JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RICHELOT

Application des transcendantes elliptiques aux polygones sphériques, qui sont inscrits à un petit cercle de la sphère, et circonscrits à un autre petit cercle, simultanément

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 25-40.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__25_0>

Application des transcendantes elliptiques aux polygones sphériques, qui sont inscrits à un petit cercle de la sphère, et circonscrits à un autre petit cercle, simultanément;

PAR M. RICHELOT [*].

(Extrait du Journal de M. Crelle, t. V, p. 250. — Traduction de M. TERQUEM.)

I.

Dans le premier cahier du tome III du Journal de M. Crelle [**], M. le professeur Jacobi a ramené aux transcendantes elliptiques le problème : « Trouver la relation » entre la distance des centres et les rayons de deux cercles dont l'un est circonscrit à » un polygone irrégulier et l'autre inscrit au même polygone. » Servons-nous de notations semblables à celles du Mémoire cité; soient donc R', r' les rayons des deux cercles pour le polygone de $2n$ côtés et a' la distance de leurs centres, et soient R, r, a les lignes analogues pour le polygone de n côtés; désignons, de plus, le premier angle au centre c du polygone $2n$ par 2α, et celui du polygone n par $2\alpha_2$; les deux polygones sont d'ailleurs construits à compter du point P où la droite des centres rencontre le cercle circonscrit; la relation pour le polygone $2n$ est exprimée par

$$\frac{K}{n} = t',$$

où

$$am(K) = \frac{\pi}{2}, \quad am(t') = \alpha,$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = K, \quad \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = t',$$

c étant la constante arbitraire représentée par $\varkappa$ dans le Mémoire cité.

L'expression analogue pour le polygone n est

$$\frac{2K}{n} = t,$$

[*] Le texte allemand porte : Richelot, étudiant à Königsberg. Le Mémoire de M. Richelot a été publié en 1829.

[**] Nous avons donné un extrait du Mémoire de M. Jacobi dans le tome X du présent Recueil, *voir* page 435.

où

$$am(t) = \alpha_2,$$

et

$$\int_0^{\alpha_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = t.$$

Il s'ensuit

$$2t' = t.$$

On peut donc appliquer les formules pour la duplication des transcendantes elliptiques que Legendre a données dans ses *Exercices*, page 25. En y remplaçant φ par α et φ_2 par α_2, on obtient

$$(1)\qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha_2 = \operatorname{tang} \alpha \, \Delta(\alpha),$$

$$(2)\qquad \sin \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta\alpha_2}}.$$

On déduit de l'équation (2)

$$\sin^2 \alpha = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_2}{1 + \Delta \alpha_2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{\cos \alpha_2 + \Delta \alpha_2}{1 + \Delta \alpha_2}, \quad \operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_2}{\cos \alpha_2 + \Delta \alpha_2}:$$

ces valeurs, substituées dans l'équation (1), donnent

$$(3)\qquad (\Delta\alpha)^2 = \frac{\cos \alpha_2 + \Delta\alpha_2}{\cos \alpha_2 + 1};$$

mais, d'après le Mémoire cité ci-dessus, on a

$$(4)\qquad \Delta\alpha_2 = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \alpha_2} = \frac{R - a}{R + a}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{r}{R + a},$$

$$(5)\qquad 1 - c^2 = 1 - \varkappa^2 = \frac{(R - a)^2 - r^2}{(R + a)^2 - r^2}.$$

Les mêmes formules existent aussi pour α, R', a' et r' ; donc

$$(6)\qquad \Delta\alpha_2 = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \alpha_2} = \frac{R' - a'}{R' + a'}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{r'}{R' + a'}.$$

$$(7)\qquad 1 - c^2 = 1 - \varkappa^2 = \frac{(R' - a')^2 - r'^2}{(R' + a')^2 - r'^2}.$$

En posant

$$\frac{R+a}{r}=p, \quad \frac{R-a}{r}=q,$$

$$\frac{R'+a'}{r'}=p', \quad \frac{R'-a'}{r'}=q',$$

on déduit des équations (5) et (7) :

$$\frac{q^2-1}{p^2-1}=\frac{q'^2-1}{p'^2-1};$$

les substitutions des équations (4) et (6) dans l'équation (3) donnent

$$\frac{q+1}{p+1}=\frac{q'^2}{p'^2},$$

d'où

$$\frac{q-1}{p-1}=\frac{p'^2}{q'^2}\frac{q'^2-1}{p'^2-1};$$

des deux dernières équations, on tire

$$qp'^2-pq'^2=q'^2-p'^2, \quad qq'^2(p'^2-1)-pp'^2(q'^2-1)=p'^2-q'^2,$$

et par suite

$$(8) \qquad q=\frac{q'^2+q'^2p'^2-p'^2}{q'^2-q'^2p'^2+p'^2},$$

$$(9) \qquad p=\frac{p'^2+q'^2p'^2-q'^2}{p'^2-q'^2p'^2+q'^2};$$

en mettant ces valeurs de q et de p, dans la relation pour le polygone de n côtés, on obtient celle pour $2n$ côtés.

