JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUGUSTE MIQUEL

Mémoire de géométrie (troisième partie.) Généralisation du problème des trois cercles; démonstration des principes de la projection stéréographique; extension du problème précédent sur la surface de la sphère; généralisation du problème des quatre sphères

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 65-75.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__65_0>

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. AUGUSTE MIQUEL.

(TROISIÈME PARTIE.)

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DES TROIS CERCLES;
DÉMONSTRATION DES PRINCIPES DE LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE;
EXTENSION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT SUR LA SURFACE DE LA SPHÈRE;
GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DES QUATRE SPHÈRES.

I.

Deux circonférences qui se coupent forment à chaque point d'intersection quatre angles qui, pris deux à deux, sont égaux ou supplémentaires. Mais en prenant pour l'angle de ces circonférences celui qui se trouve formé, à chaque point d'intersection, par les deux arcs que décrirait un point partant de cette intersection et exécutant successivement sur chaque circonférence un mouvement de rotation dans le même sens, il arrive que l'angle des deux circonférences est précisément égal à celui des rayons menés des deux centres à un même point quelconque d'intersection. Cela étant, l'angle de deux circonférences qui se touchent intérieurement est nul; et celui de deux circonférences qui se touchent extérieurement est égal à deux droits.

II.

Lorsqu'une droite issue d'un des centres de similitude de deux cercles coupe leurs circonférences, les rayons qui aboutissent à deux intersections homologues sont, d'après la nature des centres de similitude, parallèles entre eux deux à deux. De là, en ayant égard à l'égalité des angles curvilignes symétriques ainsi qu'à celle des angles opposés par le sommet, et en considérant les lignes droites comme des circonférences infinies, on déduit les théorèmes suivants :

Les angles qu'une sécante issue du centre de similitude direct de deux cercles fait avec chaque circonférence sont égaux entre eux; et réciproquement.

Les angles qu'une sécante issue du centre de similitude inverse de deux cercles fait avec chaque circonférence sont supplémentaires l'un de l'autre; et réciproquement.

Tout cercle réciproque [*] *par rapport au centre de similitude direct de deux cercles fait à sa rencontre avec leurs circonférences des angles égaux entre eux; et réciproquement.*

Tout cercle réciproque par rapport au centre de similitude inverse de deux cercles fait, à sa rencontre avec leurs circonférences, des angles supplémentaires l'un de l'autre; et réciproquement.

III.

Lorsqu'une suite de cercles C, C', C'',... *est telle que chacun d'eux coupe une circonférence donnée* O *sous un angle* A *et une circonférence* O' *sous un autre angle donné* A', *toute circonférence* O'' *qui aura même axe radical avec les cercles* O *et* O' *sera coupée sous un même angle* A'' *par chacun des cercles de la suite* C, C', C'',....

En effet, soient N et M deux intersections antihomologues du cercle O avec les deux cercles C et C', D et E deux intersections antihomologues du cercle O' avec les mêmes cercles C et C'. Puisque les cercles C et C' sont par hypothèse coupés aux points N et M antihomologues sous un même angle A par un même cercle O, d'après une des propositions précédentes, la droite MN qui joint ces points doit passer par le centre de similitude direct des cercles C et C'. De même, la droite DE doit passer par le centre de similitude des cercles C et C'. Ce centre n'est donc autre chose que le point I d'intersection des

[*] Conformément à l'usage adopté par plusieurs géomètres, nous appelons cercle réciproque de deux autres un cercle qui passe par deux intersections antihomologues faites sur leur circonférence par une sécante issue d'un de leurs centres de similitude.

droites NM et DE. Comme, d'après une propriété connue, les produits de similitude IN.IM et ID.IE sont égaux entre eux, le point I doit appartenir à l'axe radical des cercles O et O'.

