

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Sur l'intégrale définie  $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{\log(1+n \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 11 (1846), p. 471-476.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1846\\_1\\_11\\_\\_471\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__471_0)

Gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1+n \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

I. En cherchant la valeur de cette intégrale, nous considérerons séparément les trois formes admissibles de  $n$ : savoir, celles du paramètre d'une fonction elliptique de la troisième espèce, au module  $k$ . On verra que son évaluation dépend des fonctions elliptiques et de la transcendante  $\Upsilon$ , qui figure d'une manière si importante dans les recherches de M. Jacobi, relatives à la réduction des fonctions à paramètre logarithmique.

1°. Soit  $n = -k^2 \sin^2 \theta$ . On aura donc, en désignant par  $u$  l'intégrale dont on cherche la valeur, et en la différentiant par rapport à  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= -2k^2 \sin \theta \cos \theta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{1-k^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= 2 \cotang \theta [F(k) - \Pi(-k^2 \sin^2 \theta, k)]. \end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$\Pi(-k^2 \sin^2 \theta, k) = F(k) + \frac{\text{tang } \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} [F(k) E(k, \theta) - E(k) F(k, \theta)]$$

(*Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 141); ce qui donne

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} [E(k) F(k, \theta) - F(k) E(k, \theta)],$$

d'où l'on déduit, en mettant, suivant l'usage,

$$\int \frac{E(k, \theta)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \Upsilon(k, \theta),$$

$$(1) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1-k^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = E(k) [F(k, \theta)]^2 - 2 F(k) \Upsilon(k, \theta).$$

Si l'on y fait  $\theta = \frac{1}{2}\pi$ , on trouvera, en se rappelant que

$$\Upsilon(k, \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}F(k)E(k) - \frac{1}{2}\log k',$$

$k'$  étant le complément de  $k$  (*Traité des Fonctions elliptiques*, tome III, page 156),

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \log(k') F(k),$$

formule que j'ai démontrée déjà dans un Mémoire inséré dans le cahier de mai.

2°. Soit  $n = \cotang^2 \theta$ , et nous verrons aisément que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sin \theta \cos \theta} [\Pi(\cotang^2 \theta, k) - F(k)].$$

Or on a

$$\frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}}{\sin \theta \cos \theta} \Pi(\cotang^2 \theta, k) = \frac{1}{2}\pi + F(k) [\tang \theta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta} - E(k', \theta)] - [E(k) - F(k)] F(k', \theta)$$

(Legendre, tome I, page 144), en sorte que

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{2}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2}\pi + F(k) [\tang \theta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta} - E(k', \theta)] - [E(k) - F(k)] F(k', \theta) \right\} \\ &\quad - \frac{2F(k, \theta)}{\sin \theta \cos \theta}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} u &= \pi F(k', \theta) - 2F(k) \Upsilon(k', \theta) - [E(k) - F(k)] [F(k', \theta)]^2 \\ &\quad - 2F(k) \log \sin \theta + \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur de la constante  $\mathcal{E}$ , faisons  $\theta = \frac{1}{2}\pi$ , ce qui donne  $u = 0$ , et l'on aura

$$\pi F(k') - F(k) [F(k') E(k') - \log k] - [E(k) - F(k)] [F(k')]^2 + \mathcal{E} = 0.$$

Si l'on y substitue, pour  $\pi$ , sa valeur connue

$$2[F(k) E(k') + F(k') E(k) - F(k) F(k')],$$

on obtiendra

$$[F(k) E(k') + F(k') E(k) - F(k) F(k')] F(k') + F(k) \log k + \mathcal{E} = 0,$$

ou bien encore

$$\frac{\pi}{2} F(k') + F(k) \log(k) + \xi = \alpha.$$

On trouve donc finalement

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 + \cotang^2 \theta \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} a \varphi \\ & = \pi F(k', \theta) - 2F(k) \Upsilon(k', \theta) - [E(k) - F(k)] [F(k', \theta)]^2 \\ & - 2F(k) \log \sin \theta - \frac{1}{2} \pi F(k') - F(k) \log k. \end{aligned} \right.$$

3°. Soit  $n = -1 + k'^2 \sin^2 \theta$ , et l'on aura

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2k'^2 \sin \theta \cos \theta}{1 - k'^2 \sin^2 \theta} [\Pi(-1 + k'^2 \sin^2 \theta, k) - F(k)].$$

Mais Legendre a démontré (tome I, page 138) que

$$\frac{k'^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} [\Pi(-1 + k'^2 \sin^2 \theta, k) - F(k)] = \frac{1}{2} \pi - F(k) E(k', \theta), \\ - [E(k) - F(k)] F(k', \theta),$$

ce qui donne

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} \left\{ \frac{1}{2} \pi - F(k) E(k', \theta) - [E(k) - F(k)] F(k', \theta) \right\},$$

et, en intégrant,

$$u = \pi F(k', \theta) - 2F(k) \Upsilon(k', \theta) - [E(k) - F(k)] [F(k', \theta)]^2 + \xi.$$