La relation eulérienne pour le triangle est

$$(R+a-r)(R-a-r)=r^2,$$

et pour quatre côtés,

$$(R+a-r)(R-a-r)(R+a+r)(R-a+r)=r^4.$$

En introduisant les lettres p et q, ces expressions prennent les formes

$$(p-1)(q-1)=1, \quad (p^2-1)(q^2-1)=1.$$

Pour le pentagone, on trouve cette formule simple, que l'on peut changer dans les équations plus longues de MM. Fuss et Steiner :

$$4p^2q^2(p-1)(q-1)=(p^2+q^2-p^2q^2)^2.$$

Si, maintenant, on met dans les trois dernières expressions les valeurs de p et de q, tirées des équations (8) et (9), on obtient, après avoir effacé les accents :

Pour l'hexagone,

$$4p^2q^2(p^2-1)(q^2-1)=(p^2+q^2-p^2q^2)^2;$$

Pour l'octogone,

$$16p^4q^4(p^2-1)(q^2-1)=(p^2+q^2-p^2q^2)^4;$$

Pour le décagone,

$$16p^2q^2(p^2-1)(q^2-1)=\left\{\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{p^4q^4-(p^2-q^2)^2}\right\}^2.$$

Les formules pour l'hexagone et l'octogone peuvent être ramenées, après quelques réductions, à celles qui ont été données par MM. Fuss et Steiner.

Si l'on substitue les valeurs de p et q, (8) et (9), dans les formules pour l'hexagone et l'octogone, on obtient, en effaçant les accents,

Pour le dodécagone,

$$64p^4q^4(p^2-1)(q^2-1)=\left\{\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{p^4q^4-(p^2-q^2)^2}\right\}^2,$$

et pour le polygone de 16 côtés,

$$256p^4q^4(p^2-1)(q^2-1)=\left\{\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{[p^4q^4-(p^2-q^2)^2](p^2+q^2-p^2q^2)}\right\}^4.$$

§ II.

Les équations de condition pour le triangle et le quadrilatère sphériques s'obtiennent géométriquement de la manière suivante :

Soient C le pôle d'un petit cercle de la sphère et R la distance polaire, et soient c, r les mêmes lignes pour un autre petit cercle; et désignons par a la distance Cc des deux pôles mesurée sur un grand cercle, ainsi que R et r; par un point quelconque A, pris sur le petit cercle C, menons un arc de grand cercle AMA′, touchant le cercle c en M et coupant de nouveau le cercle C en A′; par ce point A′, on mène une seconde tangente A′A″ au même petit cercle c, ensuite A″A‴, etc.; or A, A′, A″, etc., sont sur la circonférence du cercle C, et AA′A″... forme un polygone sphérique inscrit au cercle C et circonscrit au cercle c. Faisons passer par les pôles C et c un arc de grand cercle, coupant le cercle C, à droite en P et à gauche en Q, de sorte que

$$\mathrm{CP}=\mathrm{R},\quad c\mathrm{P}=\mathrm{R}-a,\quad \text{et}\quad c\mathrm{Q}=\mathrm{R}+a.$$

Ensuite, nommons les angles

$$\mathrm{ACP}=2\varphi,\quad \mathrm{A'CP}=2\varphi',\quad \mathrm{A''CP}=2\varphi'',\quad \text{etc.}$$

Menons par le point P une tangente PP′ au cercle c, et soit P′ est le point d'intersection de cette tangente avec le cercle C ; posons

$$PCP' = 2\beta.$$

Les deux triangles sphériques rectangles AMc, A'Mc donnent

$$\cos AM = \frac{\cos Ac}{\cos r} = \frac{\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi}{\cos r},$$

$$\cos A'M = \frac{\cos A'c}{\cos r} = \frac{\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi'}{\cos r}.$$

Or

$$\sin \frac{AA'}{2} = \sin \frac{AM}{2} \cos \frac{A'M}{2} + \sin \frac{A'M}{2} \cos \frac{AM}{2} = \sin(\varphi' - \varphi).$$

