JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Note sur les fonctions de M. Sturm

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 297-299.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__297_0>

NOTE SUR LES FONCTIONS DE M. STURM;

PAR M. A. CAYLEY.

On sait que la suite des fonctions

$$\begin{aligned}
fx &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots,\\
f_1x &= \Sigma(x-b)(x-c)(x-d)\ldots,\\
f_2x &= \Sigma(a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots,\\
f_3x &= \Sigma(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(x-d)\ldots,
\end{aligned}$$

est de la plus grande utilité dans la théorie de la résolution numérique des équations. En effet, on obtient tout de suite à leur moyen le nombre de racines réelles comprises entre deux limites quelconques. Il était donc intéressant de chercher la manière d'exprimer ces fonctions par les coefficients de fx.

Soit, pour cela, m un nombre quelconque, pas plus grand que le degré n de cette fonction. En prenant k pour $m^{\text{ième}}$ racine de la suite a, b, c,..., et mettant, pour abréger,

$$\mathrm{P} = (-)^{\frac{1}{2}m(m-1)}(a-b)(a-c)\ldots(a-k)(b-c)\ldots(b-k)\ldots(j-k),$$

cela donne

$$f_m x : fx = \sum \frac{\mathrm{P}^2}{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)},$$

dans laquelle expression

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = 1,\ & a,\ldots,\ a^{m-1},\\
1,\ & b,\ldots,\ b^{m-1},\\
& \ldots\ldots\\
1,\ & k,\ldots,\ k^{m-1},
\end{aligned}$$

et, de plus,

$$\frac{P}{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)} = (-)^{\frac{1}{2}m.m-1}\left[\frac{(b-c)\ldots(b-k)\ldots(j-k)}{(x-a)} + \ldots\right],$$

dans laquelle le coefficient de x^{-r} est égal à

$$(-)^{\frac{1}{2}m(m-1)}[a^{r-1}(b-c)\ldots(b-k)\ldots(j-k)+\ldots],$$

c'est-à-dire à

$$\begin{array}{l} 1,\ a,\ldots,\ a^{m-2},\ a^{r-1}, \\ 1,\ b,\ldots,\ b^{m-2},\ b^{r-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ k,\ldots,\ k^{m-2},\ k^{r-1}. \end{array}$$

Donc enfin le coefficient de x^{-r} dans $f_m x : fx$ est égal à

$$\begin{array}{l} \Sigma\ 1,\ a,\ldots,\ a^{m-1} \times 1,\ a,\ldots,\ a^{m-2},\ a^{r-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad 1,\ k,\ldots,\ k^{m-1} \times 1,\ k,\ldots,\ k^{m-2},\ k^{r-1}, \end{array}$$

où, au moyen d'une propriété connue des déterminants, en représentant comme à l'ordinaire par S_q la somme des $q^{ièmes}$ puissances de toutes les racines, ce coefficient devient égal à

$$\begin{array}{llll} S_0, & S_1,\ldots, & S_{m-2}, & S_{r-1}, \\ S_1, & S_2,\ldots, & S_{m-1}, & S_r, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1}, & S_m,\ldots, & S_{2m-3}, & S_{r+m-2}. \end{array}$$

Et de là, en mettant $T_q = \sum \frac{a^q}{x-a}$,

$$\begin{array}{rllll} f_m x : fx = & S_0, & S_1,\ldots, & S_{m-2}, & T_0, \\ & S_1, & S_2,\ldots, & S_{m-1}, & T_1, \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & S_{m-1}, & S_m\ldots, & S_{2m-3}, & T_{m-1}; \end{array}$$

en multipliant par fx, et mettant

$$Q_{m,r} = S_{m+r-1} - p_1 S_{m+r-2} \ldots + (-)^r p_r S_{m-1},$$

où l'on suppose

$$fx = x^n - p_1 x^{n-1} \ldots + (-)^n p_n,$$

cela donne

$$\begin{aligned} f_m x = \Sigma_r x^{n-m-r}\ & S_0, \quad S_1, \ldots, \quad S_{m-2}, \quad Q_{m,r}, \\ & S_1, \quad S_2, \ldots, \quad S_{m-1}, \quad Q_{m+1,r}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & S_{m-1}, \quad S_m, \ldots, \quad S_{2m-3}, \quad Q_{2m-1,r}, \end{aligned}$$

où r peut ne s'étendre que depuis o jusqu'à $n - m$, puisque $f_m x$ est fonction entière. Au moyen des relations connues qui existent entre les quantités S_q, on a

$$\begin{aligned} Q_{m+s,r} &= (-)^r p_{r+1} S_{m+s-2} \ldots + (-)^{n-1} p_n S_{r+m+s-n-1} \ldots [r + m + s > n], \\ Q_{m+s,r} &= (-)^r p_{r+1} S_{m+s-2} \ldots + (-)^{r+m+s-3} p_{r+m+s-2} S_1 \\ &\quad + (-)^{r+m+s-2} p_{r+m+s-1} (r + m + s - 1) \ldots\ldots \left[r + m + s \overset{=}{<} n\right]; \end{aligned}$$

et de là, en posant

$$\begin{aligned} Q'_{m+s,r} &= (-)^{r+m-1} p_{r+m} S_{s-1} \ldots + (-)^{n-1} p_n S_{r+m+s-n-1} . [r + m + s > n], \\ Q'_{m+s,r} &= (-)^{r+m-1} p_{r+m} S_{s-1} \ldots + (-)^{r+m+s-3} p_{r+m+s-2} S_1 \\ &\quad + (-)^{r+m+s-2} p_{r+m+s-1} (r + m + s - n - 1) \ldots \left[r + m + s \overset{=}{<} n\right], \end{aligned}$$

on peut, par les propriétés des déterminants, réduire $Q_{m+s,r}$ à $Q'_{m+s,r}$ dans l'expression de $f_m x$. Nous avons donc exprimé cette fonction au moyen des coefficients $p_1, p_2, \ldots$ et des sommes $S_1, S_2, \ldots, S_{2m-3}$, lesquelles s'expriment facilement par ces mêmes coefficients (et pour calculer $f_1 x, f_2 x, \ldots, f_n x$, on aurait seulement besoin de calculer ces sommes une fois pour toutes jusqu'à S_{2n-3}); il serait donc facile de former des tables de ces fonctions, pour les équations d'un degré quelconque, ce qui pourrait à peine s'effectuer d'aucune autre manière.