Pour avoir la valeur de  $\xi$ , faisons  $\theta = \frac{1}{2} \pi$ , ce qui donne, comme on sait,

$$u = \log(k') F(k),$$

et nous trouverons

$$\log(k') F(k) = \pi F(k') - F(k) [F(k') E(k') - \log k] \\ - [E(k) - F(k)] [F(k')]^2 + \xi,$$

d'où l'on déduit, après quelques réductions,

$$\xi = \log\left(\frac{k'}{k}\right) F(k) - \frac{1}{2} \pi F(k'),$$

et, par conséquent,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1 - (1 - k'^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi]}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ & = \pi F(k', \theta) - 2F(k) \Upsilon(k', \theta) - [E(k) - F(k)] [F(k, \theta)]^2 \\ & \quad + \log\left(\frac{k'}{k}\right) F(k) - \frac{1}{2}\pi F(k'). \end{aligned} \right.$$

2. Dans l'équation (1), faisons

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{1+k'},$$

c'est-à-dire, soit  $\theta$  l'amplitude qui sert à la bissection de la fonction complète, et nous aurons

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos^2 \varphi + k' \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{1}{4} F(k) E(k) - 2F(k) \Upsilon(k, \theta).$$

Maintenant, Legendre a démontré [\*] que

$$\Upsilon(\psi) = 4\Upsilon(\varphi) + \log(1 - k^2 \sin^4 \varphi),$$

lorsque les deux amplitudes  $\psi$  et  $\varphi$  satisfont à la formule de duplication,

$$F(k, \psi) = 2F(k, \varphi).$$

Dans cette relation, mettons  $\psi = \frac{1}{2}\pi$ , ce qui donnera  $\varphi = \theta$ , et nous aurons

$$4\Upsilon(k, \theta) = \frac{1}{2} F(k) E(k) - \log\left(\frac{2k' \sqrt{k'}}{1+k'}\right),$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos^2 \varphi + k' \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{1}{2} \log\left(\frac{2k' \sqrt{k'}}{1+k'}\right) F(k),$$

résultat qui coïncide avec la formule (23) de mon Mémoire déjà cité.

3. Si dans l'équation (3), on pose  $\theta = 0$ , on obtiendra

$$(4) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{k'}{k}\right) F(k) - \frac{1}{4}\pi F(k').$$

---

[\*] *Traité des Fonctions elliptiques*, tome III, n° 188.

Maintenant, transformons l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\tan \varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

en prenant un nouvel angle  $\psi$  donné par la formule

$$k' \tan \varphi \tan \psi = 1,$$

ce qui nous fera voir sans difficulté que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\tan \psi) d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{k' \tan \varphi}\right) \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

et, par conséquent,

$$(5) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\tan \varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{k'}\right) F(k).$$

Combinant encore les équations (4) et (5) entre elles, on parviendra à la formule suivante:

$$(6) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\sin \varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{k}\right) F(k) - \frac{1}{4} \pi F(k').$$

En se rappelant que la limite de  $F(k')$  est  $\left(\frac{4}{k}\right)$ , lorsque  $k$  devient très-petit, on déduira facilement, des équations (4) et (6), les résultats bien connus, savoir

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\cos \varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \pi \log \frac{1}{2}.$$

4. A cause de la liaison de notre intégrale ( $u$ ) avec la théorie des fonctions elliptiques, il est bon de remarquer qu'elle peut s'écrire de la manière suivante. Soient  $x$  une fonction de première espèce au module  $k$ ,  $A(x)$  son amplitude, et  $X$  la fonction complète, et il est évident que

$$u = \int_0^X \log[1 + n \sin^2 A(x)] dx.$$

Je finirai en mentionnant qu'il existe une relation très-simple entre les

fonctions complètes de troisième espèce,

$$\Pi(k^2 \tan^2 \theta, k) \quad \text{et} \quad \Pi(-k'^2 \sin^2 \theta, k'),$$

dont les modules sont complémentaires, et dont les paramètres ont des caractères opposés; en effet, on a

$$\begin{aligned} \Pi(k^2 \tan^2 \theta, k) F(k') - \cos^2 \theta \Pi(-k'^2 \sin^2 \theta, k') F(k) \\ = \frac{1}{2} \pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} F(k', \theta), \end{aligned}$$

comme on peut le prouver en substituant, au lieu des fonctions  $\Pi$ , leurs valeurs en  $F$  et  $E$ ; ou bien encore, à priori, par les mêmes considérations de géométrie, dont M. Chasles a fait usage pour démontrer la relation de Legendre entre les fonctions complètes  $F$ ,  $E$ , aux modules complémentaires, c'est-à-dire par l'emploi des coordonnées elliptiques.