En faisant donc

$$\varkappa = \frac{\cos R \cos a}{\cos r}, \quad \varkappa' = \frac{\sin R \sin a}{\cos r},$$

on obtient

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \sin R \sin(\varphi' - \varphi) = & \sqrt{[1 - (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi)][1 + (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi')]} \\ & + \sqrt{[1 + (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi)][1 - (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi')]}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose

$$2\varphi = 0, \quad 2\varphi' = 2\beta,$$

on arrive à une relation entre R, a, r et β, qui devient, après l'introduction des valeurs de $\varkappa$ et de $\varkappa'$,

$$\begin{aligned} & \sqrt{[\cos r - \cos(R - a)][\cos r + \cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\beta]} \\ & + \sqrt{[\cos r + \cos(R - a)][\cos r - \cos R \cos a - \sin R \sin a \cos 2\beta]} \\ & = 2 \sin R \cos r \sin \beta. \end{aligned}$$

En remplaçant $\cos 2\beta$ et $\sin \beta$ en fonction de $\operatorname{tang}^2 \beta$, savoir,

$$\cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \beta}{1 + \operatorname{tang}^2 \beta} \quad \text{et} \quad \sin \beta = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}},$$

on obtient, après quelques réductions,

$$\begin{aligned} & \sqrt{[\cos r - \cos(R - a)]^2 + \operatorname{tang}^2 \beta [\cos r + \cos(R + a)][\cos r - \cos(R - a)]} \\ & + \sqrt{[\cos r - \cos(R - a)]^2 + \operatorname{tang}^2 \beta [\cos r - \cos(R + a)][\cos r + \cos(R - a)]} \\ & = 2 \sin R \cos r \operatorname{tang} \beta. \end{aligned}$$

De là on tire, à l'aide de quelques réductions nouvelles, la formule simple

$$(11) \quad \operatorname{tang}^2 \beta = \frac{\sin^2(R - a) - \sin^2 r}{\cos^2 R \sin^2 r}.$$

Si, parmi tous les polygones de n côtés, inscrits au cercle C et circonscrit au cercle c, on prend celui dont un sommet est en P, en désignant les autres sommets successifs par P', P'',..., $P^{(n-1)}$, il est évident que, dans ce cas, l'arc Cc partagera le polygone en deux parties égales et semblables.

Il suit de là que si l'on compte les angles et toujours dans le même sens à partir de CP, et $P^{(h)}$ désignant un sommet, on aura

$$PCP^{(h)} + PCP^{(n-h)} = 2\pi;$$

donc, si $n = 2h$, alors

$$PCP^{(h)} = \pi,$$

et le sommet $P^{(h)}$ tombe en Q.

Si $n = 2h + 1$, alors

$$PCP^{(h)} + PCP^{(h+1)} = 2\pi;$$

donc

$$\text{arc } P^{(h)}Q = \text{arc } P^{(h+1)}Q,$$

et l'arc $P^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}P^{\left(\frac{n+3}{2}\right)}$ est perpendiculaire sur l'arc PP'.

Si l'on désigne les points de contact des tangentes PP', P'P'', etc., par M', M'', etc., alors, pour $n = 2h + 1$, le point $M^{(h+1)}$ tombe sur l'arc Cc.

Ainsi, pour le TRIANGLE sphérique, on a donc

$$P'CM'' = \pi - 2\beta,$$

et de là

$$\cos P'CM'' = \frac{\operatorname{tang} M''C}{\operatorname{tang} P'C} = -\cos 2\beta;$$

ou bien, comme

$$M''C = M''c - Cc = r - a,$$

on a

$$\cos 2\beta = \frac{\operatorname{tang}(a - r)}{\operatorname{tang} R},$$

d'où

$$\frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \frac{\operatorname{tang} R - \operatorname{tang}(a - r)}{\operatorname{tang} R + \operatorname{tang}(a - r)},$$

$$\operatorname{tang}^2 \beta = \frac{\sin(R + r - a)}{\sin(R - r + a)}.$$

Comparant cette expression à celle qui est donnée par l'équation (11), on obtient

$$(12) \qquad \sin(R - a - r)\sin(R + a - r) = \cos^2 R \sin^2 r.$$

Si le rayon de la sphère devient infini, et si l'on ne conserve que les grandeurs du deuxième ordre, on obtient

$$(\mathrm{R} - a - r)(\mathrm{R} + a - r) = r^2,$$

relation connue pour le triangle dans un plan.

Si $a = 0$, les deux cercles ont même pôle : ce cas correspond à celui de deux cercles concentriques sur un plan ; on a alors l'équation de condition

$$\operatorname{tang} \mathrm{R} = 2 \operatorname{tang} r,$$

pour le triangle équilatéral sphérique.