Menons du point I une droite à un des points B d'intersection du cercle O'' avec la circonférence C'. Puisque le point I est le centre de similitude des deux cercles C et C', la droite IB coupera le cercle C en un point P tel que les produits de similitude IP.IB et ID.IE seront égaux entre eux. Or les trois cercles O, O', O'' ayant, par hypothèse, le même axe radical passant par le point I, en désignant par P' la seconde intersection du cercle O'' avec IB, on doit avoir

$$IP'.IB = ID.DE.$$

Comparant les deux dernières égalités, on voit que

$$IP = IP'.$$

Ce qui nous montre que la circonférence O'' doit couper la circonférence C au point P de la droite IB. Par conséquent, les points B et P étant deux intersections antihomologues du rayon PB de similitude des cercles C et C', la circonférence O'' qui passe par ces points B et P coupe les circonférences C et C' sous un même angle A''. On démontrerait de la même manière qu'elle coupe sous le même angle les circonférences C et C''. Donc, toute circonférence O'' qui a même axe radical avec les cercles O et O' coupe sous le même angle tous les cercles de la suite C, C', C'',....

Corollaire I. Supposons décrite une circonférence K qui, ayant même axe radical avec les cercles O et O', ne fasse que toucher un des cercles C' de la suite C, C', C'',..., il est évident, d'après la proposition précédente, qu'il sera tangent à tous les autres cercles de la même suite. Il en est de même du second cercle K' qui peut se construire de la même manière que le cercle K, mais de l'autre côté de l'axe radical. Donc :

Lorsqu'une suite de cercles C, C', C'',... *est telle que chacun d'eux coupe un cercle* O *sous un angle* A *et un cercle* O' *sous un angle* A', *elle a pour enveloppe deux circonférences de cercle* K *et* K' *qui ont même axe radical avec les cercles* O *et* O'.

COROLLAIRE II. *Lorsque plusieurs circonférences de cercle C, C′, C″, touchent toutes d'une même manière le cercle O, et toutes d'une même manière le cercle O′, tout cercle O″ qui aura même axe radical avec O et O′ coupera sous un même angle toutes les circonférences C, C′, C″,....*

SCOLIE. *Si un cercle C_1 touche chacun des cercles O et O′ d'une manière inverse à celle du cercle C, le cercle O″ coupera les cercles C et C_1 sous des angles supplémentaires.*

En effet, parmi toutes les circonférences qui sont tangentes à chacun des cercles O et O′ de la même manière que le cercle C, il y en a une de rayon infini, qui n'est autre chose qu'une ligne droite, et qui coupe encore la circonférence O″ sous le même angle A que la circonférence C. Or, sans que les angles que fait cette droite avec chacun des cercles O, O′, O″, changent de grandeur, nous pouvons la considérer comme un arc d'une circonférence de cercle infiniment grande qui aurait son centre du côté opposé à celui des centres des circonférences dont elle était primitivement considérée comme la limite. Alors, d'après les conventions que nous avons adoptées sur l'angle de deux circonférences, cette circonférence infinie rencontrera chacun des cercles O, O′, O″, sous des angles respectivement supplémentaires de chacun des précédents. Elle touchera donc chacun des cercles O et O′ en sens inverse du cercle C et coupera le cercle O″ sous un angle B supplémentaire de l'angle A. Par conséquent, le cercle C_1, qui actuellement touche les cercles O et O′ de la même manière que cette circonférence infinie, coupe, comme elle, le cercle O″ sous l'angle B supplémentaire de l'angle A.

IV.

Décrire, d'un rayon donné L, *une circonférence de cercle qui coupe une circonférence donnée* O *sous un angle* A, *et une circonférence* O′ *sous un autre angle* A′.

Soient OB un rayon quelconque du cercle O, et O′B′ un rayon du cercle O′. Menons aux points B et B′ deux droites qui fassent respectivement avec les rayons OB et O′B′ deux angles égaux aux angles donnés A et A′. Prolongeons ces droites d'une distance égale à L. Appelant E et E′ les extrémités de ces droites ainsi déterminées, décrivons des centres O et O′, avec des rayons respectivement égaux à OE, O′E′, deux circonférences dont les points d'intersection C et C′, pris pour centres, donneront chacun une solution du problème proposé.

