JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Note sur quelques intégrales multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 201-209.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__201_0>

NOTE

SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. La forme sous laquelle j'ai présenté les intégrales définies qui se trouvent dans le chapitre XXXV du *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, suggère immédiatement une classe analogue d'intégrales multiples, dont l'évaluation ne dépend que des transcendantes abéliennes. C'est ce que je me propose de développer dans cette Note.

Soient $x_1, x_2,\ldots, x_n$, n variables, et appelons V l'intégrale définie $\int^n dx_1\,dx_2\ldots dx_n$, qu'on obtient en attribuant à $x_1, x_2,\ldots, x_n$ toutes les valeurs positives propres à satisfaire à la condition

$$(1)\qquad (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{n}{2}} \overline{\overline{<}} f\left(\frac{\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n^2}}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\right).$$

Dans cette inégalité, mettons pour x_1, $a_1\xi_1$, pour x_2, $a_2\xi_2$, et ainsi de suite, elle deviendra

$$(2)\qquad (a_1^2\xi_1^2+a_2^2\xi_2^2+\ldots+a_n^2\xi_n^2)^{\frac{n}{2}} \overline{\overline{<}} f\left(\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}{a_1^2\xi_1^2+a_2^2\xi_2^2+\ldots+a_n^2\xi_n^2}\right),$$

et si l'on appelle V' l'intégrale définie $\int^n d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n$, qu'on étend à toutes les valeurs positives de $\xi_1, \xi_2,\ldots$ qui satisfont à la condition (2), on aura évidemment

$$\mathrm{V} = a_1 a_2\ldots a_n \mathrm{V}'.$$

Maintenant, si l'on substitue pour $x_1, x_2, \ldots$ les valeurs suivantes,

$$x_1 = \rho\cos\theta, \quad x_2 = \rho\sin\theta\cos\varphi_1, \quad x_3 = \rho\sin\theta\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$x_{n-1} = \rho\sin\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2},$$

$$x_n = \rho\sin\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2},$$

on trouvera, en intégrant par rapport à ρ, depuis $\rho = 0$,

$$V = \frac{1}{n}\int^{n-1}\rho^n\, d\omega_{n-1},$$

où

$$d\omega_{n-1} = \sin^{n-2}\theta\sin^{n-3}\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-4}\sin\varphi_{n-3}\, d\varphi_1\, d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\, d\theta.$$

Or on a, d'après la formule (1),

$$\rho^n = f\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi_1}{a_2^2} + \ldots + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-3}\sin^2\varphi_{n-2}}{a_n^2}\right),$$

ce qui donne

$$V = \frac{1}{n}\int^{n-1} f\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi_1}{a_2^2} + \ldots\right) d\omega_{n-1},$$

où l'on prend toutes les variables depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{2}$.

Semblablement, on déduira de la formule (2) que la valeur de V′ peut se transformer dans

$$\frac{1}{n}\int^{n-1}\frac{1}{(a_1^2\cos^2\theta + \ldots + a_n^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-2})^{\frac{n}{2}}} f\left(\frac{1}{a_1^2\cos^2\theta + \ldots + a_n^2\sin^2\theta\ldots\sin^2\varphi_{n-2}}\right) d\omega_{n-1},$$

d'où résulte la relation générale

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int^{n-1} f\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi_1}{a_2^2} + \ldots + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-3}\sin^2\varphi_{n-2}}{a_n^2}\right) d\omega_{n-1} \\ &= a_1 a_2\ldots a_n\int^{n-1}\frac{1}{(a_1^2\cos^2\theta + \ldots + a_n^2\sin^2\theta\ldots\sin^2\varphi_{n-2})^{\frac{n}{2}}} f\left(\frac{1}{a_1^2\cos^2\theta + \ldots + a_n^2\sin^2\theta\ldots\sin^2\varphi_{n-2}}\right) d\omega_{n-1},\end{aligned}\right.$$

où les limites des variables doivent être 0 et $\frac{\pi}{2}$.

2. Dans ce qui va suivre, nous désignerons par Δ^2 la quantité

$$\cos^2\theta + \alpha_1^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 \ldots \sin^2\varphi_{n-3} \sin^2\varphi_{n-2}.$$

Cela posé, considérons la fonction Y_p, définie par l'équation

$$Y_p = \int^{n-1} \frac{d\omega_{n-1}}{(1 + m^2\Delta^2)^p}.$$

Lorsque n est un nombre pair, il est évident, d'après la formule (3), que Y_p ne dépendra que des fonctions algébriques, p étant un nombre entier, égal ou supérieur à $\frac{n}{2}$. Si p est inférieur à $\frac{n}{2}$, Y_p s'exprimera à l'aide des fonctions abéliennes, comme on peut le montrer de la manière suivante.