Pour le QUADRILATÈRE, on a

$$\mathrm{PCP}' + \mathrm{P}'\mathrm{CP}'' = 2\pi \quad \text{et} \quad \mathrm{PCP}'' = \pi, \quad \mathrm{PCP}' = 2\beta.$$

Si donc, dans la formule générale, on pose

$$2\varphi = 2\beta, \quad 2\varphi' = \pi,$$

on a

$$\begin{aligned} &\sqrt{[\cos r - (\cos \mathrm{R} \cos a + \sin \mathrm{R} \sin a \cos 2\beta)][\cos r + \cos(\mathrm{R}+a)]} \\ &+ \sqrt{[\cos r + \cos \mathrm{R} \cos a + \sin \mathrm{R} \sin a \cos 2\beta][\cos r - \cos(\mathrm{R}+a)]} = 2 \sin \mathrm{R} \cos r \cos \beta. \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}}, \quad \cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \beta}{1 + \operatorname{tang}^2 \beta},$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\sqrt{[\cos r - \cos(\mathrm{R} - a)][\cos r + \cos(\mathrm{R} + a)] + \operatorname{tang}^2 \beta [\cos^2 r - \cos^2(\mathrm{R} + a)]} \\ &+ \sqrt{[\cos r + \cos(\mathrm{R} - a)][\cos r - \cos(\mathrm{R} + a)] + \operatorname{tang}^2 \beta [\cos^2 r - \cos^2(\mathrm{R} + a)]} \\ &= 2 \sin \mathrm{R} \cos r; \end{aligned}$$

d'où, après quelques réductions,

$$\operatorname{tang}^2 \beta = \frac{\cos^2 \mathrm{R} \sin^2 r}{\sin^2(\mathrm{R} + a) - \sin^2 r}.$$

Égalant cette valeur à celle qu'on a obtenue ci-dessus (11), on a

$$[\sin^2(\mathrm{R} + a) - \sin^2 r]\,[\sin^2(\mathrm{R} - a) - \sin^2 r] = \cos^4 \mathrm{R} \sin^4 r,$$

ou

$$(13) \quad \sin(\mathrm{R} + a + r) \sin(\mathrm{R} + a - r) \sin(\mathrm{R} - a + r) \sin(\mathrm{R} - a - r) = \cos^4 \mathrm{R} \sin^4 r.$$

Cette formule a été donnée sans démonstration, par M. Steiner, dans le troisième cahier du tome II du Journal de M. Crelle.

Si le rayon de la sphère devient infini et que l'on conserve seulement les grandeurs du quatrième ordre, on obtient la formule connue, pour le quadrilatère plan,

$$(\mathrm{R} + a + r)(\mathrm{R} + a - r)(\mathrm{R} - a + r)(\mathrm{R} - a - r) = r^4.$$

Si $a = 0$, il vient

$$\operatorname{tang}^2 R = 2 \operatorname{tang}^2 r,$$

pour l'équation de condition d'un quadrilatère équilatéral sphérique inscrit au petit cercle ayant R pour distance polaire, et circonscrit au petit cercle du même pôle, ayant r pour distance polaire.

Quoique les deux formules, pour le triangle et le quadrilatère, aient été calculées pour le cas spécial où un sommet est au point P, il sera démontré plus tard qu'elles ont lieu pour un triangle et un quadrilatère situés d'une manière quelconque, car on démontre d'une manière générale cette proposition :

« Si entre deux petits cercles d'une sphère, et à partir d'un point pris sur le plus » grand, on peut construire un polygone fermé, inscrit dans le plus grand et circon- » scrit au plus petit, alors la même construction peut avoir lieu pour un point quel- » conque pris sur le plus grand des deux cercles. »

§ III.

On peut résoudre le problème dans toute sa généralité au moyen des transcendantes elliptiques, en le ramenant à la multisection de ces transcendantes.

Si l'on mène au petit cercle c une tangente DD′ infiniment voisine de la tangente AA′, de manière que DA et D′A′ soient des quantités infiniment petites, alors

$$\mathrm{ADM} = 180^\circ - \mathrm{MDA'} \quad \text{et} \quad \mathrm{AMD} = \mathrm{A'MD'};$$

ou bien, en conservant les notations précédentes,

$$\mathrm{AD} = \sin R\, d(2\varphi), \qquad \mathrm{A'D'} = \sin R\, d(2\varphi'),$$

$$\frac{\sin \mathrm{AD}}{\sin \mathrm{AM}} = \frac{\sin \mathrm{AMD}}{\sin \mathrm{ADM}}, \qquad \frac{\sin \mathrm{A'D'}}{\sin \mathrm{A'M}} = \frac{\sin \mathrm{A'MD'}}{\sin \mathrm{A'D'M}};$$

ainsi

$$\frac{d(2\varphi)}{d(2\varphi')} = \sqrt{\frac{\cos^2 r - (\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi)^2}{\cos^2 r - (\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi')^2}};$$

en introduisant $\varkappa$ et $\varkappa'$ avec leurs valeurs ci-dessus, on obtient donc

$$(14) \qquad \frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1 - (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi)^2}} = \frac{d(2\varphi')}{\sqrt{1 - (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi')^2}}.$$