Pour voir la raison de cette construction, il suffit d'observer, 1° que l'angle de deux circonférences de cercle est égal à celui de leurs rayons non prolongés; 2° que le lieu géométrique des centres de tous les cercles qui, décrits d'un rayon donné, coupent une circonférence sous un angle donné, est une circonférence de cercle concentrique avec la proposée.

Trois cercles O, O′, O″ *étant donnés, décrire un autre cercle qui les coupe respectivement sous les angles donnés* A, A′, A″.

Décrivez, d'après le problème précédent, un cercle M qui coupe le cercle O sous l'angle A et le cercle O′ sous l'angle A′. Décrivez de même un cercle N qui coupe le cercle O sous l'angle A et le cercle O″ sous l'angle A″. Déterminez, par l'intersection de deux cordes communes, le centre radical P des trois cercles O, O′, M et le centre radical P′ des trois cercles O, O″, N. Menez par le point P les tangentes PE et PF au cercle M. Par les points de contact E et F, menez les rayons ME et MF, que vous prolongerez jusqu'à leur intersection avec la ligne des centres OO′, aux points O et O'_1. Décrivez de ces derniers points comme centres, avec des rayons respectivement égaux à EO_1, FO'_1, deux circonférences de cercle. Construisez d'une manière analogue, au moyen des circonférences données O et O″ et du cercle auxiliaire N, les circonférences O_2 et O''_1. Décrivez enfin, par une des constructions connues, une circonférence K qui touche trois quelconques des quatre cercles O_1, O'_1, O_2, O''_1, respectivement de la même manière que chacun d'eux est touché par une des circonférences M et N; et cette circonférence K sera celle qu'il fallait déterminer.

En effet, d'après la construction précédente, le point P est le centre radical des cinq cercles M, O, O′, O_1, O'_1. Donc les quatre cercles O, O′, O_1, O'_1, dont les centres sont sur une même ligne droite, ont tous le même axe radical. Donc, en vertu de la proposition précédente, le cercle demandé devant couper les cercles O et O′ sous les mêmes angles

A et A′ que le cercle M, doit toucher chacun des cercles O_1 et O'_1 de la même manière que le cercle M. Il doit toucher encore, par la même raison, chacun des cercles O_2, O''_1 de la même manière que le cercle N. Or, il n'y a qu'un seul cercle qui puisse toucher à la fois trois cercles donnés, dans un sens donné pour chacun d'eux. Donc le cercle demandé n'est autre chose que le cercle K.

Il devra arriver, comme vérification de la construction précédente, que la circonférence K sera tangente non-seulement à celle des quatre circonférences O_1, O'_1, O_2, O''_1 qui n'aura pas servi à sa détermination, mais encore à deux autres circonférences O'_2, O''_2, enveloppes de tous les cercles qui peuvent couper les deux cercles donnés O′ et O″ sous les angles donnés A′ et A″ : circonférences qu'on obtiendrait de la même manière que les précédentes, au moyen des cercles O′ et O″ et d'une troisième circonférence auxiliaire.

D'après ce qui a été dit dans le scolie du § III, on peut observer encore que la circonférence K′, qui ferait avec chacun des cercles donnés O, O′, O″ des angles respectivement supplémentaires des angles donnés A, A′, A″, toucherait chacun des cercles O_1, O'_1, O''_1, O_2, O'_2, O'_2 en sens inverse du cercle K; et qu'on pourrait, par conséquent, l'obtenir par une simple modification de la construction de ce dernier cercle.

V.

Nous nous occuperons, dans ces derniers paragraphes, de quelques théoremes déjà connus, pour donner des démonstrations qui nous paraissent nouvelles, et pour compléter l'ensemble des propositions de ce Mémoire.

