JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Sur les arcs à différence rectifiable et les zones à différence planifiable

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 331-335.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__331_0>

SUR LES ARCS A DIFFÉRENCE RECTIFIABLE

ET LES ZONES A DIFFÉRENCE PLANIFIABLE;

PAR M. LEBESGUE.

I. — *Arcs à différence rectifiable.*

Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires. Soit

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} i,$$

d'où

$$x = \varphi(i), \quad ds = \frac{dx}{\cos i},$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad s = \left(\frac{x}{\cos i}\right)_{i_0}^{I} - \int_{i_0}^{I} \varphi(i)\, d\left(\frac{1}{\cos i}\right),$$

l'intégrale et la fonction $\frac{x}{\cos i}$ étant prises entre les limites i_0 et I, qui répondent aux extrémités de l'arc.

Si l'on pose

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang} i', \quad y = \varphi(i'),$$

on aura de même

$$(2) \qquad s' = \left(\frac{y}{\cos i'}\right)_{i'_0}^{I'} - \int_{i'_0}^{I'} \psi(i')\, d\left(\frac{1}{\cos i'}\right).$$

Nous appellerons associés deux arcs donnés par les formules (1) et (2), et qui soient tels, qu'une relation donnée entre i et i',

$$(3) \qquad F(i, i') = 0,$$

rende égales entre elles les intégrales définies des équations (1) et (2), de sorte que la différence des arcs s et s' sera rectifiable, car $\frac{x}{\cos i}$, $\frac{y}{\cos i'}$ sont des segments de tangente.

Exemple. Pour l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, la formule (1) devient

$$s = \left[\frac{a \operatorname{tang} i\,(a^2 + a^2 \operatorname{tang}^2 i)}{\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 i + b^2}\,\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 i + a^2}}\right]_{i_0}^{I} - \int_{i_1}^{I} \frac{(a \operatorname{tang} i)^2\, d.a \operatorname{tang} i}{\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 i + b^2}\,\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 i + a^2}};$$

on a de même

$$s' = \left[\frac{b \operatorname{tang} i'\,(b^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 i')}{\sqrt{b^2 \operatorname{tang}^2 i' + a^2}\sqrt{b^2 \operatorname{tang}^2 i' + b^2}}\right]_{i'_0}^{I'} - \int_{i'_0}^{I'} \frac{(b \operatorname{tang} i')^2 . d\,(a \operatorname{tang} i')}{\sqrt{b^2 \operatorname{tang}^2 i' + a^2}\sqrt{b^2 \operatorname{tang}^2 i' + b^2}}.$$

Si l'on pose la relation

$$a \operatorname{tang} i = b \operatorname{tang} i' \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tang} i}{b} = \frac{\operatorname{tang} i'}{a},$$

les arcs sont associés, et leur différence rectifiable. Si l'on fait $i = 0$, d'où $i' = 0$, l'arc s a son origine au sommet B: soient x, y les coordonnées de son autre extrémité; l'arc s' a son origine au sommet A: soient x_1, y_1 les coordonnées de son autre extrémité; la condition d'association devient

$$a^4 - a^2(x^2 + x_1^2) + e^2x^2x_1^2 = 0, \quad (a^2e^2 = a^2 - b^2),$$

et la différence des arcs devient $e^2 \cdot \frac{x\xi}{a}$. On a précisément le théorème de Fagnano.

II. — *Zones à différence planifiable.*

Je donnerai le nom de *parallèle* au lieu des points d'une surface pour lesquels la normale fait un angle constant i, avec une droite fixe, qui sera l'axe du parallèle. Ainsi, une surface rapportée à trois axes rectangulaires, étant représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

pour avoir les équations d'un parallèle dont l'axe fasse, avec les axes des coordonnées, les angles α, β, γ, il suffit de prendre le système d'équations

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$\cos^2 i = \left(\cos\alpha \frac{df}{dx} + \cos\beta \frac{df}{dy} + \cos\gamma \frac{df}{dz}\right)^2 \left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right].$$

Pour le cas où l'axe du parallèle se confondrait avec celui des z, on aurait

$$f(x, y, z) = 0, \quad \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 = \left(\frac{df}{dz}\right)^2 \operatorname{tang}^2 i.$$

Comme on peut dire que pour chaque point d'un parallèle, le plan tangent fait le même angle avec un plan perpendiculaire à l'axe, on reconnaît de suite que si l'on projette orthogonalement un parallèle sur un plan perpendiculaire à l'axe, et que l'aire interceptée par cette projection soit $\omega = f(i)$, i étant pour le parallèle l'inclinaison de la normale sur l'axe, l'aire Ω de la zone comprise entre deux parallèles relatifs aux angles i_0 et I sera

$$(4) \qquad \Omega = \int_{i_0}^{\mathrm{I}} \frac{d\omega}{\cos i} = \left(\frac{\omega}{\cos i}\right)_{i_0}^{\mathrm{I}} - \int_{i_0}^{\mathrm{I}} \omega d.\left(\frac{1}{\cos i}\right).$$

Je ferai de nombreuses applications de cette formule dans un Mémoire sur les parallèles et les méridiens des surfaces du second degré. Je m'en servirai ici pour étendre le théorème de Fagnano à l'ellipsoïde.

