JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-F. SVANBERG

Sur les intégrales définies $\int_0^\infty \frac{e^{-3x}.x^{m-1}dx}{1+x^2}, \int_0^\infty \frac{\cos\beta x.x^{m-1}dx}{1+x^2}, \int_0^\infty \frac{\sin\beta x.x^{m-1}dx}{1+x^2}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 197-200.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__197_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}.x^{m-1}\,dx}{1+x^2},\quad \int_0^\infty \frac{\cos\beta x.x^{m-1}\,dx}{1+x^2},\quad \int_0^\infty \frac{\sin\beta x.x^{m-1}\,dx}{1+x^2};$$

Par M. A.-F. SVANBERG.

On a la formule connue

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-ux}x^{m-1}dx = \frac{\Gamma(m)}{u^m},$$

qui suppose $m > 0$. En la multipliant par $\sin(u-\beta)du$, et l'intégrant entre les limites $u=\beta$ et $u=\infty$, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}x^{m-1}dx}{1+x^2} = \Gamma(m)\int_\beta^\infty \frac{\sin(u-\beta)\,du}{u^m}$$
$$= \Gamma(m)\int_0^\infty \frac{\sin(u-\beta)\,du}{u^m} - \Gamma(m)\int_0^\beta \frac{\sin(u-\beta)\,du}{u^m};$$

où nous prenons $m < 1$; or, dans cette hypothèse, on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin(u-\beta)\,du}{u^m} = \cos\beta\int_0^\infty \frac{\sin u.du}{u^m} - \sin\beta\int_0^\infty \frac{\cos u.du}{u^m}$$
$$= \Gamma(1-m)\cos\frac{m\pi}{2}\cos\beta - \Gamma(1-m)\sin\frac{m\pi}{2}\sin\beta$$
$$= \Gamma(1-m)\cos\left(\frac{m\pi}{2}+\beta\right),$$

et, de plus,

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi};$$

il vient donc

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}x^{m-1}dx}{1+x^2} = \frac{\pi\cos\left(\frac{m\pi}{2}+\beta\right)}{\sin m\pi} + \Gamma(m)\sin\beta\int_0^\beta \frac{\cos u\,du}{u^m}$$
$$- \Gamma(m)\cos\beta\int_0^\beta \frac{\sin u\,du}{u^m}.$$

En mettant dans cette formule $\beta\sqrt{-1}$ au lieu de β, on trouve la valeur des deux autres intégrales proposées; mais cette méthode n'étant pas à l'abri de toute objection, il conviendra mieux de les chercher directement. Considérons, pour cela, l'intégrale connue

$$\int_0^\infty \cos ux.x^{m-1}dx = \frac{\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}{u^m}.$$

En multipliant par $e^{-u}du$, et intégrant entre les limites $u=\beta$ et $u=\infty$, on trouve

$$e^{-\beta}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx(\cos\beta x - x\sin\beta x)}{1+x^2} = \Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}\int_\beta^\infty \frac{e^{-u}du}{u^m}.$$

Soit maintenant

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta x.x^{m-1}dx}{1+x^2} = z,$$

nous aurons

$$-\int_0^\infty \frac{\sin\beta x.x^m dx}{1+x^2} = \frac{dz}{d\beta},$$

par où l'équation précédente deviendra

$$\frac{dz}{d\beta} + z = -\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}e^\beta\int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m}.$$

Cette équation différentielle en β devient intégrable en la multipliant par $e^\beta d\beta$, et l'on obtient

$$ze^\beta = \mathrm{C} - \Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}\int_0^\beta\left(e^{2\beta}d\beta\int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m}\right).$$

L'intégration *par parties* donne

$$\int_0^\beta\left(e^{2\beta}d\beta\int_\infty^\beta\frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m}\right) = \frac{e^{2\beta}-1}{2}\int_\infty^\beta\frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m} - \frac{1}{2}\int_0^\beta(e^{2\beta}-1)\frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m}$$
$$= -\frac{e^{2\beta}-1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m} + \frac{e^{2\beta}-1}{2}\int_0^\beta\frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m} - \frac{1}{2}\int_0^\beta(e^\beta - e^{-\beta})\frac{d\beta}{\beta^m}$$
$$= -\frac{e^{2\beta}-1}{2}\frac{\Gamma(1-m)}{\sin m\pi} + \frac{e^{2\beta}}{2}\int_0^\beta\frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m} - \frac{1}{2}\int_0^\beta\frac{e^\beta d\beta}{\beta^m};$$

et, si l'on détermine la constante C par la supposition de $\beta = 0$, ce qui donne

$$C = \frac{\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{2}},$$

nous aurons enfin, à cause de $\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2}}$,

$$(3) \left\{ \begin{aligned} z &= \int_0^\infty \frac{\cos \beta x . x^{m-1} dx}{1 + x^2} \\ &= \frac{\pi}{4 \sin \frac{m\pi}{2}} (e^\beta + e^{-\beta}) + \frac{\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2}}{2} \left(e^{-\beta} \int_0^\beta \frac{e^\beta d\beta}{\beta^m} - e^\beta \int_0^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} \right). \end{aligned} \right.$$

On trouve, d'une manière semblable,

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sin \beta x . x^{m-1} dx}{1 + x^2} \\ &= \frac{\pi}{4 \cos \frac{m\pi}{2}} (e^\beta - e^{-\beta}) + \frac{\Gamma(m) \sin \frac{m\pi}{2}}{2} \left(e^{-\beta} \int_0^\beta \frac{e^\beta d\beta}{\beta^m} - e^\beta \int_0^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} \right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on multiplie la formule (3) par $\sin \frac{m\pi}{2}$, et la formule (4) par $\cos \frac{m\pi}{2}$, et qu'on prenne la différence, il viendra l'intégrale connue

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2} - \beta x\right) . x^{m-1} dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-\beta}.$$

Le premier membre de la formule (2) équivaut à quelques autres intégrales définies bien simples, et qui dépendront, par conséquent, des mêmes transcendantes que celle-là. Pour le faire voir, changeons u en $\beta + \varphi$ dans la formule (1), ce qui donne

$$(5) \qquad \int_0^\infty e^{-\beta x} e^{-\varphi x} . x^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m)}{(\beta + \varphi)^m}.$$

En multipliant par $\sin \varphi d\varphi$, intégrant entre les limites o et ∞, et observant que

$$\int_0^\infty e^{-\varphi x}.\sin\varphi.d\varphi = \frac{1}{1+x^2},$$

il viendra

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}x^{m-1}dx}{1+x^2} = \Gamma(m)\int_0^\infty \frac{\sin\varphi.d\varphi}{(\beta+\varphi)^m}.$$

De même si l'on multiplie la formule (5) par $\cos\varphi.d\varphi$, et qu'on y change m en $m-1$, l'intégration entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \infty$ donnera

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}x^{m-1}dx}{1+x^2} = \Gamma(m-1)\int_0^\infty \frac{\cos\varphi.d\varphi}{(\beta+\varphi)^{m-1}}.$$