Un cercle étant tracé sur la surface d'une sphère, sa projection sur la même surface relativement à un point quelconque de l'espace, pris pour centre de projection, est elle-même une circonférence de cercle.

En effet, soient A la circonférence proposée sur la sphère S, A′ la courbe qui en est la projection sur la même sphère relativement à un point P de l'espace. Comme trois points suffisent pour déterminer une circonférence de cercle, la démonstration du théorème proposé revient à prouver que quatre points a', b', c', d', pris à volonté sur la courbe A′, sont toujours sur une même circonférence de cercle. Soient a, b, c, d les points de la circonférence A dont ils sont les projections. Suivant les rayons projetants Paa', Pbb', Pcc', Pdd', pris consécutivement deux à deux, faisons passer un plan. Les quatre plans ainsi obtenus couperont la sphère S suivant quatre circonférences de cercle $aba'b'$, $bcb'c'$, $cdc'd'$, $dad'a'$, qui se couperont consécutivement deux à deux aux quatre points a, b, c, d, situés sur une même circonférence A. Donc, d'après une proposition du § Ier de la deuxième partie de ce Mémoire, les quatre points d'intersection a', b', c', d', respectivement symétriques des précédents, sont sur une autre circonférence de cercle. Donc la courbe A′ est elle-même une circonférence de cercle.

Si l'on mène deux cônes tangents à une sphère suivant les deux circonférences de cercle A *et* A′ *qui sont la projection l'une de l'autre par rapport à un point* P *de l'espace, les sommets* C *et* C′ *de ces deux cônes seront en ligne droite avec le point* P.

En effet, conduisons un plan suivant les deux rayons de la sphère qui passent respectivement par les centres des cercles A et A′. Ce plan, qui divisera la figure dont il s'agit en deux parties symétriques, contiendra les sommets C, C′ et P. Son intersection avec la même figure sera une circonférence de cercle coupée par deux sécantes Paa', Pbb' et deux couples de tangentes menées aux points d'intersection a et b, a' et b'. Soit d le point d'intersection de la tangente menée au point a avec la tangente au point b. Soit encore d' le point d'intersection des deux tangentes menées aux points a' et b'; il nous suffit de démontrer que la droite qui joint les points d et d' passe par le point P. Menons par le point d deux droites de et df respectivement parallèles aux droites $d'a'$ et $d'b'$, jusqu'à leur intersection avec les sécantes Paa', Pbb' aux points e et f. Je dis que ces nouvelles droites sont égales entre elles. En effet, les angles formés par chacune des sécantes Paa', Pbb' avec les deux droites de, df, et leurs parallèles $d'a'$, $d'b'$, sont égaux deux à deux, comme correspondants. Mais ces sécantes Paa', Pbb' font respectivement avec les tangentes da et db les mêmes angles qu'avec les tangentes $d'a'$, $d'b'$. Donc chacun des triangles dae, dbf est isocèle. Or, les tangentes da et db sont égales. Donc, $de = df$. Par conséquent, les deux droites de, df étant entre elles dans le même rapport que les tangentes $d'a'$, $d'b'$, qui leur sont parallèles, il est évident que les trois droites aa', bb', dd' se coupent en un même point P.

Tout angle A *tracé sur la surface d'une sphère a pour projection, sur la même surface, relativement à un point quelconque de l'espace pris pour origine des rayons visuels, un angle* A' *qui lui est égal.*

En effet, par le rayon projetant qui passe par le sommet de l'angle A, on peut faire passer deux plans qui contiennent respectivement les tangentes menées aux côtés de cet angle. Ces plans couperont la sphère suivant deux circonférences qui seront respectivement tangentes aux côtés correspondants des angles A et A'. Elles feront donc entre elles les mêmes angles A et A', qui seront alors évidemment égaux comme symétriques.

VI.