Si l'on pose

$$\int_0^{2\varphi} \frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1 - (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi)^2}} = \Pi(2\varphi),$$

l'intégrale complète de l'équation (14) sera

$$\Pi(2\varphi') = \Pi(2\varphi) + \Pi(2\beta);$$

car, lorsque $\varphi = 0$, on a

$$\varphi' = \beta.$$

D'après la notation employée par M. le professeur Jacobi,

$$\Pi(2\varphi') = \mathrm{U}', \qquad \Pi(2\varphi) = \mathrm{U}, \qquad \Pi(2\beta) = \mathrm{T},$$
$$2\varphi' = am(\mathrm{U}'), \quad 2\varphi = am(\mathrm{U}), \quad 2\beta = am(\mathrm{T}),$$

et de là

$$\mathrm{U}' = \mathrm{U} + \mathrm{T}$$

est l'intégrale complète de l'équation différentielle (14). L'équation (10) est l'intégrale algébrique de l'équation (14).

Si l'on y fait

$$m = \varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi \quad \text{et} \quad m' = \varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi',$$

l'intégrale algébrique prend la forme

$$\sqrt{(1-m)(1+m')} + \sqrt{(1+m)(1-m')} = 2 \sin \mathrm{R} \sin(\varphi' - \varphi).$$

Si l'on élimine sin R entre cette équation et son équation différentielle,

$$\varkappa' \left[\sqrt{(1-m)(1-m')} + \sqrt{(1+m)(1+m')}\right] \cdot \left[\frac{\sin 2\varphi'\, d(2\varphi')}{2\sqrt{1-m'^2}} + \frac{\sin 2\varphi\, d(2\varphi)}{2\sqrt{1-m^2}}\right]$$
$$= \sin \mathrm{R} \cos(\varphi' - \varphi)\, d(2\varphi - 2\varphi'),$$

on retombe sur l'équation (14).

§ IV.

Les valeurs des constantes $\varkappa$ et $\varkappa'$ fournissent les rapports suivants :

$$\cos \mathrm{R} \cos a : \sin \mathrm{R} \sin a : \cos r = \varkappa : \varkappa' : 1,$$

ou bien

$$\cos(\mathrm{R} - a) : \cos(\mathrm{R} + a) : \cos r = \varkappa + \varkappa' : \varkappa - \varkappa' : 1;$$

ou bien

$$\cos \mathrm{P}c : \cos \mathrm{Q}c : \cos r = \varkappa + \varkappa' : \varkappa - \varkappa' : 1.$$

On peut s'en servir pour construire la multiplication des transcendantes ci-dessus, correspondant à un angle arbitraire 2β.

Étant donc donnés β, $\varkappa$ et $\varkappa'$, on pourra construire R, a et r. En effet, si l'on fait

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi' = \beta$$

dans l'équation (10), il vient

$$(15) \quad \frac{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa')]}\sqrt{[1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\beta]} + \sqrt{[1+\varkappa+\varkappa']}\sqrt{[1-\varkappa+\varkappa'\cos 2\beta]}}{2\sin\beta} = \sin \mathrm{R},$$

$$(16) \qquad \tang a = \frac{\varkappa'}{\varkappa} \cot R,$$

$$(17) \qquad \cos^2 r = \frac{\cos^2 R \sin^2 R}{\varkappa^2 \sin^2 R + \varkappa'^2 \cos^2 R}.$$

Ainsi, pour trouver l'angle $2\varphi'$, qui a la propriété que

$$\Pi(2\varphi') = \Pi(2\varphi) + \Pi(2\beta), \quad \text{ou} \quad U' = U + T,$$

on mène, par le point quelconque C, deux grands cercles faisant entre eux l'angle 2β, l'équation (15) donne la valeur de R; on aura donc les deux points P et P'; l'équation (16) fait connaître a et par conséquent le point c, et l'équation (17) donne le rayon r du petit cercle qui touche le grand cercle PP'; ainsi les deux petits cercles sont déterminés de grandeur et de position. Faisant

$$PCA = 2\varphi,$$

et menant par le point A l'arc de grand cercle AMA' tangent au petit cercle c, on aura

