cos\varphi_1, \quad P\Delta\cos\varphi_2,$$

φ, φ_1, φ_2 exprimant les angles compris entre le plan du couple $P\Delta$ et ceux des xy, xz, yz.

Or, et d'après les relations obtenues ci-dessus (n° **3**), ces valeurs se réduisent respectivement à

$$\begin{aligned}&P(y\cos a - x\cos b),\\ &P(x\cos c - z\cos a),\\ &P(z\cos b - y\cos c).\end{aligned}$$

En opérant de même sur toutes les autres forces du système, il en résultera pour conditions d'équilibre

$$\begin{gathered}\Sigma P\cos a = 0, \quad \Sigma P\cos b = 0, \quad \Sigma P\cos c = 0,\\ \Sigma P(y\cos a - x\cos b) = 0,\\ \Sigma P(x\cos c - z\cos a) = 0,\\ \Sigma P(z\cos b - y\cos c) = 0.\end{gathered}$$

Ces trois dernières équations pouvant être mises encore sous la forme suivante,

$$\Sigma P\cos\alpha.\delta = 0, \quad \Sigma P\cos\beta.\delta_1 = 0, \quad \Sigma P\cos\gamma.\delta_2 = 0.$$

indiquent en même temps que la somme des moments pris par rapport à l'origine des projections de toutes les forces P sur chaque plan coordonné, est égale à zéro.