Si par un des centres de similitude de deux sphères on fait sur la surface d'une de ces sphères V' *la projection antihomologue d'une figure tracée sur la surface de l'autre sphère* V : 1° *la projection* A' *d'un cercle* B *sera elle-même un cercle;* 2° *le sommet du cône circonscrit à la sphère* V' *suivant la circonférence* A' *sera sur une même droite avec le sommet du cône circonscrit à la sphère* V *suivant la circonférence* B, *et avec le point* P, *origine des rayons visuels;* 3° *tout angle tracé sur la sphère* V *aura pour projection sur la sphère* V' *un angle qui lui sera égal.*

En effet, d'après les propriétés principales des centres de similitude, 1° il est évident que la projection homologue du cercle B tracé sur la surface V sera une courbe B' semblable à B : ce sera donc une circonférence de cercle; 2° le cône circonscrit à la sphère V', suivant le cercle B', et le cône circonscrit à la sphère V, suivant le cercle B, sont deux figures semblables et semblablement placées; et, par conséquent, leurs sommets sont en ligne droite avec le centre de similitude; 3° la projection homologue d'un angle tracé par la sphère V est sur la sphère V' un angle égal au premier. Donc, en ayant égard aux théorèmes du paragraphe précédent, on voit, 1° que la projection antihomologue d'un cercle B tracé sur la sphère V est, sur la sphère V', un cercle A'; 2° que les sommets des cônes circonscrits aux sphères V et V′ suivant les circonférences antihomologues B et A′ sont en ligne droite avec l'origine P des rayons visuels; 3° que la projection antihomologue d'un angle quelconque tracé sur la sphère V est sur la sphère V′ un angle égal.

COROLLAIRE. Si une des sphères V′ et V, devenant infinie, se réduit à un plan, ses deux centres de similitude relatifs à l'autre sphère sont les deux points où la perpendiculaire menée à ce plan par le centre de la seconde sphère en perce la surface. Comme les propriétés précédentes ne cessent pas d'avoir lieu, on en déduit les trois principes analogues de la projection stéréographique, principes qui se trouvent ainsi démontrés pour le cas général où le plan de projection ne passe point par le centre de la sphère, comme pour celui où il contient ce centre, et qu'on prend ordinairement pour plan de projection stéréographique.

VII.

Deux cercles étant tracés sur une même sphère, le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener des arcs de cercle qui leur soient tangents et qui terminés au point de contact soient égaux entre eux deux à deux, est la circonférence d'un grand cercle perpendiculaire à celle qui passe par les centres des deux cercles donnés.

Faisons passer un plan par chacun de ces cercles. Les deux plans ainsi obtenus se couperont suivant une droite D qui sera l'axe radical de ces deux cercles, puisque les tangentes menées à chacun d'eux par un point quelconque de cette droite D, seront aussi tangentes à la sphère, et, par conséquent, égales entre elles. Faisons passer un plan par le centre de la sphère et par la droite D. Ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle d, qui sera perpendiculaire à celui qui joint les centres M et N; car, chacun des plans conduits suivant les cercles M et N étant perpendiculaire à celui qui contient leurs centres et le centre de la sphère, la droite D de leur intersection est aussi perpendiculaire à ce plan. Donc le grand cercle d, dont le plan passe par cette droite, est perpendiculaire au grand cercle qui joint les centres M et N.

Je dis, de plus, que ce grand cercle d est l'axe radical des cercles M et N. En effet, il est évident qu'on peut mener par un point quelconque a de la circonférence d deux arcs de grand cercle qui soient respectivement tangents aux circonférences M et N. Or, les plans de ces grands cercles coupent les plans des cercles M et N suivant deux droites qui sont respectivement tangentes à ces cercles, et qui, se coupant en un point A de la droite D, sont, par conséquent, égales entre elles. Donc les deux arcs de grand cercle qui se coupent au point a, et qui ont pour tangentes trigonométriques les droites dont nous venons de parler, sont aussi égaux entre eux. Donc la circonférence d est l'axe radical des cercles M et N.