Si l'on différentie Y_p par rapport à m, on en obtiendra

$$\frac{dY_p}{dm} = \frac{2p}{m} \int^{n-1} \left[\frac{1}{(1 + m^2\Delta^2)^{p+1}} - \frac{1}{(1 + m^2\Delta^2)^p}\right] d\omega_{n-1},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{m}{2p}\frac{dY_p}{dm} + Y_p = Y_{p+1}. \tag{4}$$

Maintenant, si l'on fait dans l'équation (3) la fonction indéterminée égale à 1, et si l'on pose

$$a_1^2 = 1 + m^2, \quad a_2^2 = 1 + \alpha_1^2 m^2, \ldots, \quad a_n^2 = 1 + \alpha_{n-1}^2 m^2,$$

on aura, en désignant par A la constante $\int^{n-1} d\omega_{n-1}$,

$$Y_{\frac{n}{2}} = \frac{A}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}}, \tag{5}$$

ce qui donne, en faisant $p + 1 = \frac{n}{2}$, dans l'équation (4), et en intégrant ensuite,

$$Y_{\frac{n}{2}-1} = \frac{(n-2)A}{m^{n-2}} \int \frac{m^{n-3}\,dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}}. \tag{6}$$

On a encore, d'après l'équation (3),

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}} \int^{n-1} \frac{d\omega_{n-1}}{\left(\frac{\cos^2\theta}{1+m^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi_1}{1+\alpha_1^2 m^2} + \ldots\right)^{\frac{n}{2}-1}},$$

d'où l'on déduit, en faisant

$$(1 + m^2)(1 + \alpha_1^2 m^2)\ldots(1 + \alpha_{n-1}^2 m^2) = M$$

et

$$\frac{M}{1+m^2} - 1 = \nu^2, \quad \frac{M}{1+\alpha_1^2 m^2} - 1 = \beta_1^2\nu^2, \ldots, \quad \frac{M}{1+\alpha_{n-1}^2 m^2} - 1 = \beta_{n-1}^2\nu^2,$$

$$Y_1 = M^{\frac{n-3}{2}} \int^{n-1} \frac{d\omega_{n-1}}{[1+\nu^2(\cos^2\theta + \beta_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1 + \ldots)]^{\frac{n}{2}-1}};$$

ce qui donne, en vertu de l'équation (6),

$$(7) \qquad Y_1 = \frac{(n-2)AM^{\frac{n-3}{2}}}{\nu^{n-2}} \int \frac{\nu^{n-3}d\nu}{\sqrt{(1+\nu^2)(1+\beta_1^2\nu^2)\ldots(1+\beta_{n-1}^2\nu^2)}}.$$

On déduit Y_2 de Y_1, d'après l'équation (4), par la différentiation par rapport à m, et ainsi de suite Y_3, Y_4, ..., qui, manifestement, ne dépendront que des fonctions à différentielles algébriques.

L'équation (3), ainsi que la réduction des fonctions Y_1, Y_2,... aux transcendantes abéliennes, ont été données par M. Jacobi, dans un Mémoire inséré dans le tome XII du Journal de M. Crelle. Mais la forme sous laquelle l'illustre géomètre de Kœnigsberg a présenté ces résultats diffère beaucoup de celle qu'on vient d'employer.

3. Si l'on multiplie l'équation (4) par dm, et que l'on intègre ensuite, on obtiendra

$$(8) \qquad \frac{m}{2p} Y_p + \frac{2p-1}{2p} \int Y_p\, dm = \int Y_{p+1} dm,$$

ce qui fait voir que l'intégrale $\int Y_p\, dm$ ne dépendra que des fonctions Y_p... et de l'intégrale $\int Y_{\frac{n}{2}} dm$ (n étant un nombre pair, ce qui est le seul cas que nous considérons). D'où l'on conclut que l'intégrale $\int Y_p\, dm$ s'exprimera à l'aide des fonctions abéliennes.

Si l'on prend cette intégrale entre les limites o et ∞, sa valeur devient bien simple. En effet, il est évident que mY_p s'évanouit entre ces limites, en sorte que

$$\int_0^\infty Y_p\,dm = \frac{2p}{2p-1}\int_0^\infty Y_{p+1}\,dm,$$

$$\int_0^\infty Y_{p+1}dm = \frac{2p+2}{2p+1}\int_0^\infty Y_{p+2}dm,$$

. . . .

$$\int_0^\infty Y_{\frac{n}{2}-1}dm = \frac{n-2}{n-3}\int_0^\infty Y_{\frac{n}{2}}dm,$$

ce qui donne, après avoir mis pour $Y_{\frac{n}{2}}$ sa propre valeur, qu'on tire de la formule (5),

$$(9)\quad \int_0^\infty Y_p\,dm = \frac{2p.2p+2\ldots n-2}{2p-1.2p+1\ldots n-3}\,A\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}}.$$