$$PCA' = 2\varphi'.$$

Si par A' on mène une deuxième tangente A'A'', alors

$$PCA'' = 2\varphi'',$$

et

$$\Pi(2\varphi'') = \Pi(2\varphi') + \Pi(2\beta) = \Pi(2\varphi) + 2\Pi(2\beta),$$

ou, d'après la notation ci-dessus,

$$am(U'') = 2\varphi'', \quad U'' = U' + T = U + 2T,$$

et ainsi de suite; pour la $n^{ième}$ tangente, coupant le cercle C en $A^{(n)}$ et l'angle

$$PCA^{(n)} = 2\varphi^{(n)},$$

on a

$$(18) \qquad \Pi(2\varphi^{(n)}) = \Pi(2\varphi) + n\Pi(2\beta).$$

Enfin, pour trouver l'angle $2\beta_n$, qui satisfasse à l'équation

$$(19) \qquad \Pi(2\beta_n) = n\Pi(2\beta),$$

il suffit de faire $\varphi = 0$, et de commencer à mener les tangentes à partir du point P.

§ V.

L'équation de condition pour que la position et la grandeur des deux petits cercles tels qu'un polygone sphérique de n côtés, construit comme il a été dit, intercepte sur le plus grand cercle l'arc $2\varphi_n - 2\varphi$, est exprimée par l'équation (18).

Si l'on détermine K' par l'équation

$$am(K') = 2\pi,$$

c'est-à-dire

$$\Pi(2\pi) = K';$$

alors, si i représente un nombre entier, on a

(20) $$\Pi(2i\pi + 2\varphi) = \Pi(2i\pi) + \Pi(2\varphi),$$

ou, en prenant les amplitudes des deux membres,

$$2i\pi + am\,U = am\,(iK' + U);$$

c'est une conséquence de la nature trigonométrique de l'intégrale Π, périodique avec 2π.

Si donc on pose

$$2\varphi_n - 2\varphi = 2i\pi$$

dans l'équation (18), alors le polygone commençant en A se ferme au même point; et comme, d'après l'équation (20),

$$\Pi(2\varphi_n) - \Pi(2\varphi) = \Pi(2i\pi),$$

on a donc

(21) $$\Pi(2i\pi) = n\,\Pi(2\beta);$$

telle est l'équation de condition pour que le polygone se ferme en A.

Cette expression étant indépendante de φ, la position du point A est donc arbitraire. La proposition du § III se trouve ainsi démontrée, et la restriction de commencer le polygone en P est légitimée. Ainsi le problème précédent sur les polygones sphériques est ramené à la multisection de la transcendante elliptique $\Pi(2\pi)$ ou K' en n parties, et on a le théorème suivant :

Théorème I. « Si R et r sont les rayons sphériques de deux petits cercles C, c, » dont l'un est circonscrit à un polygone de n côtés et l'autre inscrit, et désignant la » distance sphérique Cc des deux cercles C, c par a, on a toujours

$$\int_0^{2\beta} \frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2}} = \frac{i}{n}\int_0^{2\pi} \frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2}}.\ \text{»}$$

i est le nombre de fois que le polygone parcourt tout le perimètre, et β, $\varkappa$, $\varkappa'$ sont déterminées par les équations

$$\operatorname{tang}^2\beta = \frac{\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)}{\cos^2 R\sin^2 r},\quad \varkappa = \frac{\cos R\cos a}{\cos r},\quad \varkappa' = \frac{\sin R\sin a}{\cos r}.$$

On a ainsi l'équation de condition analytique entre R, r, a, et l'équation (10) donne l'intégrale algébrique.

§ VI.

Il est interessant de transformer la transcendante elliptique de l'équation (14) dans la forme ordinaire, afin de ramener le problème sur la sphère au problème sur le plan.

A cet effet, posons

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1-(\varkappa-\varkappa')}}\operatorname{tang}\psi = g\operatorname{tang}\psi,$$

φ et ψ deviennent simultanément 0 et $\frac{\pi}{2}$, et

$$d(2\varphi) = \frac{2g\,d\psi}{(1+g^2\operatorname{tang}^2\psi)\cos^2\psi},$$

$$\sqrt{1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2} = \sqrt{1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)}\cdot\sqrt{1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)},$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1-\operatorname{tang}^2\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{1-g^2\operatorname{tang}^2\psi}{1+g^2\operatorname{tang}^2\psi},$$

$$\sqrt{1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)} = \frac{1}{\cos\psi}\sqrt{\frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1+g^2\operatorname{tang}^2\psi}},$$

$$\sqrt{1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi} = \sqrt{\frac{1+\varkappa+\varkappa'}{1+g^2\operatorname{tang}^2\psi}}\cdot\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\psi\,\frac{[1+(\varkappa-\varkappa')][1-(\varkappa+\varkappa')]}{[1-(\varkappa-\varkappa')][1+(\varkappa+\varkappa')]}};$$

et de là

$$\frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\sin^2\psi}}.$$

C'est la forme des différentielles elliptiques ordinaires; et comme la multiplication et l'addition de ces fonctions sont indiquées dans le Mémoire cité de M. Jacobi [*], la construction des différentielles de l'équation (14) est donc ramenée à la construction des différentielles ordinaires.