Trois cercles étant donnés sur la surface d'une sphère, ou bien on ne peut mener qu'un seul cercle qui les coupe tous trois orthogonalement, ou bien on peut en mener une infinité; et, dans ce cas, les trois cercles ont le même axe radical.

En effet, le centre du cercle orthogonal aux trois cercles M, N, L devant appartenir à l'axe radical des cercles M et N, et devant se trouver encore sur l'axe radical des cercles M et L, ne peut être qu'un des points a et a' d'intersection de ces deux grands cercles; et ces points sont ses deux pôles. Donc, à moins que les trois cercles M, N, L n'aient le même axe radical, on ne peut mener qu'un seul cercle qui les coupe tous trois orthogonalement. Cette proposition est encore évidemment vraie sur un plan.

COROLLAIRE. *Lorsque trois cercles tracés sur une surface sphérique y ont le même axe radical, les trois cercles qui sont sur un plan leur projection stéréographique y ont aussi le même axe radical, et réciproquement.*

Ce corollaire, joint aux autres principes de la projection stéréographique, prouve que tous les théorèmes et toutes les solutions des §§ I, II, III et IV sont encore vrais sur la surface de la sphère.

VIII.

Lorsqu'une suite de sphères S, S′, S″ *est telle que chacune d'elles coupe une sphère donnée* O *sous un angle dièdre* A, *et une sphère* O′ *sous un autre angle* A′, *toute sphère* O″ *qui aura même plan radical avec les sphères* O *et* O′ *coupera sous un même angle* A″ *toutes les sphères de la suite* S, S′, S″.

En effet, sans que l'angle que fait chacune de ces sphères S, S′, S″

change de grandeur, on peut les amener à avoir leurs centres sur un même plan passant par la droite O, O′, O″. Alors ce plan les coupe suivant des circonférences de cercle qui forment, à leur intersection, deux à deux, des angles plans qui sont la mesure des angles dièdres formés par les sphères qui leur correspondent. Par conséquent, la démonstration proposée se trouve ramenée à celle que nous avons déjà donnée du théorème analogue dans le § III.

On peut aussi en déduire les corollaires analogues.

IX.

Construire l'enveloppe de toutes les sphères qui coupent une sphère donnée O *sous un angle* A *et une sphère* O′ *sous un autre angle donné* A′.

Après avoir fait passer un plan par les centres O et O′, la construction des centres et des rayons des sphères qui seront les enveloppes demandées revient à celle qui nous a servi à la solution du second problème du § IV.

Quatre sphères O, O′, O″, O‴ *étant données, construire une cinquième sphère qui les coupe respectivement sous les angles donnés* A, A′, A″, A‴.

Construisez les deux sphères O_1 et O'_1 qui sont les enveloppes de toutes les sphères qui coupent la sphère O sous l'angle A et la sphère O′ sous l'angle A′. Faites la même construction par rapport aux sphères O, O″ et à l'angle A″, et par rapport aux sphères O, O‴ et à l'angle A‴. Ayant obtenu ainsi les sphères O_2 et O''_1, O_3 et O'''_1, vous mènerez par une des constructions connues une sphère qui soit tangente, dans un sens que la construction précédente aura indiqué, à chacune des trois sphères O_1, O_2, O_3 et à une quelconque des trois sphères O'_1, O''_1, O'''_1; et cette sphère, ainsi déterminée, satisfera à l'énoncé.

Non-seulement la sphère trouvée sera tangente aux deux des trois sphères O'_1, O''_1, O'''_1 qui n'aura pas servi à la déterminer, mais encore à six autres qui, deux à deux, se construiraient comme les précédentes. En les désignant par une notation analogue, on voit que la sphère trouvée doit être tangente à chacune des douze sphères O_1, O_2, O_3, O'_1, O'_2, O'_3, O''_1, O''_2, O''_3, O'''_1, O'''_2, O'''_3.