D'une manière tout à fait semblable, on pourra voir que

$$(10)\qquad \frac{1}{2p}\,Y_p + \int \frac{Y_p\,dm}{m} = \int \frac{Y_{p+1}\,dm}{m}.$$

et encore

$$(11)\qquad \frac{1}{2pm}\,Y_p + \frac{2p+1}{2p}\int \frac{Y_p\,dm}{m^2} = \int \frac{Y_{p-1}\,dm}{m^2}.$$

en sorte que les intégrales $\int \frac{Y_p\,dm}{m}$, $\int \frac{Y_p\,dm}{m^2}$ ne dépendront que des fonctions abéliennes.

Cette dernière équation (11) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{A-Y_p}{2pm} + \frac{2p+1}{2p}\int \frac{A-Y_p}{m^2}\,dm = \int \frac{A-Y_{p+1}}{m^2}\,dm.$$

Or $\frac{A-Y_p}{2pm}$ devient nulle entre les limites o et ∞ ; ce qui donnera, après quelques réductions,

$$\int^\infty \frac{A-Y_p}{m^2}\,dm = \frac{2p.2p+2\ldots n-2}{2p+1.2p+3\ldots n-1}\int_0^\infty \frac{A-Y_{\frac{n}{2}}}{m^2}\,dm.$$

Maintenant, si l'on désigne par M la quantité

$$(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2),$$

on verra sans difficulté que

$$\int\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)\frac{dm}{m^2}=-\frac{1}{m}+\frac{1}{m\sqrt{M}}$$
$$+\int\left(\frac{1}{1+m^2}+\frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2 m^2}+\frac{\alpha_2^2}{1+\alpha_2^2 m^2}+\ldots\right)\frac{dm}{\sqrt{M}},$$

et de cette équation, en prenant m depuis o jusqu'à ∞, et la multipliant par A, on déduira

$$\int_0^\infty \frac{A-Y_{\frac{n}{2}}}{m^2}\,dm=A\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+m^2}+\frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2 m^2}+\ldots+\frac{\alpha_{n-1}}{1+\alpha_{n-1}m^2}\right)\frac{dm}{\sqrt{M}},$$

d'où il résulte que

$$(12)\qquad \int_0^\infty \frac{A-Y_p}{m^2}\,dm=\frac{2p.2p+2\ldots n-2}{2p+1.2p+3\ldots n-1}\,A\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+m^2}+\frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2 m^2}+\ldots\right)\frac{dm}{\sqrt{M}}.$$

4. Comme application des propriétés qu'on vient de constater, supposons qu'il s'agisse de déterminer la valeur de l'intégrale multiple définie

$$u=\int^{n-1}\frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tang} m\Delta)}{\Delta}\,d\omega_{n-1}.$$

La différentiation par rapport à m donne

$$\frac{du}{dm}=\int^{n-1}\frac{d\omega_{n-1}}{1+m^2\Delta^2}=Y_1,$$

et

$$(13)\qquad u=\int Y_1 dm.$$

Par conséquent, cette intégrale s'exprime par des fonctions abéliennes qui peuvent être calculées à l'aide des méthodes que nous venons d'exposer.

Si dans la valeur de Δ on fait

$$\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_{n-1},$$

cette quantité se réduira à

$$\cos^2\theta+\alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1+\alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1,$$

et l'on peut effectuer immédiatement l'intégration par rapport à φ_2, $\varphi_3,\ldots,\varphi_{n-2}$, ce qui n'ajoutera qu'un coefficient constant. D'ailleurs,

Y_1, $Y_2, \ldots$ se réduiront aux fonctions circulaires ou logarithmiques, et $\int Y_{\frac{n}{2}}\, dm$ s'exprimera par des fonctions elliptiques, en sorte que l'intégrale double

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}\left[\operatorname{tang} m\sqrt{\cos^2\theta + \alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1 + \alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1}\right]}{\sqrt{\cos^2\theta + \alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1 + \alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1}} \sin^{n-2}\theta\sin^{n-3}\varphi_1 d\theta d\varphi_1$$

ne dépendra que des fonctions elliptiques, circulaires ou logarithmiques.

