JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 343-344.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__343_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. WILLIAM **ROBERTS**.

« 6 juillet 1846.

» ..... Aux intégrales contenues dans l'article que vous avez bien voulu insérer dans votre Journal (cahier de mai, page 157), on peut ajouter les suivantes, qui valent la peine d'être mentionnées.

» En conservant les notations qui se trouvent dans ce Mémoire, on a l'équation (22)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}$$
$$= \frac{1}{2k^2k'^2}\left\{\left[1 + k'^2 - k'^2 \log\left(\frac{1}{k'}\right)\right] \mathrm{F}(k) - \left[2 - \log\left(\frac{1}{k'}\right)\right] \mathrm{E}(k)\right\}.$$

D'ailleurs, il est évident que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{d\varphi}{\Delta},$$

ce qui donne, en substituant pour $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{d\varphi}{\Delta}$ sa propre valeur, tirée de l'équation (18),

$$(a) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2k'^2}\left\{(1 + k'^2)\,\mathrm{F}(k) + \left[\log\left(\frac{1}{k'}\right) - 2\right] \mathrm{E}(k)\right\}.$$

» Maintenant faisons, dans l'équation (17),

$$f(\Delta) = \frac{1}{\Delta^2}\log\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

et nous en conclurons, à l'aide de l'équation (a),

$$(b)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\Delta d\varphi = \frac{1}{2}\left\{\left[2 - \log\left(\frac{1}{k'}\right)\right]\mathrm{E}(k) - (1 + k'^2)\,\mathrm{F}(k)\right\}.$$

» On peut encore déduire de l'équation (b), par l'intégration par parties, l'intégrale suivante

$$(c)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{E}(k,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{2k^2}\left\{(1 + k'^2)\,\mathrm{F}(k) + \left[\log\left(\frac{1}{k'}\right) - 2\right]\mathrm{E}(k)\right\}.$$

» Il serait assez facile de trouver beaucoup d'autres intégrales qui appartiennent à cette classe. J'ai mentionné les formules (a), (b), (c), parce qu'elles paraissent être, en quelque sorte, fondamentales. »