L'équation de condition pour que le polygone sphérique de n côtés se ferme en un seul tour, savoir,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2}} = n\int_0^{2\beta}\frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2}},$$

devient maintenant

$$\int_0^{\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\sin^2\psi}} = n\int_0^{\alpha}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\sin^2\psi}};$$

β et α sont liés par la relation

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1-(\varkappa-\varkappa')}}\operatorname{tang}\alpha.$$

Faisant

$$\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2} = c^2,$$

[*] *Voir* tome X, page 438.

et empruntant au Mémoire cité les notations suivantes

$$t = \int_0^{\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}} = F\alpha, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}} = F\frac{\pi}{2},$$

$$am.t = \alpha, \quad am.K = \frac{\pi}{2}:$$

alors la dernière intégrale devient

$$F\pi = nF\alpha, \quad \text{ou} \quad 2K = nt;$$

mais c'est l'équation de condition pour le polygone plan de n côtes; on a donc ce théorème :

Théorème II. « L'équation pour le polygone plan de n côtés, qui est

$$2K = nt,$$

» pour le module

$$c^2 = \frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2 - \varkappa^2},$$

» donne, conjointement avec l'expression

$$\operatorname{tang} \beta = \sqrt{\frac{1 - (\varkappa + \varkappa')}{1 - (\varkappa - \varkappa')}} \operatorname{tang} \alpha,$$

» le premier angle polaire

$$2\beta = \text{PCP}'$$

» pour un polygone sphérique de même nombre de côtés et se rapportant à deux
» petits cercles, déterminés de grandeur et de position par les équations (15), (16)
» et (17). »

§ VII.

Si l'on remplace $\varkappa$ et $\varkappa'$ par leurs valeurs, on obtient

$$g^2 = \frac{\sin\left(\frac{R - a + r}{2}\right) \sin\left(\frac{R - a - r}{2}\right)}{\sin\left(\frac{R + a + r}{2}\right) \sin\left(\frac{R + a - r}{2}\right)},$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{(1+\varkappa')^2 - \varkappa^2}} = \frac{\cos r}{\sqrt{\sin\left(\frac{R + a + r}{2}\right) \sin\left(\frac{R + a - r}{2}\right) \cos\left(\frac{R - a - r}{2}\right) \cos\left(\frac{R - a + r}{2}\right)}} = \frac{\cos r}{\sqrt{M}}.$$

$$c^2 = \frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa'+\varkappa)(1+\varkappa'-\varkappa)} = \frac{\sin R \sin a \cos r}{\sqrt{M}},$$

$$1 - c^2 = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{R-a-r}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{R-a+r}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{R+a+r}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{R+a-r}{2}\right)};$$

et la differentielle générale devient

$$\frac{\cos r}{\sqrt{M}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{\cos r \sin R \sin a \sin^2\psi}{M}}}.$$

Comparons les expressions pour le polygone sphérique avec celles pour le polygone plan; on a pour le plan

$$\cos\alpha = \frac{r}{R+a}; \quad 1 - c^2 = \frac{\left(\frac{R-a}{r}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R+a}{r}\right)^2 + 1}, \quad \operatorname{tang}^2\alpha = \left(\frac{R+a}{r}\right)^2 - 1;$$

et pour la sphère,

$$\operatorname{tang}^2\beta = \frac{\sin^2(R-a) - \sin^2 r}{\cos^2 R \sin^2 r} = \frac{\sin\left(\frac{R-a-r}{2}\right)\sin\left(\frac{R-a+r}{2}\right)}{\sin\frac{R+a-r}{2}\sin\frac{R+a+r}{2}} \operatorname{tang}^2\alpha,$$

$$1 - c^2 = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{R-a-r}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{R+a+r}{2}\operatorname{tang}\frac{R+a-r}{2}};$$

par comparaison, on a donc

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{R-a-r}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{R+a+r}{2}\operatorname{tang}\frac{R+a-r}{2}} = \frac{\left(\frac{R-a}{r}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R+a}{r}\right)^2 - 1},$$