Si dans la formule (13) on pose $m = \infty$, on aura

$$\frac{\pi}{2}\int^{n-1} \frac{d\omega_{n-1}}{\Delta} = \int_0^\infty Y_1\, dm,$$

d'où, en faisant

$$\int^{n-2} \sin^{n-2}\theta \sin^{n-3}\varphi_1 \ldots \sin^2\varphi_{n-4} \sin\varphi_{n-3}\, d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-3} d\theta = A',$$

on trouve, en vertu de la formule (9),

$$(14)\quad \int^{n-1} \frac{d\omega_{n-1}}{\Delta} = \frac{2.4.6\ldots n-2}{1.3.5\ldots n-3} A' \int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}},$$

et, en faisant $\alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_{n-1}$, et en mettant pour A' sa valeur actuelle,

$$(15)\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^{n-2}\theta \sin^{n-3}\varphi_1 d\theta d\varphi_1}{\sqrt{(\cos^2\theta + \alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1 + \alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1)}} \\ &\qquad = \frac{2.4\ldots n-4}{3.5\ldots n-3}\int_0^\infty \frac{dm}{(1+\alpha_2^2 m^2)^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)}}. \end{aligned}\right.$$

Cette équation a lieu lorsque $n > 4$. Pour le cas particulier de $n = 4$, on a

$$(16)\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta \sin\varphi_1\, d\theta d\varphi_1}{\sqrt{(\cos^2\theta + \alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1 + \alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1)}} \\ &\qquad = \int_0^\infty \frac{dm}{(1+\alpha_2^2 m^2)\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)}}. \end{aligned}\right.$$

5. Soit encore

$$u = \int^{n-1} (\operatorname{arc}\operatorname{tang} m\Delta)\,\Delta\, d\omega_{n-1},$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dm} = \frac{1}{m^2}\int^{n-1}\left(1 - \frac{1}{1+m^2\Delta^2}\right) d\omega_{n-1} = \frac{A - Y_1}{m^2},$$

et

(17) $$u = \int \frac{A - Y_1}{m^2} dm,$$

et l'on voit que u s'exprime par des fonctions abéliennes.

En faisant dans la formule (17) $m = \infty$, on déduit aisément, à l'aide de la formule (12),

(18) $$\int^{n-1} \Delta d\omega_{n-1} = \frac{2.4\ldots n-2}{3.5\ldots n-1} A' \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+m^2} + \frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2 m^2} + \ldots\right)\frac{dm}{\sqrt{(1+m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}}.$$

On peut encore déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int^{n-1} \log \Delta d\omega_{n-1},$$

car, en la mettant sous la forme

$$\int^{n-1} \log(1 + m^2\Delta^2) d\omega_{n-1},$$

ce qui nous est permis, et en la désignant par u, on aura

$$\frac{du}{dm} = \frac{2}{m}\int^{n-1}\left(1 - \frac{1}{1+m^2\Delta^2}\right) d\omega_{n-1} = \frac{2A}{m} - \frac{2}{m} Y_1,$$

et

(19) $$u = 2A \log m - 2\int \frac{Y_1\, dm}{m},$$

en sorte que cette intégrale, d'après la formule (10), ne dépendra que des fonctions abéliennes.

Si n est égal à 4, on aura, d'après les formules (5) et (6),

$$Y_2 = \frac{A}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)(1+\alpha_2^2 m^2)(1+\alpha_3^2 m^2)}},$$

$$Y_1 = \frac{2A}{m^2}\int \frac{m\,dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)(1+\alpha_2^2 m^2)(1+\alpha_3^2 m^2)}},$$

et par conséquent, en vertu de la formule (10),

$$\int \frac{Y_1\, dm}{m} = A\int \frac{dm}{m\sqrt{(1+m^2)\ldots(1+\alpha_3^2 m^2)}} - \frac{A}{m^2}\int \frac{m\,dm}{\sqrt{(1+m^2)\ldots(1+\alpha_3^2 m^2)}},$$

ce qui donnera

$$\int^3 \log(1 + m^2\Delta^2)\, d\omega_3$$
$$= 2\mathrm{A} \log m - 2\mathrm{A} \int \frac{dm}{m\sqrt{(1+m^2)\ldots(1+\alpha_3^2 m^2)}}$$
$$+ \frac{2\mathrm{A}}{m^2} \int \frac{mdm}{\sqrt{(1+m^2)\ldots(1+\alpha_3^2 m^2)}}.$$

en sorte que, dans ce cas, l'intégrale dont il s'agit s'exprimera à l'aide des fonctions elliptiques.

Si, dans cette formule, on pose $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, on trouvera, en se rappelant que l'intégrale devient nulle pour $m = 0$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(1 + m^2 \cos^2\theta) \sin^2\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}\left\{ \log\left[\frac{1+\sqrt{(1+m^2)}}{2}\right] - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(1+m^2)} - 1}{m^2} \right\},$$

d'où, en faisant $\frac{m^2}{1+m^2} = k^2$, on déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1}{1 - k^2 \sin^2\theta}\right) \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\log\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-k^2}}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{(1-k^2)}}{1+\sqrt{(1-k^2)}}\right],$$

ce qui s'accorde avec une formule bien connue.