Pour l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on trouve, pour la projection d'un parallèle dont l'axe est celui des z,

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}\right) x^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}\right) y^2 = \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2};$$

de là on tire

$$\omega = \pi \cdot \frac{\frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}}{\frac{1}{ab} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}}},$$

et la formule (3) devient

$$\Omega = \left[\frac{\pi \cdot \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}\right)}{\frac{1}{abc}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}}\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}}\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}}}\right]_{i_0}^{\mathrm{I}}$$
$$- \int_{i_0}^{\mathrm{I}} \frac{\pi \cdot \frac{\operatorname{tang} i}{c} \cdot d \cdot \left(\frac{\operatorname{tang} i}{c}\right)}{\frac{1}{abc}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}}\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}}\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{c^2}}},$$

ou bien, en représentant le dénominateur par D,

$$\Omega = \left[\frac{\pi}{D}\cdot\frac{\tang^2 i}{c^2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{\tang^2 i}{c^2}\right)\right]_{i_0}^{I} - \int_{i_0}^{I}\frac{\pi}{D}\,\frac{\tang i}{c}\,d\cdot\left(\frac{\tang i}{c}\right).$$

Si l'on calcule les formules analogues, en prenant les axes des y et celui des x successivement pour axes des parallèles, on aura, D devenant D′ et D″, et i devenant i' et i'' successivement,

$$\Omega' = \left[\frac{\pi}{D'}\,\frac{\tang^2 i'}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\tang^2 i'}{b^2}\right)\right]_{i'_0}^{I'} - \int_{i'_0}^{I'}\frac{\pi}{D'}\,\frac{\tang i'}{b}\,d\cdot\left(\frac{\tang i'}{b}\right),$$

$$\Omega'' = \left[\frac{\pi}{D''}\,\frac{\tang^2 i''}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\tang^2 i''}{a^2}\right)\right]_{i''_0}^{I''} - \int_{i''_0}^{I''}\frac{\pi}{D''}\,\frac{\tang i''}{a}\,d\cdot\left(\frac{\tang i''}{a}\right).$$

Si l'on pose

$$\frac{\tang i}{c} = \frac{\tang i'}{b},$$

les zones Ω, Ω' seront dites associées, la partie représentée par l'intégrale définie étant la même.

Si l'on fait

$$i = 0, \quad \text{d'où} \quad i' = 0,$$

la différence des zones sera (on suppose $a > b > c$)

$$\Omega - \Omega' = \frac{\pi}{D}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\frac{\tang^2 i}{c^2}.$$

Si l'on pose

$$\frac{\tang i}{c} = \frac{\tang i'}{b} = \frac{1}{d},$$

cette différence prendra la forme

$$\frac{\pi a^2 b^2 c^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)d}{\sqrt{a^2+d^2}\sqrt{b^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\pi a^2(b^2-c^2)d}{\sqrt{a^2+d^2}\sqrt{b^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2}}.$$

On voit que, si l'on posait

$$\frac{\tang i}{c} = \frac{\tang i'}{b} = \frac{\tang i''}{a} = \frac{1}{d},$$

on aurait trois zones associées deux à deux, et dont les différences seraient proportionnelles aux quantités

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}, \quad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}.$$

Dans ce cas, les trois parallèles qui limitent ces zones à une base seraient les traces d'un ellipsoïde intérieur ayant pour équation

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2}\right)x^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2}\right)y^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\right)z^2 = \frac{1}{d^2},$$

et au moyen des sections principales duquel on construirait très-simplement les différences des zones associées.

En rendant nul un des axes de l'ellipsoïde, on retrouverait le théorème de Fagnano.

J'ajouterai, en finissant, qu'il me paraît probable que les théorèmes de M. Chasles sur les arcs coniques à différence rectifiable peuvent s'étendre aux surfaces du second degré, et fournir des zones à différence planifiable. Cette extension mérite, je crois, de fixer l'attention de cet éminent géomètre. Ce que je pourrai trouver à ce sujet aura sa place dans le Mémoire indiqué plus haut.