$$\frac{4\sin\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\sin\left(\frac{R-a-r}{2}\right)\cos\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\cos\left(\frac{R-a-r}{2}\right)}{\cos^2 R \sin^2 r}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\sin\left(\frac{R-a-r}{2}\right)}{\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{R+a-r}{2}}\left[\left(\frac{R+a}{r}\right)^2 - 1\right];$$

d'où l'on tire

$$(22)\quad \frac{R+a+r}{r}=\frac{2\sin\left(\frac{R+a+r}{2}\right)\cos\left(\frac{R-a+r}{2}\right)}{\cos R\sin r}=\frac{\sin(R+r)+\sin a}{\cos R\sin r}.$$

$$(23)\quad \frac{R+a-r}{r}=\frac{2\sin\left(\frac{R+a-r}{2}\right)\cos\left(\frac{R-a-r}{2}\right)}{\cos R\sin r}=\frac{\sin(R-r)+\sin a}{\cos R\sin r}.$$

$$(24)\quad \frac{R-a+r}{r}=\frac{2\sin\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\cos\left(\frac{R+a+r}{2}\right)}{\cos R\sin r}=\frac{\sin(R+r)-\sin a}{\cos R\sin r}.$$

$$(25)\quad \frac{R-a-r}{r}=\frac{2\sin\left(\frac{R-a-r}{2}\right)\cos\left(\frac{R+a-r}{2}\right)}{\cos R\sin r}=\frac{\sin(R-r)-\sin a}{\cos R\sin r};$$

d'où

$$\frac{R}{r}=\frac{\tang R}{\tang r},\qquad \frac{a}{r}=\frac{\sin a}{\cos R\sin r}.$$

On arrive ainsi à ce théorème :

Théorème III. « Si l'on a une équation de condition entre R, a et r pour un polygone » plan de n côtés, inscrit au cercle R et circonscrit au cercle r, et si l'on fait les » substitutions suivantes :

$$\frac{R}{r}=\frac{\tang R}{\tang r},\qquad \frac{a}{r}=\frac{\sin a}{\cos R\ \sin r},$$

» on obtient immédiatement l'équation de condition correspondante entre R, r, a sur la » sphère pour un polygone sphérique de même nombre de côtés. »

§ VIII.

Vérifions ce théorème sur le triangle et le quadrilatère sphériques pour lesquels nous avons trouvé les formules (12) et (13), par la voie géométrique.

La formule pour le triangle dans le plan est

$$(R+a-r)(R-a+r)=r^2;$$

de là, pour le triangle sphérique, par les équations (23) et (25),

$$\sin(R+a-r)\sin(R-a-r)=\cos^2 R\ \sin^2 r.$$

La formule pour le quadrilatère plan est

$$(R+a-r)(R-a-r)(R+a+r)(R-a+r)=r^4;$$

de là on conclut, au moyen des formules (22), (23), (24), (25), pour le quadrilatère sphérique,

$$\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r) = \cos^4 R \sin^4 r.$$

Les deux formules s'accordent avec ce qui a été trouvé ci-dessus.

La formule pour le *pentagone plan* est

$$4p^2q^2(p-1)(q-1) = (p^2+q^2-p^2q^2)^2 = [1-(1-p^2)(1-q^2)]^2,$$

ou, en remplaçant p et q par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} &4\left(\frac{R+a}{r}\right)^2\left(\frac{R-a}{r}\right)^2\left(\frac{R+a-r}{r}\right)\left(\frac{R-a-r}{r}\right) \\ &= \left\{1-\left[\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right]\left[\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right]\right\}^2. \end{aligned}$$

Les formules de transformation (22), (23), (24), (25) donnent

$$\left(\frac{R+a}{r}\right)^2\left(\frac{R-a}{r}\right)^2 = \left(\frac{\sin^2 R\cos^2 r - \sin^2 a}{\cos^2 R \sin^2 r}\right)^2.$$

On a donc, pour le *pentagone sphérique*,

$$\begin{aligned} &4(\sin^2 R\cos^2 r - \sin^2 a)^2 \sin(R+a-r)\sin(R-a-r)\cos^2 R\sin^2 r \\ &= [\cos^4 R\sin^4 r - \sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)]^2 \\ &= (\cos^4 R\sin^4 r - N)^2. \end{aligned}$$

On obtient de la même manière :

Pour l'*hexagone sphérique*,

$$4(\sin^2 R\cos^2 r - \sin^2 a)^2 N = (\cos^4 R\sin^4 r - N)^2,$$

et pour l'*octogone sphérique*,

$$16(\sin^2 R\cos^2 r - \sin^2 a)^4 \cos^4 R\sin^4 r N = (\cos^4 R\sin^4 r - N)^4.$$